

小題大作：解題方法的連結

國立台灣師範大學數學系 黃文達

民國 72 大學聯考數學科有一道試題：

設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，試求 $\frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}$ 的最小值。

第 24 屆高中科展優勝作品 $\frac{p}{\cos \theta} + \frac{q}{\sin \theta}$ 的最小值之求法與推廣。作者提出不以三角函數微分求極值的完美解法，並推廣到一般結論。該文的主要內容：

1. 將 $\frac{p}{\cos \theta} + \frac{q}{\sin \theta}$ 化為座標平面的線段長，求最小長度。因此導出 $\frac{p}{\cos \theta} + \frac{q}{\sin \theta}$ 的最小值。

2. 由平面推廣到空間，設 $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}^+$ ，有一平面通過點 (x_0, y_0, z_0) 且與 x, y, z 軸在第一卦限的三個交點和原點決定一個長方體，求對角線的最小值。

利用這個結果將 $\frac{x_0}{\cos \alpha} + \frac{y_0}{\cos \beta} + \frac{z_0}{\cos \gamma}$ ， $(x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ 且 $\Sigma \alpha^2 = 1)$ 線段化，可求其最小值。

3. 將空間的結果再一般化，求 $\Sigma \frac{x_i}{\cos \alpha_i}$ ($x_i \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \Sigma \alpha_i^2 = 1, i=1 \dots n$) 最小值。

底下將這些結果進一步推廣，並與一些不等式做些連結。

連結 1：歌西不等式

歌西不等式： $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$

證明：

令 $A = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, B = \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, a'_i = \frac{a_i}{A}, b'_i = \frac{b_i}{B}$ 則有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i'^2 \right) = \frac{1}{A^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) = 1, \quad \left(\sum_{i=1}^n b_i'^2 \right) = \frac{1}{B^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = 1。$$

利用不等式 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 故有

$$a'_1 b'_1 \leq \frac{1}{2}(a_1'^2 + b_1'^2), \quad a'_2 b'_2 \leq \frac{1}{2}(a_2'^2 + b_2'^2), \dots, \quad a'_n b'_n \leq \frac{1}{2}(a_n'^2 + b_n'^2)$$

將這些不等式相加，即得。

例：設 a, b 為實數 θ 為銳角，試求 $\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta}$ 的最小值。

分析：

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \geq (\sqrt[3]{a} \sin \theta + \sqrt[3]{b} \cos \theta)^2$$

$$(\sqrt[3]{a} \sin \theta + \sqrt[3]{b} \cos \theta) \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \right) \geq (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^2$$

歌西不等式的推廣形式：

設 a_{ij} , $i=1, 2, 3, \dots, m; j=1, 2, 3, \dots, n$ 為正實數，則

$$(a_{11}^n + a_{21}^n + \dots + a_{m1}^n)(a_{12}^n + a_{22}^n + \dots + a_{m2}^n) \dots (a_{1n}^n + a_{2n}^n + \dots + a_{mn}^n)$$

$$\geq (a_{11}a_{12} \dots a_{1n} + a_{21}a_{22} \dots a_{2n} + \dots + a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn})^n$$

證明：設

$$a_{11}^n + a_{21}^n + \dots + a_{m1}^n = A_1^n$$

$$a_{12}^n + a_{22}^n + \dots + a_{m2}^n = A_2^n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}^n + a_{2n}^n + \dots + a_{mn}^n = A_n^n$$

於是僅需證明

$$A_1 A_2 \dots A_n \geq a_{11}a_{12} \dots a_{1n} + a_{21}a_{22} \dots a_{2n} + \dots + a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn}$$

即

$$\frac{a_{11}a_{12} \dots a_{1n}}{A_1 A_2 \dots A_n} + \frac{a_{21}a_{22} \dots a_{2n}}{A_1 A_2 \dots A_n} + \dots + \frac{a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn}}{A_1 A_2 \dots A_n} \leq 1$$

由算幾不等式知

$$\frac{a_{11}a_{12} \dots a_{1n}}{A_1 A_2 \dots A_n} \leq \frac{\frac{a_{11}^n}{A_1^n} + \frac{a_{12}^n}{A_2^n} + \dots + \frac{a_{1n}^n}{A_n^n}}{n}$$

$$\frac{a_{21}a_{22} \dots a_{2n}}{A_1 A_2 \dots A_n} \leq \frac{\frac{a_{21}^n}{A_1^n} + \frac{a_{22}^n}{A_2^n} + \dots + \frac{a_{2n}^n}{A_n^n}}{n}$$

.....

$$\frac{a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn}}{A_1 A_2 \dots A_n} \leq \frac{\frac{a_{m1}^n}{A_1^n} + \frac{a_{m2}^n}{A_2^n} + \dots + \frac{a_{mn}^n}{A_n^n}}{n}$$

將以上式子相加即得

$$\begin{aligned} & \frac{a_{11}a_{12}\dots a_{1n}}{A_1A_2\dots A_n} + \frac{a_{21}a_{22}\dots a_{2n}}{A_1A_2\dots A_n} + \dots + \frac{a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn}}{A_1A_2\dots A_n} \\ & \leq \frac{\frac{a_{11}^n + a_{21}^n + \dots + a_{m1}^n}{A_1^n} + \frac{a_{12}^n + a_{22}^n + \dots + a_{m2}^n}{A_2^n} + \dots + \frac{a_{1n}^n + a_{2n}^n + \dots + a_{mn}^n}{A_n^n}}{n} \\ & = \frac{n}{n} = 1 \end{aligned}$$

故得證

例：設 a, b 為實數 θ 為銳角，試求 $\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta}$ 的最小值

$$\begin{aligned} & (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \right) \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \right) \\ & = [(\sin^{\frac{2}{3}} \theta)^3 + (\cos^{\frac{2}{3}} \theta)^3] \left[\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 + \left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 \right] \left[\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 + \left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 \right] \\ & \geq (\sin^{\frac{2}{3}} \theta \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} + \cos^{\frac{2}{3}} \theta \cdot \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \cdot \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta})^3 \\ & = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^3 \end{aligned}$$

連結 2：算幾不等式

算幾不等式：

設 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 為 n 個正數，則稱

$$A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

分別為此 n 個正數的算術，幾何，和調和平均數。 A, G 之間有如下的關係式：

$$A \geq G$$

利用數學歸納法證明

當 $n=2$ 時 $A_2 \geq G_2$ ，假設 $n=k$ 時 $A_n \geq G_n$

則

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2k} [(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}] = \frac{1}{2k} [kA_k + a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[A_k + \frac{a_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \right] \geq \frac{1}{k} (G_k + \sqrt[k]{a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}}) \\ &= \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} A_{k+1}^{k-1}} \\ &\Rightarrow A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k-1} A_{k+1}^{k-1} \Rightarrow A_{k+1} \geq G_{k+1} \end{aligned}$$

例：設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，試求 $\frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}$ 的最小值。

證明：

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}\right)^2 &= (3\sec \theta + 2\csc \theta)^2 \\ &= 9\sec^2 \theta + 4\csc^2 \theta + 12\sec \theta \csc \theta \\ &= 9 + 9\tan^2 \theta + 4 + 4\cot^2 \theta + 12\tan \theta + 12\cot \theta \\ &= 13 + (9\tan^2 \theta + 6\cot \theta + 6\cot \theta) + (4\cot^2 \theta + 6\tan \theta + 6\tan \theta) \\ &\geq 13 + 3\sqrt{9\tan^2 \theta \cdot 6\cot \theta \cdot 6\cot \theta} + 3\sqrt{4\cot^2 \theta \cdot 6\tan \theta \cdot 6\tan \theta} \\ &= 13 + 3 \cdot \sqrt[3]{324} + 3 \cdot \sqrt[3]{144} \\ &= 13 + 9 \cdot \sqrt[3]{12} + 6 \cdot \sqrt[3]{18} \\ &= (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^2 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta} \geq \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}$$

且等號成立

$$\Leftrightarrow 9\tan^2 \theta = 6\cot \theta, 4\cot^2 \theta = 6\tan \theta$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 \theta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

連結 3：平方平均不等式

$$\text{對 } a>0, b>0 \text{ 有 } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

證明 1：

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2}{2} &= \frac{a^2+b^2+(a^2+b^2)}{4} \\ &\geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

證明 2

$$\text{只需證明 } \sqrt{\frac{a^2}{2a^2+2b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{2a^2+2b^2}} \leq 1 \quad \text{即可}$$

左式爲

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2}{2a^2+2b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{2a^2+2b^2}} &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

係數的推廣

對 $a_i > 0, k_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ ，及 $m, n \in N$ 證明若 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1$

則
$$\sqrt[m]{\frac{a_1^m}{k_1} + \frac{a_2^m}{k_2} + \dots + \frac{a_n^m}{k_n}} \geq \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} + \dots + \frac{a_n}{k_n}$$

證明： 只需證明
$$\sum_{i=1}^n \sqrt[m]{\frac{\frac{a_i^m}{k_i^m}}{\frac{a_1^m}{k_1} + \frac{a_2^m}{k_2} + \dots + \frac{a_n^m}{k_n}}} \leq 1 \text{ 即可}$$

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[m]{\frac{\frac{a_i^m}{k_i^m}}{\frac{a_1^m}{k_1} + \frac{a_2^m}{k_2} + \dots + \frac{a_n^m}{k_n}}} = \sqrt[m]{\frac{\frac{a_i^m}{k_i}}{\frac{a_1^m}{k_1} + \frac{a_2^m}{k_2} + \dots + \frac{a_n^m}{k_n}} \cdot \frac{1}{k_i} \cdot \frac{1}{k_i} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k_i}}$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\frac{a_i^m}{k_i}}{\frac{a_1^m}{k_1} + \frac{a_2^m}{k_2} + \dots + \frac{a_n^m}{k_n}} + \frac{m-1}{k_i} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\frac{a_i^m}{k_i}}{\frac{a_1^m}{k_1} + \frac{a_2^m}{k_2} + \dots + \frac{a_n^m}{k_n}} + \sum_{i=1}^n \frac{m-1}{k_i} \right) \\ &= \frac{1}{m} [1 + (m-1)] = 1 \end{aligned}$$

例 4：對 $a > 0, b > 0, k \in N, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ 有

$$\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x} + \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x} \geq (a+b)^{\frac{k+2}{2}}$$

等號成立之條件為 $x = \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{b}}$

證：需證
$$\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\left(\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x} + \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}} + \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\left(\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x} + \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}} \leq 1 \text{ 即可。}$$

令 $A = \frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x}, B = \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}$ 則

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{\left(\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x} + \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}} + \frac{b}{\left(\frac{a^{\frac{k+2}{2}}}{\sin^k x} + \frac{b^{\frac{k+2}{2}}}{\cos^k x}\right)^{\frac{2}{k+2}}} \\
&= {}^{k+2}\sqrt{\frac{A}{A+B} \cdot \frac{A}{A+B} \cdot \sin^2 x \cdots \sin^2 x} + {}^{k+2}\sqrt{\frac{B}{A+B} \cdot \frac{B}{A+B} \cdot \cos^2 x \cdots \cos^2 x} \\
&\leq \frac{1}{k+2} \left(\frac{2A}{A+B} + k \sin^2 x \right) + \frac{1}{k+2} \left(\frac{2B}{A+B} + k \cos^2 x \right) = 1
\end{aligned}$$

例：對 $a>0, b>0, k \in N, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ 有

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin x} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cos x} \geq (a+b)^{\frac{3}{2}}$$

等號成立之條件為 $x = \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{b}}$

證：需證 $\frac{a}{\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin x} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{b}{\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin x} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}} \leq 1$ 即可。

令 $A = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin x}, B = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cos x}$ 則

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin x} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{b}{\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin x} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\cos x}\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= {}^3\sqrt{\frac{A}{A+B} \cdot \frac{A}{A+B} \cdot \sin^2 x \cdot \sin^2 x} + {}^3\sqrt{\frac{B}{A+B} \cdot \frac{B}{A+B} \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x} \\
&\leq \frac{1}{3} \left(\frac{2A}{A+B} + \sin^2 x \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2B}{A+B} + \cos^2 x \right) = 1
\end{aligned}$$

最後我們提出兩個可以小題大作延伸的題目，供有興趣的同學加以發揮：

1. 大學聯考題目：設方程式 $x^4 + x^3 + bx^2 + cx + 10 = 0$ 有相異四個有理根，試求其最大根

2. 台北市 89 學年度國中盃數學能力競賽試題：

設 n 是正整數，且 $6n^2 - 65n + 171$ 是連續兩個正整數的乘積，則 n 之值為何？