輾轉相除法的連結

國立台灣師範大學數學系　黃文達

1 長方形的裁剪

利用輾轉相除法求兩個自然數 n 和 m 的計算過程可列之如下：

$$n = mq_0 + r_0$$
$$m = r_0 q_1 + r_1$$
$$r_0 = r_1 q_2 + r_2$$
$$.....................$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

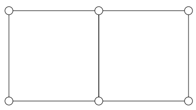
上面的計算過程，幾何上代表從矩形中裁減出最大正方形的過程，第一個式子，從一個 m×n 的矩形裁減出 m×m 的正方形共有 q_0 個，餘下 $n \times r_0$ 的小矩形，第二個式子，從 $n \times r_0$ 的矩形繼續裁剪出 $r_0 \times r_0$ 的正方形共有 q_1 個，餘下 $r_0 \times r_1$ 的小矩形，最後一個式子是說從 $r_{n-1} \times r_n$ 的小矩形可裁剪出 q_{n+1} 個邊長爲 r_n 的小矩形而無剩餘。

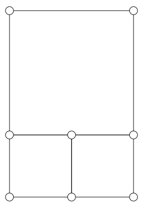
將輾轉相除法的剪裁模式，應用到一般的矩形，產生下面問題。

問題：將一個長方形剪成正方形，何種長方形有限次可做完？
何種長方形永遠也無法完工？

結果非常簡單，當長寬比爲有理數時有限次可做完，當長寬比爲無理數時永遠也無法完工。如果把剪裁的方式稍微加以限制，每次是直的剪一次，橫的方向再剪一次，如此橫切直割交替進行，提出下面問題

問題：如果要求橫切直割交替進行，何種長方形有限次可做完？
何種長方形永遠也無法完工？





由黃金矩形的定義我們發現，從黃金矩形減去一個最大正方形後，仍剩下一個黃金矩形，這種切割可以無限制進行下去，我們想要知道，是否存在某個矩形？，祇能做有限次這種切割。

我們從另外一個角度來看，先給定一個單位正方形 R_0，在右方加上同樣大的正方形 I_1，得到矩形 R_1，再從 R_1 上方加上一個正形 I_1，構成一個新矩形，按照這種方式可以得到一序列的矩形 $R_1, R_2, ..., R_n, ...$，這些矩形的長與寬有何特別的關係？

令矩形 R_n 的長與寬分別爲 a_{n+1} 及 a_n，則

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 且 $a_0=a_1=1$

這種數列正是 Fibonacci 數列，利用正方形的拼舖或矩形的切割可導出有關 Fibonacci(費氏)數列的一些重要性質。

2.輾轉相除表的探討

計算 m 和 n 的最大公因數時，使用長除法的次數，稱爲輾轉相除法的步數函數，記成 E(m,n)。顯然 E(m,n) 有下列基本性質：

1. $E(m,n)\geq 1$，但無上界;
2. $E(m,n)=E(n,m)$
3. 若 m 可整除 n，或 n 可整除 m，則 $E(m,n)=1$；
4. 當 $m>n$ 時 $E(.,n)$爲週期函數。

問題：對於指定的步數 k，什麼樣的自然數 m 與 n 可使 $E(m,n)=k$?

費氏數列是由 1，1 出發，接著是後項等於前兩項相加，如此所構成的數列。即

$f_0=1, f_1=1, f_2=2, f_3=3, f_4=5, f_5=8, f_6=13, f_7=21, f_8=34, f_9=55, f_{10}=89, \ldots$

因 $f_{n+1}=1\times f_n+f_{n-1}$

$f_n=1\times f_{n-1}+f_{n-2}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

$f_3=1\times f_2+f_1$

$f_2=2\times f_1$

一共做了 n 次運算，故 $E(f_{n+1}, f_n)=n$。

更進一步我們可以發現：在滿足 E（a,b）的所有兩自然數 a 和 b 中，以 f_{n+1} 和 f_n 爲最小。

主題:E(m,n)的上界

問題： 對於任給定的兩自然數 m 與 n，m>n，需要多少步數才可保
證可做完輾轉相除法?

結論：

對於任一兩自然數 m 與 n， m>n 恆有

$1 \le E(m,n) \le 5 \times$(n 的位數)

理由是 f_{n+5} 比 f_n 多一位數：

$$
\begin{aligned}
f_{n+5} &= f_{n+4}+f_{n+3} \\
&= 2f_{n+3}+f_{n+2} \\
&= 3f_{n+2}+2f_{n+1} \\
&= 5f_{n+1}+3f_n \\
&= 8f_n+5f_{n-1} \\
&= 13f_{n-1}+8_{n-2} \\
&> 10f_{n-1}+11f_{n-2} \\
&> 10f_n
\end{aligned}
$$

因此 f_{n+5} 比 f_n 多一位數，一般而言：$f_{n+5k} > 10^k f_n$，

若$K > 5\ell$,則$K \ge 5\ell+1 \Rightarrow n \ge f_k \ge f_{5\ell+1} \ge f_1 \cdot 10^{\ell} = 10^{\ell}$

這表示 n 至少有 l+1 位數。

問題： 自 1~1000 選出兩數，使得輾轉相除法所需的步數爲最多？

3 矩形分割成方形的個數

將給定一個邊長爲整數 m 及 n 之矩形，分割成邊長亦爲整數之正方形，這種分法有很多，譬如成將長 m 等分及將寬 n 等分，可得 mn 個單位正方形的分割，如果考慮每次分割都要分割出最大正方形，每次裁剪都取邊長爲寬長的正方形，利用轉輾相除法的原理的分割所分割出之正方形個數，記爲 F(m，n)，函數 F(m，n)之性質主要有:

1. F(m,n)=F(n,m)
2. F(mk,nk)=F(m,n)
3. F(1,n)=n, F(2,2n+1)=n+2, F(2,2n)=n
4. F(na+b,a)=F(a,b)+n
5. F(n,a)=F(n,n-a)
6. F(n+1,n)=n+1
7. F(m,n)≤mn。

將邊長爲整數 m 及 n 之矩形，分割成邊長爲整數之正方形，要求分割出的正方形個數爲最小，此時正方形的個數爲 f(m，n)。

有關函數 f(m，n)之性質如下:

1. $f(m,n)=f(n,m)$
2. $f(mk,nk)\le f(m,n)$
3. $f(1,n)=n$, $f(2,2n+1)=n+2$, $f(2,2n)=n$, $f(n,n)=1$
4. $f(a+b,n)\le f(a,n)+f(b,n)$
5. $f(k,kn)=n$

f(m,n)和 F(m,n)的關係，主要的性質有:

1. $f(m,n)\le F(m,n)$
2. 當 $\min\{m,n\}\le 4$ 時，$f(m,n)=F(m,n)$
3. 當 $n\ge 5$ 時，$f(n,n+1)<F(n,n+1)$
4. 當 $n\ge 10$ 時，$f(n,n+2)<F(n,n+2)$
5. 當 $n\ge 6$ 時，$f(n,kn\pm 1)<F(n,kn\pm 1)$，$k\ge 2$
6. 當 $n\ge 12$ 時，$f(n,kn\pm 2)<F(n,kn\pm 2)$，$k\ge 2$

問題: 試找出計算 f(m,n)之公式。

問題: 試找出 F(m,n)-f(m,n)之上界函數公式。

4. 完全正方形

正方形是每一個人都非常熟悉的圖形，其中卻隱藏了一個奇妙的“數學之謎”:

問題：用一些互不相等的小正方形，能夠拼出一個大正方形嗎？

在數學上這個大正方形稱之爲**完全正方形**，要作出一個完全正方形可不是一件容易的事。

1930 年蘇俄數學家魯金認爲這種完全正方形不存在。

1939 年 sprague 造出第一個完全正方形，它是由 55 個小正方形組成，邊長爲 4205 單位。

1939 年英國劍橋大學四個學生 Brooks, Smith, Stone, Tutteru.就曾經沈迷於此問題，花了一段很長的時間，最後在理論的指導下，找出了由 28 個小正方形組成的完全正方形，邊長爲 1015 單位。

1948 年 Wilvocks 造出一個由 24 個小正方形組成的完全正方形，邊長爲 175 單

位。至目前爲止已經出爐 2000 多個 24 階完全正方形。

1967 年 Wilvocks 造出一個由 25 個及 26 個小正方形組成的完全正方形。

1976 年荷蘭的數學家 Duijvestijn 更在電子計算機的幫助下，又發現一個由 21 個小正方形組成的完全正方形，邊長爲 112 單位。並且證明，它是由最少數目的小正方形組成的完全正方形。

完美正方形的研究並未到此結束，一方面，上面這一些結果的發現或證明都要藉助於電腦，導出這些結果的初等證明是非常有意義的。另一方面，人們還沒有發現究竟哪些正方形是完全正方形？或者說沒有給出一個判斷一個正方形是完全正方形的標準，比如說完全正方形的最小整數邊長是多少？對於哪些正整數 r 存在 r 階完全正方形？是否存在 22 階完全正方形？這些都有待人們繼續研究。

問題：哪些矩形可以分割成大小不等的正方形？

最早出土的矩形是：32×33 矩形可分割成成邊長依次爲 1,4,7,8,9,10,14,15,18 等九個正方形。Stone 想去證明不可能把給定正方形分割成不等的正方形，雖然並未成功，但卻發現另一個可用相異正方形分割的矩形，其邊長分別爲 176 和 177。

尋求可以用正方形分割的矩形的一個辦法，是先作一個分割成正方形的草圖，然後標出每個正方形的邊長，寫出這些正方形邊長滿足的關係式得這些正方形合成一個矩形，最後再解這個方程組。製作草圖有些基本原則：

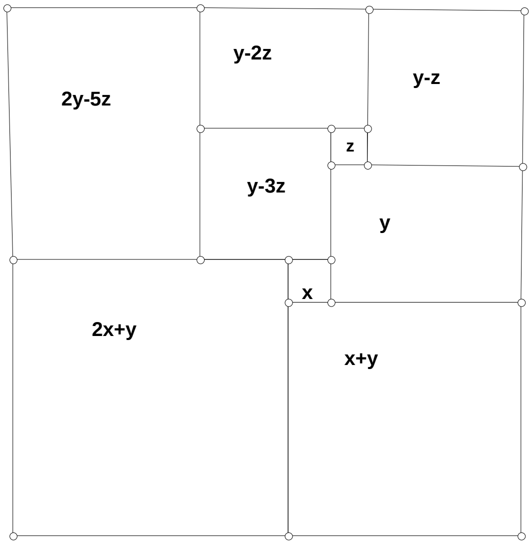
（1）最小正方形不能與原正方形的邊相鄰。

（2）最小正方形與原矩形相鄰的正方形中至少有一邊是平齊的。

底下我們舉一些例子來說明這個方法；

例一：如圖，給定三個正方形，其邊長分別爲 x,y,z，很容易依照下列順序標出其餘正方形的邊長爲

x+y，2x+y，y-z，y-2z，y-3z，2y-5z。



接著考慮水平邊長得知

$$2x+y+x+y=2y-5z+y-2z+y-z$$

即

$$3x-2y+8z=0$$

考慮垂直邊長得知

$$2y-5z+2x+y=y-z+y+x+y$$

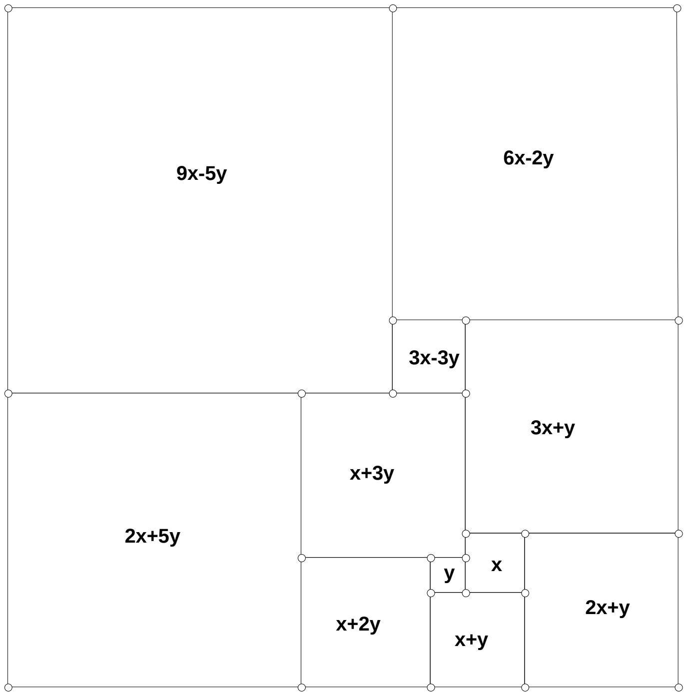
即

$$x-4z=0$$

因此 $x=4z$ 且 $y=10z$

令 $z=1$ 我們可得 33×32 可分割成相異正方形的矩形。

例二：：如圖，給定兩個正方形，其邊長分別爲 x,y，很容易依照下列順序標出其餘正方形的邊長，



接著考慮水平邊長得知

$$9x-5y+6x-2y=2x+5y+x+y+2x+y，$$

即 $9x-16y=0$

取 $x=16$，$y=9$，可得可以 Stone 分割的 176×177 的矩形。

深究問題：

由分割草圖給出的方程組是否一定有解？

問題：

用有限個大小不相等的立方塊能填滿一個長方體的盒子嗎？

對於這個盒子的任何一個成功的填充，位於底部的立方塊提供了一個底部矩形的一個正方形分割，在這些挨著底部的第一層立方塊中，最小的立方塊不可能放在靠邊處，否則將有一個更小的方塊挨著底部。因此最小的立方塊必擺在中間地帶。

此時此立方塊的四側被四面牆圍起來，爲了蓋住其上表面，必須用一個更小的方塊；在最小立方塊上側的第二層立方塊中的最小立方塊，再次出現在中間部位，且四周被較大的立方塊圍起來，於是一個更小的方塊出現在第三層。

這種推論將無休止的繼續下去，因此可知用有限個大小不相等的立方塊不能填滿一個長方體的盒子。

深究問題：

能否將一個等邊三角形分割成大小不相等的等邊三角形？