

# 運用摺紙提升學生尺規作圖技巧

譚克平 陳宥良

國立臺灣師範大學 科學教育研究所

## 一、學習尺規作圖的困難

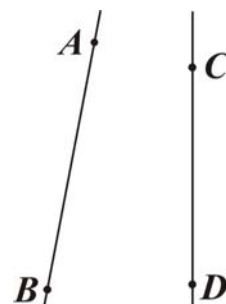
眾所周知，一般學生最懼怕的學科是數學，而在數學科眾多的主題之中，很多學生最怕的是幾何，尤其是幾何證明和尺規作圖這兩個主題。近年來，數學教育工作者對幾何證明投入了不少關注，包括了學生對作出幾何證明或閱讀理解幾何證明的困難等方面，都有不少相關研究。然而，數學教育界對尺規作圖方面的研究，可說是相形見少的。相較之下，這方面的論著並不多，我們對學生學習尺規作圖的困難知之不詳。

茲試以有三十萬考生的國民中學學生基本學力測驗的題目為例，藉以管窺臺灣國中生尺規作圖表現的現況。在 98 學年度數學科第一試第 33 題，所測驗的是國三學生能否判斷兩種作圖方法的正確性。為方便討論，轉錄如下：

如圖(十三)，直線  $AB$ 、直線  $CD$  為不平行之二直線，  
今欲作一圓  $O$  同時與直線  $AB$ 、直線  $CD$  相切，  
以下是甲、乙兩人的作法：

- (甲)1. 過  $D$ ，作一直線  $L$  與直線  $AB$  垂直，且交直線  $AB$  於  $E$   
2. 取  $\overline{DE}$  中點  $O$   
3. 以  $O$  為圓心， $\overline{OE}$  長為半徑畫圓，則圓  $O$  即為所求

- (乙)1. 設直線  $AB$  與直線  $CD$  相交於  $P$   
2. 作  $\angle BPD$  之角平分線  $L$   
3. 過  $C$ ，作一直線  $M$  與直線  $CD$  垂直，且交直線  $L$  於  $O$   
4. 以  $O$  為圓心， $\overline{OC}$  長為半徑畫圓，則圓  $O$  即為所求



圖(十三)

對於兩人的作法，下列敘述何者正確？

- (A) 兩人皆正確  
(B) 兩人皆錯誤  
(C) 甲正確，乙錯誤  
(D) 甲錯誤，乙正確

此題的答對率僅約 28%，即每四位應試者當中，約略只有一位答對該題。該題的正確答案是 D 選項，甲、乙兩人的作圖方法中，只有乙的方法是對的，甲是錯誤的。甲作圖法的問題在於如果以  $O$  為圓心且  $\overline{OE}$  長為半徑畫圓的話，

該圓與直線  $CD$  將有兩個交點，其中一個即為  $D$  點。從應試者的表現來看，但卻有超過半數選擇  $A$  及  $C$  選項，換句話說，有超過半數的應試者認為甲的方法是對的。這一題測驗學生是否瞭解圓與切線的性質，以及作圖動作相對應的幾何意義，雖則本題有一點閱讀量，且是測驗判斷對錯能力而非直接運用尺規作圖能力，但國中畢業生對尺規作圖題感覺到的困難，由此題仍然可見一斑。

對一般學生來說，解尺規作圖題的困難來自若干個層面。首先，尺規作圖有只能使用無刻度直尺及圓規兩種工具的限制，而且這些工具使用的方式也有限制，陳宥良(2009)的研究即曾發現，有不少學生並不清楚使用直尺和圓規的限制，尤其是對於在數學較為後段的學生，常會有這種情況。此外，雖然基本尺規作圖的動作並不算多，但其應用卻可以說是變化萬千，沒有常規可循，因此並不容易掌握。再者，有些學習者甚至不清楚基本尺規作圖動作有什麼功能，可以完成哪些圖形。反之，學習者亦不容易判斷如果要獲得想要的作圖結果，則需要應用那些尺規作圖動作以及應該執行的步驟。

## 二、如何教導尺規作圖？

有些數學教師可能會誤認為，由於尺規作圖工具的功能非常明顯，直尺畫直線，圓規則畫圓弧，學習者很自然就會知道如何使用該等工具在使用上的限制。他們可能忽略作圖工具在使用上是有限制的，而且無論工具的使用規定是如何簡潔，如果教師沒有將可容許的使用方式對學習者明說並反覆提醒，學習者便不會留意，或者是很容易會忘記。

關於尺規作圖的學習，教師必須留意工具特性所帶來的影響，此外教師必須充分瞭解到，學生是無法使用他們日常經驗中熟悉的畫圖方式來解決尺規作圖問題，而是需要學習基本尺規作圖的動作，並且在解題時要靈活加以應用。可是學習者的困難在於不容易判斷應該要用什麼作圖動作，才能獲得想要的結果，這當然需要教師教導不同類型的題目以及學習者多加練習。只是作圖題變化多端，倘若學習者只是辨認題型，並且逐一背熟作圖步驟，如此則會太偏重記憶，減少了數學推理的成份。另一方面，即使是數學能力較強的學生，當他們遇到一些非傳統的作圖題目時，偶然也會摸不著頭緒，不知如何入手。難道教師就只能讓他們一籌莫展？或者是只能示範標準的作圖步驟讓學生們參考？

有鑑於上述種種情況，本文欲推薦教師採用摺紙作圖的方式，作為讓學習者另闢蹊徑、探索解題的工具，正當他們解尺規題無計可施的時候，如果能夠讓他們增加摺紙這一條新思路，運用他們的直觀思維，擴大探索的空間，這應該是值得鼓勵的解題方法。倘若摺紙的運思能夠成功解題，即可再轉換回尺規作圖的步驟，藉此完成原來的尺規作圖任務。

### 三、摺紙可以用來解尺規作圖題嗎？

摺紙是兒時的遊戲，每一個學童可能都有過摺紙的經驗，不是摺紙飛機，就是摺紙船，或者是幸運星。該等遊戲活動讓學童對摺紙擁有非常直觀的感覺，對於摺紙的動作會帶來什麼結果比較有概念，並成爲一種學習尺規作圖的先備經驗。其實摺紙的過程常需要用到對稱與平分的概念，而且是要重複地應用這些概念，對於學習尺規作圖相當有幫助。

可是摺紙與平面幾何的尺規作圖有什麼關係？摺紙可以用來解尺規作圖的問題嗎？Yates (1949) 曾指出，所有歐氏幾何作圖問題本質上均可視爲是要尋找所有交點的相對位置。如果對摺紙動作有適當的假設，即可藉由摺紙完成所有直尺和圓規可以完成的作圖問題。但是這將會引發一個疑問：如何透過摺紙動作摺出一個圓？當然，要實質上摺出一個圓是不可能的事情，然而，如果我們願意接受「如果利用摺紙找出圓心與圓上任一點的話，即可視爲摺出一個圓」這一個協議的話，則要摺出一個圓就可變成是一件可能的事了。

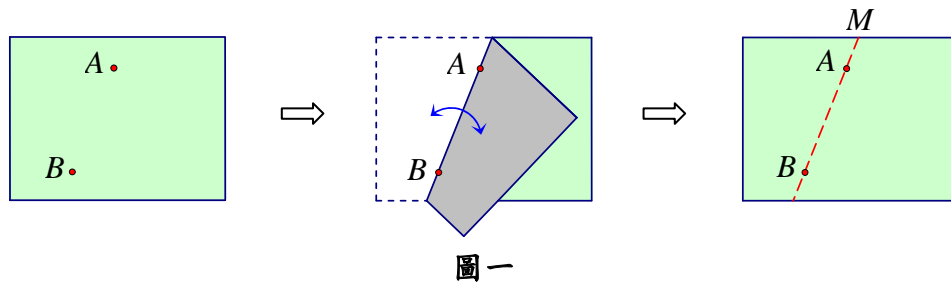
關於前述所提的假設，如果摺紙動作的目的是要解決中學階段的尺規作圖題目，則可考慮採納下列四項假設。第一、摺紙動作所產生的摺痕均可視爲是直線，除此之外，多邊形紙張的邊亦可視爲是直線。第二、任意兩條不平行直線的相交處可視爲是一個點。第三、經紙張摺疊後可重合的兩個線段或兩個角均可視爲是相等的。第四、當一個作圖問題中所有交點的相對位置均確定後，此作圖問題即可視爲已經完成。倘若將這四項假設配合下文接著要介紹的基本摺紙動作，即可成爲有力的解題工具。

### 四、實際上的基本摺紙動作

本文作者先前考慮到爲了要方便一般國中生對摺紙的掌握，因此曾根據 Huzita 的六個摺紙動作 (Coad, 2006) 與 Auckly 和 Cleveland (1995) 的四個摺紙動作，略做修改而提出七個基本摺紙動作 (陳宥良、譚克平、趙君培，2009)，作爲教導學生透過摺紙學習尺規作圖的途徑，並以此進行實驗教學的試教。可是，經過後續的分析與檢討，發現學生在實作上對於有些基本摺紙動作會感到困難，可能會影響到學生的學習 (陳宥良，2009)，而且七個摺紙動作亦稍嫌多了一點，因此經過反思之後，我們決定再修改爲六個適合國中生的基本摺紙動作。以下將會介紹先前提出的七個基本摺紙動作，接著介紹試教後重新修改的版本，並解釋更改的原因，以及它們轉換回尺規作圖的方法。此外，還會按照我們的經驗，提出一些摺紙教學時應該留意的事項。

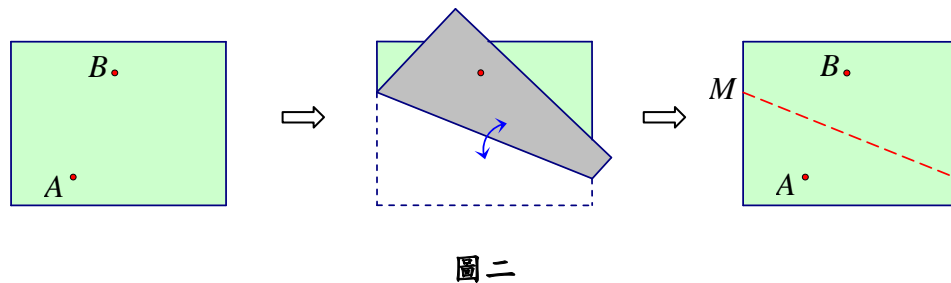
#### • 摺紙動作 1：摺出通過兩點的直線

如圖一所示，紙上給定有 A、B 兩個點，可摺出摺痕 M 線通過此兩點。



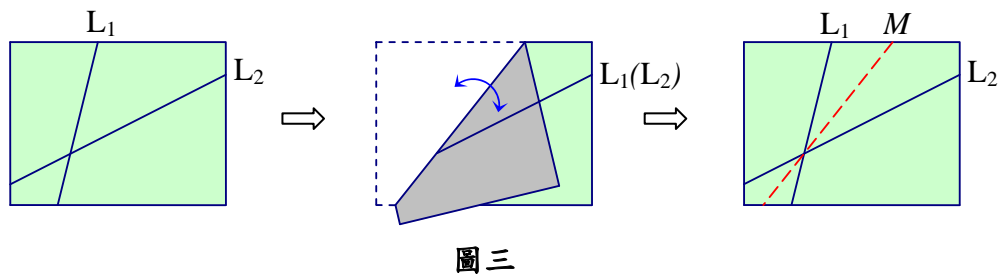
• 摺紙動作 2：兩點重合

如圖二所示，紙上有 A、B 兩點，可摺疊紙張將 A 點與 B 點重合，此時所產生的摺痕 M 線為 A、B 兩點的對稱軸。



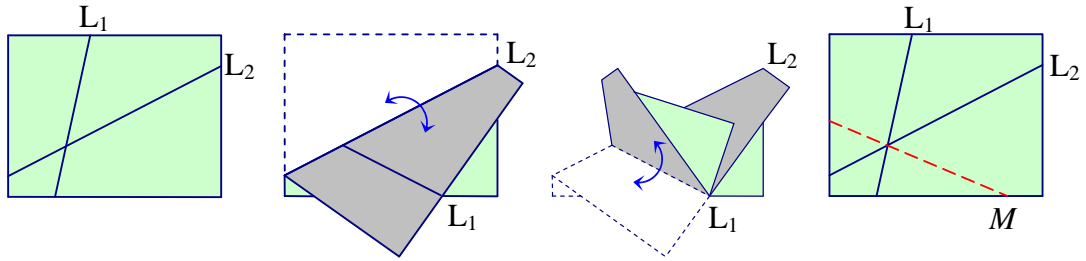
• 摺紙動作 3：兩線重合

如圖三所示，紙上有  $L_1$ 、 $L_2$  兩直線，可將  $L_1$  與  $L_2$  重合，此時所產生的摺痕  $M$  線為兩直線的對稱軸



• 摺紙動作 4：給定對稱軸搬運直線

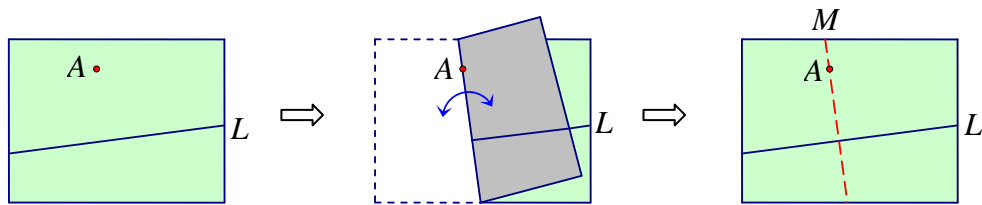
如圖四所示，紙上有  $L_1$ 、 $L_2$  兩直線，先以  $L_2$  為摺痕將紙摺疊，在未攤開紙張的情況下，摺出與  $L_1$  重合的摺痕  $M$  線。這一個摺紙動作在陳宥良等人(2009)的文章中又稱為摺疊再摺疊。



圖四

• 摺紙動作 5：線外一點作垂線

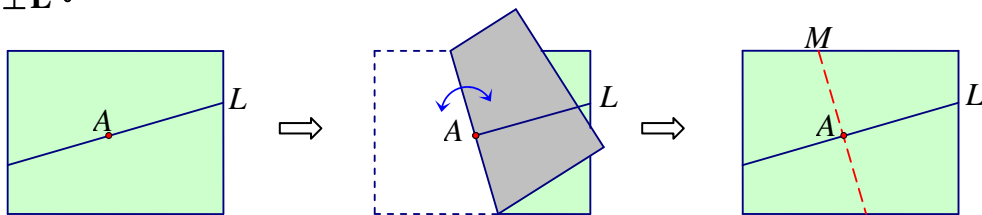
如圖五所示，紙上有一直線  $L$  與線外一點  $A$ ，可摺出通過  $A$  的摺痕  $M$  線，且  $M \perp L$ 。



圖五

• 摺紙動作 6：線上一點作垂線

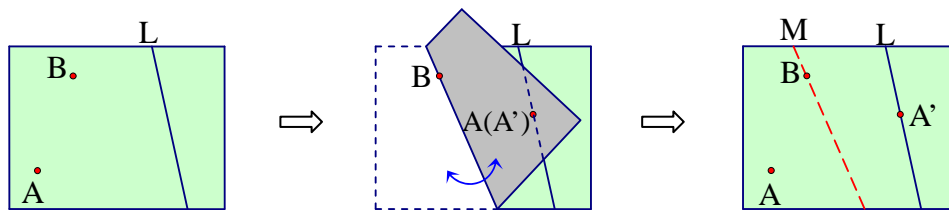
如圖六所示，紙上有一直線  $L$  與線上一點  $A$ ，可摺出通過  $A$  的摺痕  $M$  線，且  $M \perp L$ 。



圖六

• 摺紙動作 7：一點到一線，摺線過一點

如圖七所示，紙上有一直線與  $A$ 、 $B$  兩點，可將  $A$  點透過摺紙搬運至直線  $L$  上（假設與  $A'$  點重合），且讓摺痕  $M$  線通過  $B$ 。

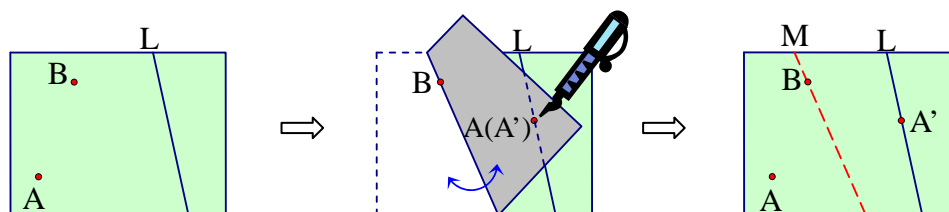


圖七

### 五、學生學習摺紙動作時遭遇的困難

在陳宥良 (2009) 教學實驗進行的期間，曾初步設計一些教材教導學生應用上述七種摺紙動作，事後並對整個過程進行檢討。分析相關資料後，發現上述動作 4 有再思考的必要。由於動作 4 需要摺疊紙張兩次，將造成學生認為連續進行兩個摺紙動作時，可在第一個動作完成但未攤開紙張的情況下，即進行第二個摺紙動作，如此將產生非預期的摺痕，對學習者很容易會造成辨識上的困難。除此以外，在利用動作 7 進行摺疊的過程中(參圖七)，學生直觀上可以「看見」 $AB=A'B$ ，然而攤開紙張後，卻只會看到所產生的摺痕 M，但仍然未能確定 A' 點的位置。

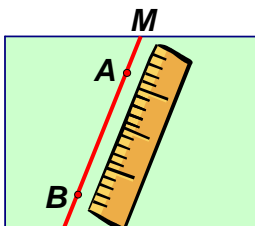
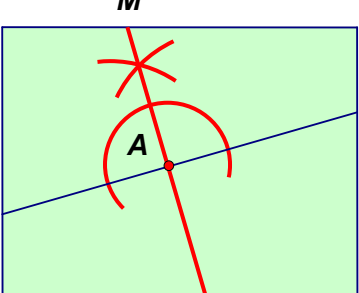
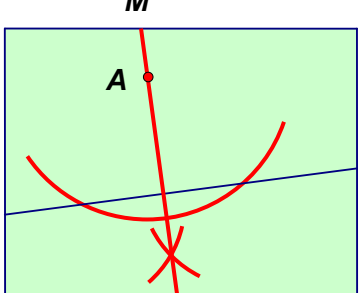
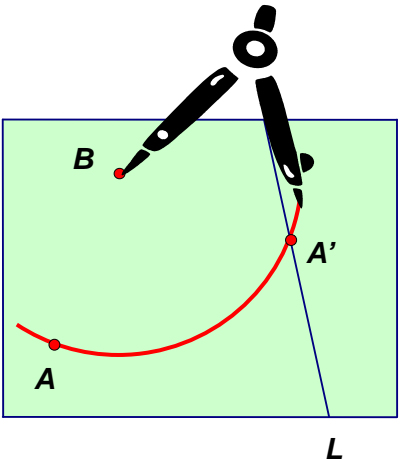
因此，我們建議將摺紙動作修改為如下的版本，首先刪除動作 4，即刪除摺疊再摺疊的動作，減少學習者對摺痕可能心生的疑惑。另外建議更動動作 7，使之容許學生用筆取點的方式，亦即在搬動一點到一線上，但要求摺線要過一給定點時，容許學習者使用筆點出 A' 位置，如圖八所示。陳宥良(2009)的研究曾證明，這個權宜的做法並不會影響到摺紙動作與尺規作圖的對應性，原則上用筆取點可視為是等價於一組摺紙動作，藉此可以減少一些摺紙的摺痕，縮短摺紙作圖的時間，對學習者相當有利。

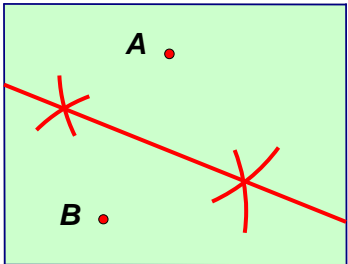
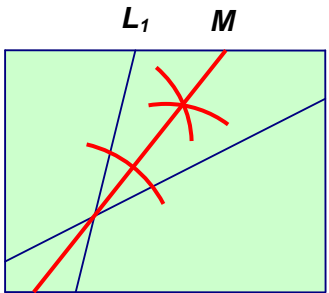


圖八

最後，考量到教學順序安排的緣故，我們將餘下的六個摺紙動作重新編號，並將這些新舊動作的對照整理如表一所示，方便讀者參考。

表一 新舊摺紙動作編號與尺規作圖動作的對照表

新摺紙動作的編號	對應的尺規作圖動作	圖示尺規作圖動作
<p>1. 摺出通過兩點的直線 (舊編號 動作 1)</p>	<p>利用直尺畫線</p>	
<p>2. 線上一點作垂線 (舊編號 動作 6)</p>	<p>線上一點作垂線</p>	
<p>3. 線外一點作垂線 (舊編號 動作 5)</p>	<p>線外一點作垂線</p>	
<p>4. 一點到一線，摺線過一點 (舊編號 動作 7)</p>	<p>利用圓規複製線段</p>	

<p>5. 兩點重合 (舊編號 動作 2)</p>	<p>中垂線作圖</p>	
<p>6. 兩線重合 (舊編號 動作 3)</p>	<p>角平分線作圖</p>	

綜合來說，修改過後的版本可以精簡為 6 個動作，每個摺紙動作均可轉換成尺規作圖的動作，而且上述之教學實驗在正式進行時，亦改用這六個摺紙動作。該六個摺紙動作等價於 Huzita 所提出六個摺紙動作中的前五個，而按照相關文獻的證明，Huzita 前五個摺紙動作可解決所有尺規作圖問題。

陳宥良 (2009) 教學實驗進行的形式，是從在自編之尺規作圖測驗中表現處於後四分之一的學生中，挑選三位學生進行小型的補救教學，藉由四節課各一個半小時的教學，將上述摺紙動作為他們做系統性的介紹。至於摺紙動作轉換成尺規作圖的方法，教學時並沒有直接告知學生每一個動作的尺規對應作法，而是引導學生將摺紙動作所產生的摺痕，視為是等腰三角形的對稱軸，並結合兩個幾何性質：「任意兩個共底邊的等腰三角形擁有相同的對稱軸」與「任意兩個共底邊的等腰三角形的頂角頂點必在其對稱軸上」，讓他們透過實作從而理解作圖步驟所代表的意義。關於內容安排方面，教學實驗中每當介紹完一個新的摺紙動作後，便會安排 2 至 3 題可利用摺紙動作解決的作圖問題讓學生思考，接著，讓學生揣摩摺紙動作轉換為尺規作圖的方法，最後，讓他們利用尺規作圖解決之前思考過的作圖問題。

至於教學實驗的效果方面，資料顯示三位參與教學實驗的學生不單只在學科知識的表現上有進步，在情意方面亦相當肯定從摺紙過渡至尺規作圖的解題方法，因篇幅所限，對於教學過程及學習效果有興趣的讀者，煩請直接參考該論文的報導。



## 六、摺紙教學應留意的事項

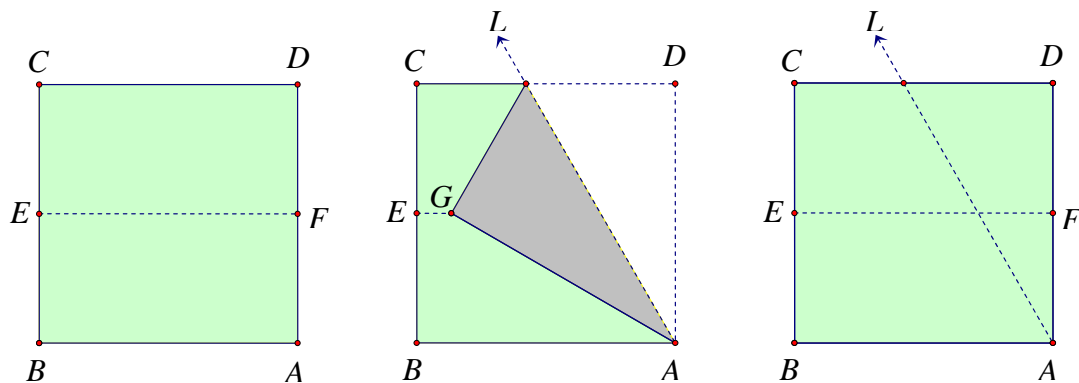
關於摺紙教學，建議應留意以下四個事項：

第一、很明顯的是，上述有些摺紙動作在一般常見的日常用紙上並不容易進行，使用日常用紙會造成某些摺紙動作無法精準操作，將產生較大的誤差，例如並不容易將位於紙張較內部的兩點重合，讓活動難以為繼。

第二、摺紙活動快速留下很多摺痕，摺痕增加後就會很難辨識，徒添解題的困難度，因此，我們建議教師安排摺紙教學時，宜小心安排活動的困難度以及所需摺紙動作的步驟數，儘可能要求學生每一次摺疊動作之後就要攤開紙張，然後，再執行下一個摺疊動作。至於學習者則宜多準備紙張，以方便摺紙活動的進行。

第三、摺紙動作雖然可以解決與圓有關的尺規作圖問題，但因為這方面的問題比較抽象，建議暫時不宜讓初學者處理此類問題。如果確實有需要處理這類問題，例如要找出圓的切線，建議可以先用圓規畫出一個圓形之後，再進行摺紙動作比較適合。

至於第四點最為重要，必須留意的是摺紙動作只能留下摺痕，而摺痕本質上是一條摺線，不是一個點，要得到一個點的話，則需要兩條摺痕相交才能夠產生一個點。因此，要提醒學習者的是，摺紙過程所看見的「結果」不是一定存在的。我們不妨再舉一個例子說明，假設學習者想要透過摺紙摺出一個正三角形，圖九呈現了部份的摺紙過程，左邊的圖是代表先將正方形紙對摺，得  $EF$  的摺痕線，中間的圖是將右上角的  $D$  點摺向  $EF$  的摺痕線上，直觀上或許會認為得到了  $G$  點，而且因為  $AD$  與  $AG$  重疊，利用  $EF$  摺痕線是對稱軸的性質，可推知三角形  $AGD$  即為所求。可是，這只是表面上的錯覺，因為當我們將重疊的部份張開，如圖九右圖所示，我們可以清楚看到該  $G$  點並不存在。也就是說，正三角形還沒有被摺出，所以，還需要其它摺疊步驟使之完成。



圖九

## 七、討論

本文介紹了六個基本摺紙動作，並且介紹了這些動作與尺規作圖之間的關係。此外，亦討論了教導這些摺紙動作應該留意的事項，以增加其學習的效果。讓學生透過學習摺紙動作，作為過渡到學習解尺規作圖問題的橋樑，是十分值得考量的方式，它起碼可以讓學習者在解尺規作圖題目時，多了一個思路方向的選擇，而且，即便是對於較為後段的學生，由於相較於尺規作圖而言，摺紙動作既直觀且有趣，所以，仍不失為很可以被接受的學習方式。另外，還有一個問題需要處理，透過摺紙學習尺規作圖時，似乎需要比一般學習方式多記憶一些摺紙動作的轉換，這是否會增加學生的認知負荷，從而造成學習上的困難？在陳宥良 (2009) 的研究中，他曾直接調查學習者的意見，他們認為將摺紙動作轉換成尺規作圖並不困難，並不需要刻意記憶摺紙動作轉換的作圖步驟。不過，參與陳宥良研究學生的人數並不多，還需要更深入的研究探討此一議題。

我們在陳宥良等人 (2009) 的文章中，曾報導兩道透過摺紙解決尺規作圖的題目，其中可以看出摺紙作圖可以既靈活且有創意解題的影子。基於摺紙作圖的直觀性，它非常可以鼓勵一題多解，初步的資料亦顯示其有效性，因此，我們推薦數學教師們參考，將它應用在尺規作圖課堂上配合教學。

## 參考文獻

- 陳宥良、譚克平、趙君培 (2009). 〈「摺摺」稱奇 — 從摺紙遊戲學習尺規作圖〉，《科學研習月刊》48-1 期：33-44。該文的堪誤表置於 <http://www.ntsec.gov.tw/m1.aspx?sNo=0001805&key=&ex=%20&ic=&cd=>。
- 陳宥良 (2009). 〈探討國中三年級學生透過摺紙活動進行尺規作圖補救教學之成效〉，國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文，未出版。
- Auckly, D., & Cleveland, J. (1995). "Totally real origami and impossible paper folding", *The American Mathematical Monthly* 102(3): 215-226.
- Coad, L. (2006). "Paper folding in the middle school classroom", *Australian Mathematics Teacher* 62(1): 6-13.
- Yates, R. C. (1949). *Geometrical tools: A mathematical sketch & model book*. Saint Louis: Educational Publishers.