阿拉伯的正七邊形作圖

葉吉海

一、前言

阿拉伯人原本只是游牧民族，在現今的阿拉伯世界裡逐水草而居。後來在穆罕默德的領導下振作並完成統一，並在他死後百年之內征服了東至印度，西至西班牙，包括北非和南義大利的版圖。公元 **755** 年時，阿拉伯帝國分裂成兩個獨立的王國，東部以巴格達爲首都，西部以西班牙的哥多華爲首都。征服的工作完成以後，這些典型的游牧民族就安頓下來，並建立他們的文化。他們很快就對藝術和科學發生興趣，東西兩個王國的首都吸引了許多科學家。他們的研究也受到支持。阿拉伯人很大方地容納各種民族和教派，異教徒也能自由活動，阿拉伯人相信這些只是宗教意識的不同。總而言之，阿拉伯人的知識是直接得自希臘手稿或敘利亞文和希伯來文版本，且各種主要的數學知識他們都能接觸到。

有關幾何作圖的知識，大約在紀元 **800** 年，阿拉伯人從拜占庭那得到歐幾里得《幾何原本》的拷貝，並將它轉譯成爲阿拉伯文。後來，阿基米德和阿波羅尼斯的著作也傳入阿拉伯。然而，這三位數學家的著作可說是阿拉伯幾何的三支柱，影響阿拉伯非常深遠。

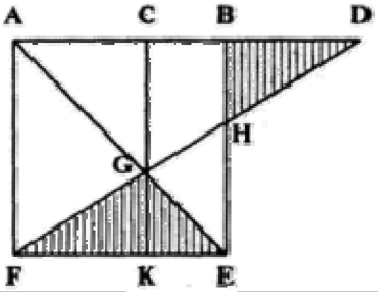
在本文中，我們將以阿拉伯數學家 **Abu Sahl al-kuhi** 的圓內接正七邊形作圖爲主題，介紹這位阿拉伯數學家處理這問題的脈絡，以及相關的阿基米德正七邊形作圖法。

二、脈絡

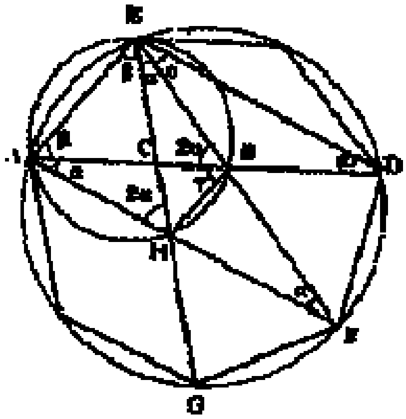
在十世紀後半葉的阿拉伯，由於 **Buvid** 家族的資助下，巴格達和周圍的區域聚集了一群來自東阿拉伯世界的著名的科學家。這些贊助者中，最主要的是 **Adud al-Daula** 國王，而 **Abu Sahl al-kuhi** 正是他宮廷中一個主要的科學家。

Abu Sahl al-kuhi 出生於裏海南部的 **Tabaristan**，他名字中的 **kuh** 是波斯文字「山」的意思。根據傳記作家 **al-Bayhaqi** 的描述，**Abu Sahl** 原來在巴格達市場中玩弄玻璃瓶雜耍的人，但後來他放棄雜耍的工作，轉而研讀和從事科學的研究。也許是因爲從事雜耍的緣故，激起 **Abu Sahl** 對「重心」的興趣，從而融會貫通了阿基米德時代以來有關重心的深刻理論。事實上，**Abu Sahl** 對阿基米德的著作相當瞭解。另外，他也寫了有關完備圓規的著作，一個用來畫圓錐曲線的工具。由於他對圓錐曲線的興趣和經驗，當接觸正七邊形的作圖問題時，他乃能提供一個運用圓錐曲線解題的解。

Abu Sahl 解決正七邊形的作圖方法的靈感來自於阿基米德。他的方法是用分析法來先分析問題，即先假設正七邊形可被作出來，然後反推回去，經過一連串合理的步驟，他得到所給的初始條件。詳細的過程將在本文第四節中呈現。在下一節，我們先介紹 **Abu Sahl** 解題的靈感來源，阿基米德的正七邊形作圖法。



圖一



圖二

圖一

三、阿基米德的正七邊形作圖法

阿基米德處理正七邊形的作圖，是從給定的一線段 **AB** 開始。在 **AB** 上先作一正方形 **AFEB**，畫出對角線 **AE**，並將線段 **AB** 向 **B** 外延伸，接著使用端點作圖法，即過 **F** 點作一直線，轉動此直線直到它與 **AE** 以及邊 **FE** 之間所圍的面積，等於該線與邊 **BE** 以及 **AB** 在 **B** 外的延長線之間所圍的面積爲止。令 **FD** 表示該直線，而相等的面積就是圖上陰影的部分，且 **FD** 與對角線相交於 **G**，與 **BE** 相交於 **H**，同時 **AB** 延長到 **D**。過 **G** 作一直線平行於 **BE**，且交 **AB** 於 **C**，交 **FE** 於 **K**。

接著，阿基米德證明由端點作圖法而得的四個共線點 **A**、**B**、**C**、**D**，滿足下列兩個方程式：

$$AB \cdot AC = BD^2 , \qquad (1)$$
$$CD \cdot CB = AC^2 。 \qquad (2)$$

上述第一個式子，可由兩個帶陰影的三角形面積相等、和三角形 **HBD** 相似於三角形 **GKF** 兩個條件推得。第二個式子，則由下列條件推得：因爲三角形 **FKG** 相似於三角形 **DCG**、**AE** 爲正方形的對角線，所以 **GC**＝**AC**、**KE**＝**GK**＝**CB**。

阿基米德在得到滿足上述兩式子的線段 **AD** 之後，接下來作點 **E**，使得 **CE**＝**CA** 和 **BE**＝**BD**。然後作三角形 **AED** 的外接圓，如圖二所示。這時，阿基米德說，我們可以斷定 **AE** 就是圓內接正七邊形的邊長了。如何證明呢？首先，我們可以知道三角形 **EBD** 爲等腰三角形，它的兩底角角度相等，記爲 **α**，同樣地，三角形 **ACE** 的兩底角也相等，記爲 **β**。延長 **EB** 和 **EC**，設分別交大圓於 **F**、**G**。連結 **AF** 和 **BH**，我們可得∠**FAD**＝∠**FED**＝**α**，∠**AFE**＝∠**ADE**＝**α**。

接著，阿基米德利用∠**ABE**＝**2α**（∠**ABE** 爲三角形 **EBD** 中∠**B** 的外角）、

AC＝EC 和方程式（2）之變形得到

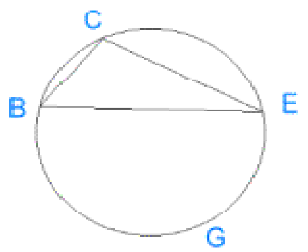
$$\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{CB}$$ 。

故三角形 BEC 和三角形 EDC 相似（SAS 公理）。從而得∠BEC＝α，而劣弧 GF、弧 AE 和弧 DF 同為 2α。

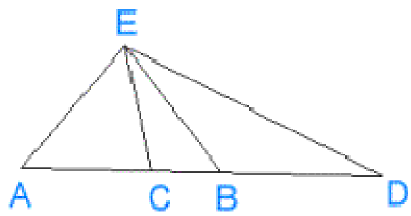
弧 ED 和弧 AG 相等，同為 2β。如果我們能得 β＝2α，則就完成了所有的證明。為此，由於線段 HB 對著在 A 點及 E 點的角同為 α，故 A 和 E 一定都在以 HB 為弦的圓弧上。換言之，A、E、B、H 四點共圓。在此圓中，圓周角 β 對著弦 EB 和 AH，因此，這兩弦相等。繼之，在 H 點對著 AE 的角等於在 B 點所張的角 2α。於是，∠AHE 也為 2α。再利用 EB＝BD＝AH 和（1）式的變形得到

$$\frac{AB}{AH}=\frac{EB}{BC}$$

此外，又有∠BAH＝∠BEC。可知，三角形 EBC 和三角形 ABH 相似（SAS）。因此，∠HBA＝2α。因為∠HBA 與∠AEH 在同一圓上對著弦 AH，所以，β＝2α。弧 ED 及 AG 都是 4α，整個大圓的周長是 14α，得證了弧 AE 是大圓的七分之一。



圖三



圖四

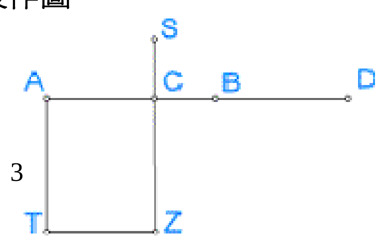
四、Abu Sahl 的正七邊形作圖法

以下的是 Abu Sahl 的分析方法，他將這成果獻給 Adud al-Daula 國王。他的作圖過程有三個部分，分別是從正七邊形作圖化約到三角形作圖、從三角形作圖化約成線段的分段作圖、線段的分段作圖化約成圓錐曲線作圖。

（一）從正七邊形作圖化約成三角形作圖

在圖三中，假設在圓 BCE 中我們成功做出正七邊形的邊 BC，且弧 CE = 2 弧 BC，得弧 BCE = 3 弧 BC。又弧 BC 等於整個圓的七分之一。所以，弧 BGE=4 弧 BC。根據《幾何原本》命題 VI-33 知：三角形 BCE 的內角間的比例，與所對應的弧長成比例一樣，亦即∠C＝4∠E、∠B＝2∠A。從此分析，正七邊形的作圖法演繹為作個一三角形，其三內角比為 4：2：1 的作圖問題。

（二）從三角形作圖化約成線段的分段作圖



圖五

令三角形 BCE 滿足∠ECB＝2∠CBE＝4∠CEB，向 BC 兩端延長於 A、D 兩點，滿足 DB＝BE，AC＝CE，完成三角形 AED，如圖四所示。因爲∠BEC＝∠D（∠CBE＝2∠BEC＝2∠D），所以，三角形 BCE 相似於三角形 ECD，可知

$$DC:CE=EC:CB，CE^2=DC\cdot CE \quad (3)$$

因爲∠CEA＝∠CBE（∠ECB＝2∠CEA＝2∠CBE），所以，三角形 EAC 相似於 BAE，可知

$$BA:EA=EA:AC，EA^2=BA\cdot AC \quad (4)$$

又因爲 EC＝CA，∠A＝∠CEA＝∠CBE，所以，AE＝EB＝BD。(3)、(4) 分別變形爲

$$CA^2=DC\cdot CB \quad (5)$$

$$BD^2=BA\cdot AC \quad (6)$$

（三）線段的分段作圖化約成圓錐曲線作圖

令 AD 線段被 C、B 所截，滿足（5）、（6）兩式，且過 C 作 SZ 垂直 AD，滿足 SC＝CB，CZ＝BD，並完成長方形 CZTA。然後可得 ZS・SC＝DC・CB＝CA^2，又 SC＝CB 和 CA＝TZ，可得 ZS・CB＝TZ^2。我們可說，T 在以 S 點爲頂點，BC 長爲參數的拋物線上。[1]

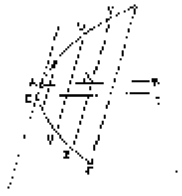
另外，BD^2＝BA・AC 和 BD＝CZ＝AT，所以得 BA・AC＝AT^2，即 T 在以 C 爲頂點，transverse side 和參數長同爲 BC 的雙曲線上。[2]

五、後語

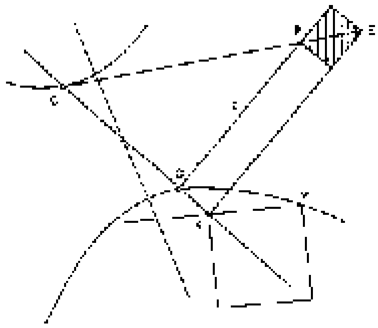
正七邊形作圖是歐幾里得在正三、四、五、六邊形作圖後，第一個未處理的作圖。雖然阿基米德理論地做出了正七邊形的作圖，但什麼時候兩三角形面積會相等，則無從得知。Abu Sahl 深入分析了阿基米德的作圖的方法，做出了屬於他自己的東西。難得可貴的是，雖然他的出身是戲法者，但由於興趣的使然，成就了數學史上令人稱羨的貢獻。值得我們後輩推崇與效法。

註解

1. 拋物線的性質：如下圖所示，AB 爲拋物線的一直徑，YZ 爲其相對應的弦，交 AB 於 X，則 XY^2=p・AX，p 爲相對應的參數。



2. 雙曲線性質：如下圖所示，直線 **CC`** 爲雙曲線的一直徑，**XY** 爲其相對應的半弦，則 **XY²＝CX・(p＋s)**，**p** 爲其相對應的參數，**s** 與 **CX** 和 **p** 等的關係爲 **s：CX＝P：CC`**。



参考資料

Kline, Morris (1983).《數學史—數學思想的發展》（林炎全等譯），台北：九章出版社。

朱恩寬、李文銘 等譯 **(19??)**，《阿基米德全集》，陝西科學技術出版社。

Berggren, J. L. (1986). ***Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*****. New York: Springer-Verlag.**

Hogendijk, Jan P. (1984). "Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon", ***Archive for History of Exact Sciences*** **30: 197-330.**

Katz, Victor (1993). ***A History of Mathematics*****. New York: HarperCollins College Publishers.**

附錄一：〈正七邊形的尺規作圖之不可能！〉 洪萬生

從正三角形開始，正方形、正五邊形、正六邊形都可以尺規作圖（請參看本欄文章：〈從三角形到正方形〉和〈正 5、6、15 邊形之尺規作圖〉)。

本欄已刊李建勳〈反證正七邊形不可能尺規作圖〉，當然足以說明此一正多邊形的作圖之不可能。此處，我們再推薦一個更代數化的方法，證明此一不可能性！

考慮下列方程式

$$z^7 - 1 = 0$$

其中 $z = x + yi$。顯然它的七個根，恰好是複數平面上單位圓內正七邊形的七個頂點。由於

$$(z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^7 - 1 = 0,$$

因此，它的七根除了 $z = 1$ 之外，其它的六根都是下列方程式的根：

(1) $\quad z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ 。

現在，讓我們將 (1) 式等號兩邊同除以 z^3，則可得下式：

(2) $\quad z^3 + 1/z^3 + z^2 + 1/z^2 + z + 1/z + 1 = 0$

再進一步作代數變換，又可以得到下式：

(3) $(z+1/z)^3-3(z+1/z)+(z+1/z)^2-2+(z+1/z)+1=0$

令 $y=z+1/z$，則(3)式可以變換成為下列方程式：

(4) $y^3+y^2-2y-1=0$ 。

另一方面，由於 z 是1的七次方根，所以，它可以表示為下式：

$$z=\cos\phi+i\sin\phi \text{ ，}$$

其中 $\phi=360^\circ/7$ 。另外，再由於 $1/z=\cos\phi-i\sin\phi$，因此 $y=z+1/z=2\cos\phi$。現在，如果我們可以針對 y（尺規）作圖，當然也可以針對 $\cos\phi$ 作圖，反之亦然！因此，如果我們可以證明 y 無法作圖，那麼，$\cos\phi$ 或 z 當然也無法作圖，於是，正七邊形的作圖就不可能了。

最後，如果我們可以證明上述方程式(4)沒有有理根，那麼，我們就大功告成了。現在，假設它有一個有理根，令為 r/s（r,s 互質），則

$$r^3+r^2s-2rs^2-s^3=0$$

由此可知 r^3 有因數 s ，s^3 有因數 r 。但是，r,s 可能的公因數必須是 ±1 ，因此，如果方程式(4)有一個有理根的話，那麼，它不是+1 就是-1。這兩個數都無法滿足方程式(4)，因此，方程式(4)沒有有理根，y 乃至於 z 當然就無法尺規作圖了。

附註：本文根據 Richard Courant and Herbert Robbins (Revised by Ian Stewart), *What Is Mathematics?* (New York / Oxford: Oxford University Press, 1996) pp. 138-139 改寫。

附錄二：〈正七邊形不可能尺規作圖！〉 李建勳

有關正七邊形的幾何作圖問題，阿基米德和阿拉伯人都極感興趣（請參看葉吉海，〈阿拉伯的正七邊形作圖〉)。不過，他們都知道如何鬆弛尺規作圖的條件（請參看蘇惠玉，〈三大作圖題〉)。本文針對正七邊形的尺規作圖，提出不可能性的證明！

如圖一所示，

設依照書上作法可作成一正七邊形內接於一半徑為 r 的圓內 ，

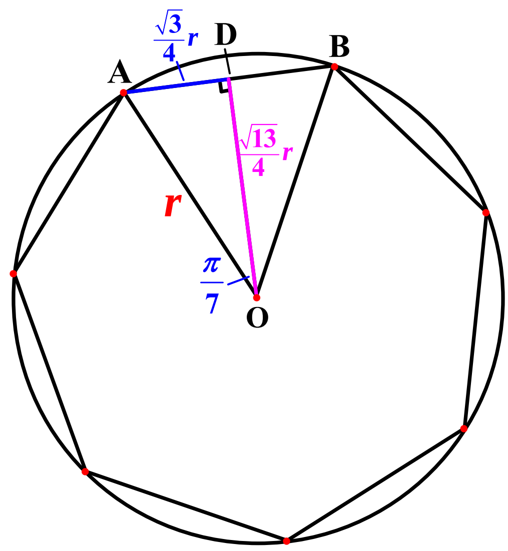
則其邊長為 $\frac{\sqrt{3}}{2}r=\overline{AB}$;

(1)

過圓心 O 作 $\overline{OD}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ ，

則 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{4}r$, $\overline{OD}=\frac{\sqrt{13}}{4}r$ 且 $\sin\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7}=1-2\sin^2\frac{\pi}{7}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 為一有理數。



圖一

(2)

如圖二，作 $\overline{BE}\perp\overline{OA}$ 並交於 E ，則 $\overline{BE}=r\cos\frac{2}{7}\pi$；

在三角形 OAB 中，其面積為$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{OD}=\frac{\sqrt{39}}{16}r^2$ ，

亦可表為$\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{BE}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cos\frac{2}{7}\pi$ ，

這告訴我們$\frac{\sqrt{39}}{16}r^2=\frac{1}{2}r^2\cos\frac{2}{7}\pi$ ，

即$\cos\frac{2}{7}\pi=\frac{\sqrt{39}}{8}$為一有理數，

顯然因$\sqrt{39}$為一無理數而矛盾！

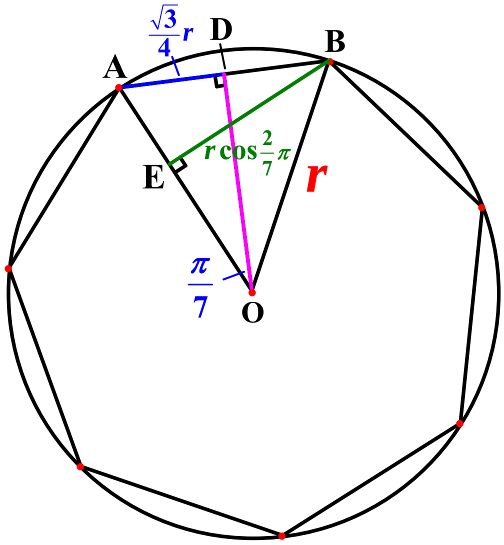
故此正七邊形作圖不成立！

附註：

$\sin\frac{\pi}{7}\approx 0.433884$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\approx 0.433013$

經由計算得其近似值亦可知兩者並不相等！



圖二