「摺紙」：沒有算式的數學

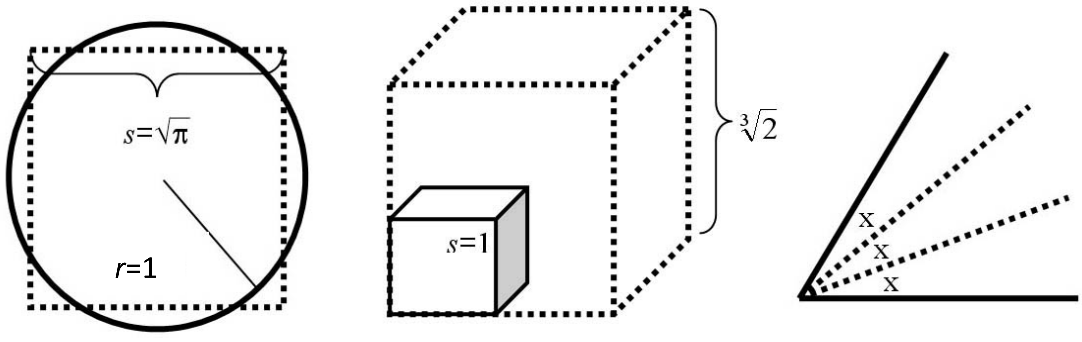
劉柏宏

數學的本質究竟爲何，難一言以蔽之。但以其形成脈絡而言，數學可以說就是利用符號與運算的外顯操作 **(extrinsic implementation)**，並藉助歸納、邏輯等內在思維 **(intrinsic thought)** 以探究「數」、「量」、「形」與「空間」等模式的一套系統知識。而摺紙這門傳統手工技藝雖能展現「形」與「空間」的模式，但既缺乏探究數量關係的基礎，也無符號運算的操作過程，如何登上數學這座嚴謹的學術殿堂？不過，隨著近年對於「摺紙數學」的研究熱潮，摺紙已逐漸從工藝層面解放出來，開始展現其跨界的企圖。而要瞭解摺紙的數學內涵，我們就得先從古希臘三大幾何作圖難題談起。

一、古希臘三大幾何難題

大約西元前 **387** 年柏拉圖於希臘雅典設立哲學學院時，即訂定「**對幾何無知者，禁入此地**」**(Let no one ignorant of geometry enter here)** 的門檻。西元前 **300** 年左右，亞歷山卓學派的歐幾里得，更對探詢學習幾何捷徑的托勒密國王直言：「**幾何之道，無王者之路**」**(There is no royal road to geometry)**。這兩句話突顯出幾何在當時古希臘社會的雙重角色，一是神聖的，是通往最高真理的途徑；一是庶民的，無論尊卑貴賤，其入門基準點都相等。就是在這種「自卑得以登高」的學習氛圍之下，幾何從解決土地測量問題的一種實用工具，逐漸進階成探索抽象世界的一種智識樂趣，因此，古希臘三大幾何作圖難題於焉而生。

所謂古希臘三大幾何作圖難題，分別是「化圓爲方」、「倍立方體」和、「三等分角」，這三個問題的共同限制是作圖時，只能使用圓規和沒有刻度的直尺。「化圓爲方」問題是給定一個已知面積的圓，如何作出一個正方形，使這正方形面積和已知圓的面積相等；「倍立方體」問題要求作出一個正立方體使其體積爲另一個已知正立方體體積的兩倍；「三等分角」問題求問如何三等分任意已知角。幾何學是古希臘數學的主流和基礎，而三大幾何作圖難題其題目敘述的簡單性和解法的挑戰性，無疑吸引無數數學家競相投入。這其間雖然有一些近似解法出現，但或多或少都與遊戲規則相牴觸，所以，一直懸而未解，因而成爲古希臘幾何著名的三個不可能。



圖一(***a***)　圖一(***b***)　圖一(***c***)

古希臘數學家求解三大幾何作圖難題時所面臨的困境，在於既無法找出作圖方法，

也無法依當時的幾何公理系統證明其不可能性。就有如哥德爾不完備定理所說，一個符合內部一致的 **(consistent)** 公理化系統，一定是不完備的 **(incomplete)**，也就是系統內必存在一個命題，無法被系統內自身的命題證明或證否，而必須引進另一公理化系統。因此，這三大難題一直到十九世紀，透過代數方法才被證明爲不可能。

三大幾何作圖難題與代數究竟有何關係？對於「化圓爲方」問題，如圖一**(*a*)**所示，假設已知圓的半徑爲 **1**，其面積爲**π**。要解開「化圓爲方」問題就必須以尺規作出一條長爲$\sqrt{\pi}$的線段以做爲正方形之邊長，也就是求出方程式$x^2-\pi=0$的解。而「倍立方體」問題**(**如圖一**(*b*))**就須作出一條長爲$\sqrt[3]{2}$的線段以做爲立方體之邊長，也就是求出方程式$x^3-2=0$的解。那「三等分角」問題呢？假設要三等分一已知角度$\boldsymbol{\theta}$，$\mathbf{0<\theta<\pi/2}$，則$\cos\theta$爲已知，令$\cos\theta=\alpha$。若$\boldsymbol{\theta}$能夠被三等分，也就表示能求出$\boldsymbol{\theta/3}$和$\cos(\theta/3)$之值。如果令$x=\cos(\theta/3)$，根據公式

$$\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$$

我們可以得到方程式$4x^3-3x-\alpha=0$。如果能解得出$x=\cos(\theta/3)$，也就能求出$\boldsymbol{\theta/3}$，因此就能三等分已知角度$\boldsymbol{\theta}$。

透過代數技術的轉化，三大幾何難題到了十九世紀有了重大的轉機。一位法國數學家 **Pierre L. Wantzel** 在 **1837** 年發表一篇標題爲〈***幾何問題能否以尺規作圖求解的做法研究***〉**(Research on the Means of Knowing If a Geometry Problem Can Be Solved with Compass and Straightedge)** 的論文中證明：「***所有問題若化約到一個次數並非為*** 2^n ***的方程式，且此方程式在有理數中不可分解，則無法以尺規作圖求解***」。而由於「倍立方體」中的$x^3-2=0$和「三等分角」的$4x^3-3x-\alpha=0$在有理數中均不可分解，因此，「倍立方體」和「三等分角」都無法以尺規作圖解決。令人驚訝的是，**Wantzel** 只以短短七頁的篇幅，解決困擾人類兩千多年的兩大懸案。難怪他在論文中掩不住喜悅地表示：「***似乎從來沒有人能嚴格地證明這幾個古代著名的問題，沒有辦法以所要求的幾何作圖的方式解決***」。

至於「化圓爲方」的問題則又熬了 **45** 年後，一位德國數學家 **Carl L. F. von Lindemann** 證明 $\boldsymbol{\pi}$ 是個超越數 **(transcendental number)**，因此無法以尺規作圖畫出。什麼是超越數呢？首先，我們先介紹何謂代數數 **(algebraic numbers)**，代數數是指一數 ***a*(**可以爲複數**)**若爲某一有理係數方程式的根，則稱 ***a*** 爲一代數數。例如$\sqrt[3]{2}$和 **1+i** 分別爲$x^3-2=0$和$x^2-2x+2=0$的根，所以都是代數數。而超越數指的就是所有的非代數數。法國數學家 **Joseph Liouville** 於 **1844** 年證明超越數的存在，**1873** 年另一位法國數學家 **Charles Hermite** 證明$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$是個超越數。而在 **Hermite** 的基礎之上，**Lindemann** 先證明「***若一個不等於零的數 a 是個代數數，則*** e^a ***是個超越數***」。當 $\boldsymbol{a=i\pi}$ 時，因爲$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$並非超越數，所以，由等價的逆轉命題可以得知 $\boldsymbol{i\pi}$ 不是代

數數，換句話說 π 也不是。古希臘三大幾何作圖難題從此被歸類爲數學中不可能的任務。

二、摺紙數學公設

摺紙藝術雖然最早起源於中國，不過，傳到日本後才被發揚光大。一開始是做爲日本神道祭祀之用，摺紙技藝由寺廟僧侶代代相傳，其中在 **1797** 年發行的《秘傳千羽鶴折形》，是目前已知傳世最古老的摺紙專書。後來，在二十世紀前葉，日人吉澤章 **(Akira Yoshizawa, 1911-2005)** 進一步將摺紙藝術發揚光大。他的作品不算複雜，卻饒富創意與趣味，因此摺紙的英文詞彙 **Origami** 就是由日文「折り紙」一詞音譯而來。

提到摺紙與數學的連結，仍須歸功於日本人。日裔義大利人藤田文章 **(Humiaki Huzita)** 於 **1991** 年在 **First International Conference on Origami in Education and Therapy** 中，提出下列著名的六個摺紙數學公設：

公設 1. 給定任意兩點 p_1 和 p_2，唯一存在一條通過這兩點的摺線。

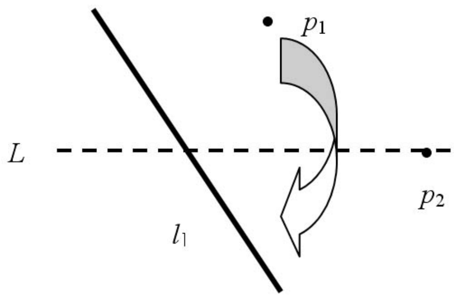
公設 2. 給定任意兩點 p_1 和 p_2，唯一存在一條摺線使得 p_1 和 p_2 重合。

公設 3. 給定任意兩條直線 l_1 和 l_2，存在一條摺線使得 l_1 和 l_2 重合。

公設 4. 給定任意一點 p_1 和直線 l_1，唯一存在一條摺線與 l_1 垂直且通過 p_1。

公設 5. 給定任意兩點 p_1，p_2 和直線 l_1，存在一條摺線使得 p_1 在直線 l_1 上且摺線通過 p_2。

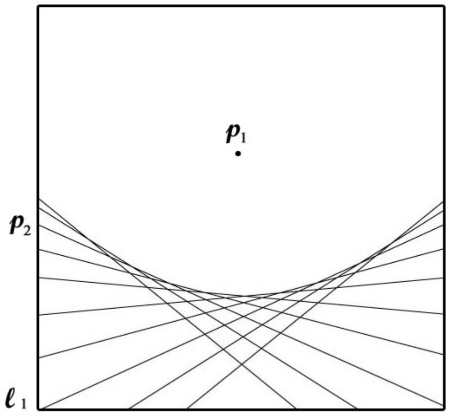
公設 6. 給定任意兩點 p_1，p_2 和兩直線 l_1 和 l_2，存在一條摺線使得 p_1 在直線 l_1 上，且 p_2 在直線 l_2 上。



圖二

這六個公設都可以和尺規作圖的步驟相對應。例如，公設 **1** 就是以直尺做出直線；公設 **2** 就是作出 p_1 和 p_2 兩點間連接線段的中垂線；公設 **3** 是畫出角平分線；公設 **4** 是通過線上或線外一點作垂線。而公設 **5** 相當於求作一直線 **L** 過 p_2，且 p_1 對稱於 **L** 的對稱點 p_3 恰在 l_1 上。如圖案所示，就尺規作圖而言，這問題可能是無解 **(**當 p_1 和 p_2 距離小於 p_2 和直線 l_1 的距離時**)**，或是有 **1** 個解 **(**當 p_1 和 p_2 距離等於 p_2 和直線 l_1 的距離時**)**或 **2** 個解 **(**當 p_1 和 p_2 距離大於 p_2 和直線 l_1 的距離時**)**。值得注意的是，假使在一張正方形的紙上我們把正方形的底邊當做 l_1，p_2 在正方形左右兩邊上下移動，則所有摺線會形成以 p_1 爲焦點，l_1 爲準線之拋物線的包絡線 **(envelope**，圖三**)**。所以，公設 **5** 也等價於解二

次方程式。



圖三

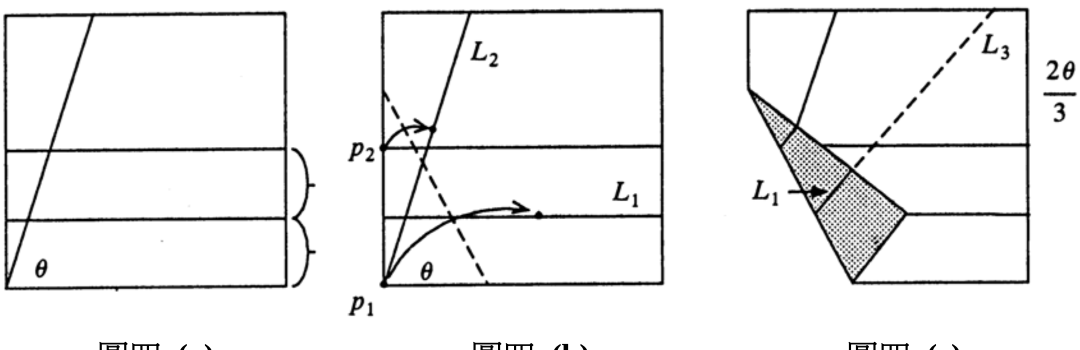
基於上述理由，公設 **6** 即等同於找出分別以 $\mathbf{p_1}$ 和 $\mathbf{p_2}$ 為焦點，l_1 和 l_2 為準線的兩拋物線的公切線，等價於解三次方程式，而這正是只能解二次方程式的尺規作圖所做不到的。後來，另一位日本人羽鳥公士郎 **(Koshiro Hatori)** 於 **2001** 年進一步提出第七個公設：

公設 7. 給定任意一點 p 和兩直線 l_1 和 l_2，存在一條摺線使得 p 和直線 l_1 重合且與直線 l_2 垂直。

美國人 **Robert Lang** 以及法國人 **Jacques Justin** 也都分別發現第七公設，而且 **Lang** 更進一步證明了這七個公設構成數學摺紙的完備系統，換句話說，任何摺紙作圖問題都能利用這七個公設完成。

三、摺紙數學解三大幾何作圖難題

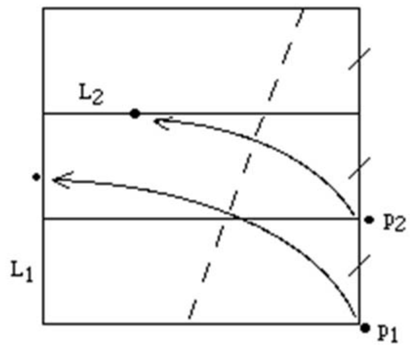
正由於摺紙數學可以涵括所有尺規作圖的動作，且擁有更多的自由度，因此，摺紙可以解決某些歐幾里得幾何系統中無法解出的作圖難題。例如「三等分角」問題就可以透過摺紙解決。在此，首先介紹在 **1970** 年代由日本人阿部恆 **(Hisashi Abe)** 所發明三等分角的摺紙方法 **(Hall, 1996；2003)**。



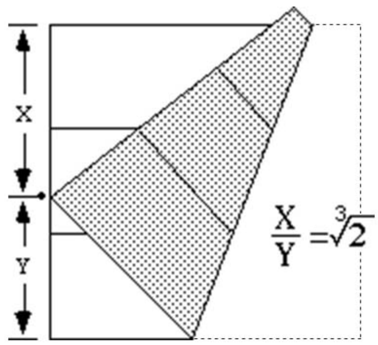
圖四 **(a)**　　圖四 **(b)**　　圖四 **(c)**

如圖四 **(a)**，假設所要三等分的角度θ位於正方形左下角。首先做出兩條平行且等距

的摺線後，如圖四(b)，根據公設 **6**，我們可以做出一摺線使得 $\mathbf{p_1}$ 在 $\mathbf{L_1}$ 上且 $\mathbf{p_2}$ 在 $\mathbf{L_2}$ 上。我們延伸紙背上的 $\mathbf{L_1}$ (如圖四(c)) 做出直線 $\mathbf{L_3}$，紙張攤平後將 $\mathbf{L_3}$ 往左下角延伸，一定會與點 $\mathbf{p_1}$ 相交，則 $\mathbf{L_3}$ 與紙張底線所成的角度為 $\mathbf{2\theta/3}$。最後再依據公設 **3** 摺出角平分線即大功告成。沒想到曾引起無數英雄競折腰的「三等分角」問題竟然只需寥寥數個手指工夫就飛灰煙滅！至於「倍立方體」問題的摺紙作法則更為簡潔。先將一正方形紙張摺出兩條平行線使之將正方形紙張三等份。根據公設 **6** 我們做出一條摺線使得 $\mathbf{p_1}$ 在直線 $\mathbf{L_1}$ 上，且 $\mathbf{p_2}$ 在直線 $\mathbf{L_2}$ 上(圖五(a))。然後在直線 $\mathbf{L_1}$ 上，以 $\mathbf{p_1}$ 為分段點，分別標示 ***X*** 與 ***Y***，則 $X/Y=\sqrt[3]{2}$ 。據說「倍立方體」問題是古希臘神祇為懲罰不敬的雅典居民所出的難題。古希臘數學家萬萬也想不到這神聖的使命，竟在彈指間被摺紙數學所救贖。

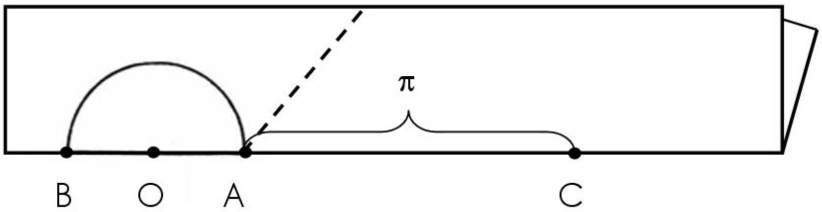


圖五 (***a***)



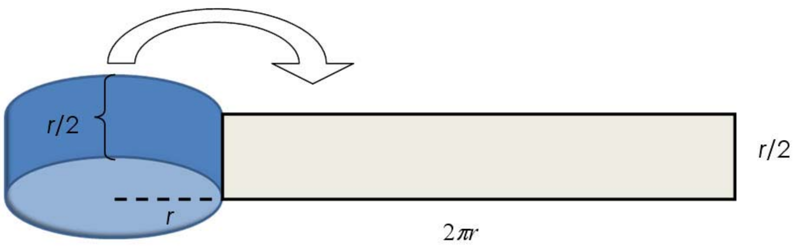
圖五 (***b***)

關於最後一個「化圓為方」問題，由於$\boldsymbol{\pi}$是個超越數，無法以尺規作圖建構出來，但我們只要能以摺紙建構出$\boldsymbol{\pi}$，那$\sqrt{\pi}$ 也即迎刃而解。理論上雖然可能，但技術上來說要以摺紙建構 $\boldsymbol{\pi}$ 確實有相當難度。一般摺紙痕跡都是直線，而要摺出 $\boldsymbol{\pi}$ 必須依賴「曲摺」，也就是彎曲摺線。必須一提的是，曲摺在摺紙數學中仍未有明確定義 **(well-defined)**，也因此存在某些爭議。本文將數學名家 **Thomas Hull (2007)** 的摺紙做法稍做修改以饗讀者。有興趣的話可以進一步參閱 **Hull** 的文章。如圖六，假設在一長方型紙條上給定一個半徑等於 **1** 的圓，其圓心為 **O**。將此圓對折，使圓心 **O** 在折線上，圓之右端點為 **A**，左端點為 **B**。為了方便將紙張彎曲，從 **A** 點做一 **45** 度角(或更小)的摺線，將紙張下緣邊線從 **O** 點處往內推摺後，再將長紙條沿著半圓圓周摺成類似圓錐狀。這時將紙條右邊下緣邊線慢慢沿著半圓周與之貼齊，直到下緣邊線某點與 **B** 點重合(這是最困難的步驟)，並將此點標記為 **C**，則 **AC** 之長即等於半圓圓周$\boldsymbol{\pi}$。

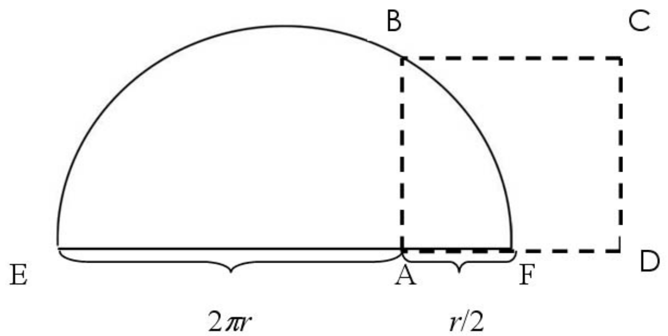


圖六

Hull 的方法其實沒什麼特殊技巧，只是需要做些苦工，而且若手法不夠俐落，誤差可能相當大，所以，從嚴謹的數學角度而言還是有瑕疵。事實上，早在十六世紀文藝復興時期，達文西就曾提出一個「化圓爲方」的作法，而且「幾乎」是以尺規作圖的方式完成。假設所給定的已知圓半徑爲 r，達文西取一個半徑爲 r，高爲 $r/2$ 的圓柱體，將圓柱體在平面上滾動一圈形成一長爲 $2\pi r$，寬爲 $r/2$ 的長方形 **(**圖七**)**。此長方型面積與所給定的圓面積相等。接著做一長爲 $2\pi r+r/2$ 的線段 **EF**，其中一點 **A** 將 **EF** 分割爲 $2\pi r$ 和 $r/2$ 兩段。以 **EF** 爲直徑做一半圓 **(**圖八**)**，從 **A** 點往上作一垂線交半圓圓周於 **B** 點。最後以 **AB** 之長爲邊長，所做出之正方形 **ABCD** 之面積等於上述長方型面積，因此也等於已知圓的面積，「化圓爲方」也就解決了。



圖七



圖八

四、摺紙數學的未來

所謂「*形而上者謂之道，形而下者謂之器*」。摺紙數學所帶給人們的啓發是，被古希臘數學與哲學家祀奉爲窮究宇宙形而上真理之道的幾何難題，在兩千多年後卻被源起於民間形而下技藝的摺紙之器所克服。這或許可以理解爲何日本將摺紙技藝做爲神道祭祀之用，不輕易外傳。只是即使有藤田－羽鳥公設系統做支撐，由於摺紙數學的經驗性太強，堅持數學嚴謹體系的守門員，可能仍無法准許摺紙數學從此踏進數學殿堂之門。然而，我們也必須注意到哲學思想之「道」與觀察實驗之「器」的結合，一直是近代西方科學發展的模式，而這也是一些摺紙數學名家所堅持的想法。例如，目前試圖將摺紙更進一步數學化的文章，有 **Robert Lang** 的 **"Origami and Geometric Constructions" (Lang, 2003)** 和 **Roger C. Alperin** 的 **"A mathematical theory of origami**

constructions and numbers" (Alperin, 2000)。前者致力於摺紙數學的代數化，而後者更將摺紙數學的性質抽象化到複數平面上。縱使由於一些技術上的困難和嚴謹度的瑕疵，使得摺紙數學爲傳統數學接受的程度不高，不過，從藤田文章所提出的六個公設起算，摺紙數學的發展僅僅不到二十年的光景。雖然「萬山不許一溪奔」，摺紙數學的未來仍面臨許多挑戰，但以它能輕易解決古希臘幾何三大難題的包容度看來，它總有一天能夠「堂堂溪水出前村」，跳脫出技藝與遊戲的範疇，替這沒有算式的數學開闢出一番新天地。

參考資料

李國偉 **(2008).**《摺紙與幾何作圖》，《科學人》？？。

康明昌 **(1984).**〈幾個有名的數學問題 **(**二**)**：古希臘幾何三大問題 **(**上**)**〉,《數學傳播》**8(2): 2-8**。

康明昌 **(1984).**〈幾個有名的數學問題 **(**二**):**古希臘幾何三大問題 **(**下**)**〉,《數學傳播》**8(3): 2-9**。

Alperin, R.C. (2000). "A mathematical theory of origami construction", *New York Journal of Mathematics* 6: 119-133.

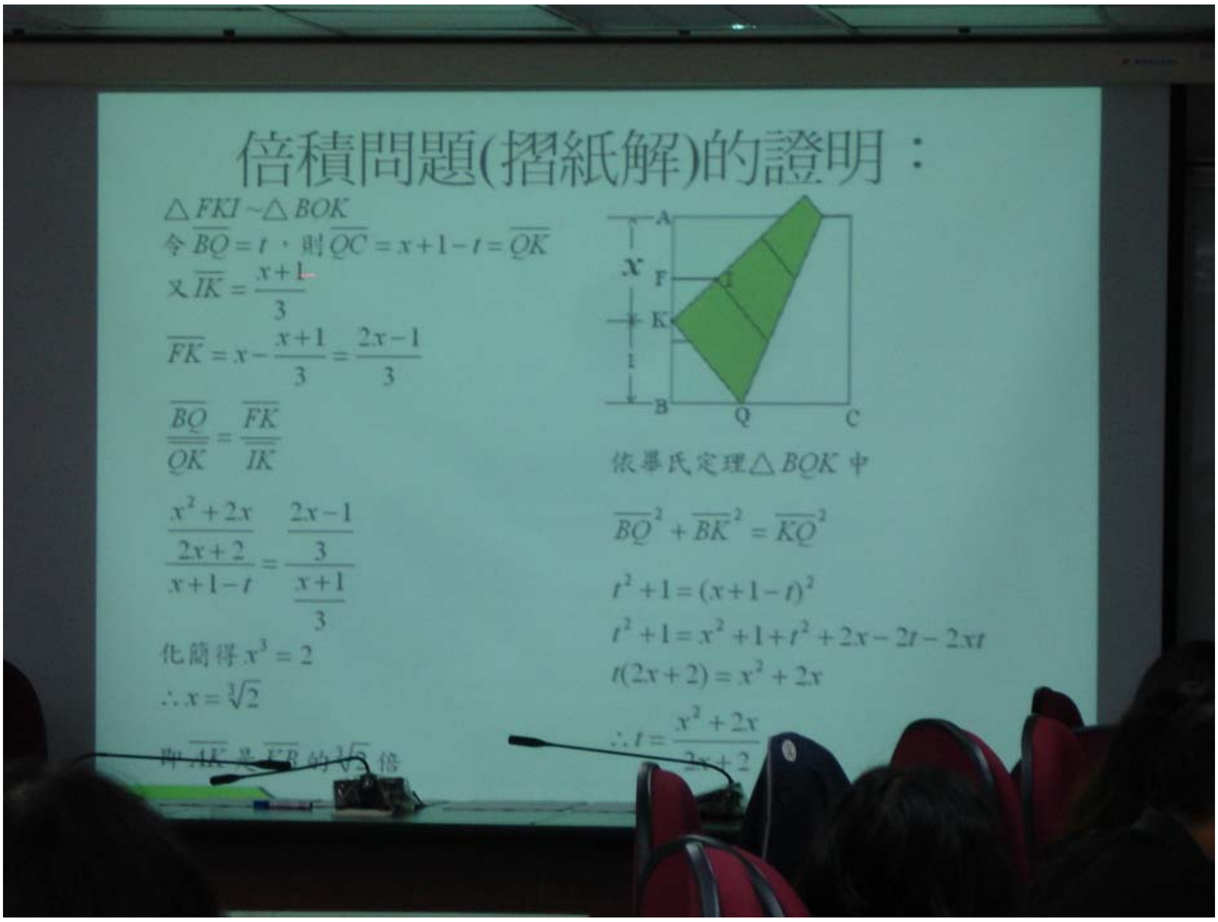
Hull, T. (1996). "A note on "impossible" paper folding", *American Mathematics Monthly* 103: 240-241.

Hull, T. (2007). Constructing π via origami. http://kahuna.merrimack.edu/~thull/papers/constpi.pdf.

Hull, T. (2003). Origami and Geometric Constructions. http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html.

Lang, R. (2003). Origami and Geometric Constructions http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf.

Suzuki, J. (2008). A brief history of impossibility. *Mathematics Magazine*, *81*(1), 27-38.



1986 年 Peter Messer 的解法 (From Problem 1054, in *Crux Mathematicorum*, Vol. 12,

No. 10, 1986, pp. 284-285.)