從歐幾里得到高斯：
傳承 **2000** 年的正多邊形宴席料理

黃俊瑋

I 從歐幾里得到高斯

「不懂幾何者，不准進入柏拉圖的學園。」**(Let no one ignorant of geometry enter here!)** 正是幾何學 **(**數學**)** 的力量，幫助我們的靈魂昇華，不受事物表象所矇蔽，跳脫變化無常的幻海，進入理想世界，看清不變的本質與真理。正是數學知識的確定性，使得數學家們不斷地開疆闢土、創新扉頁之際，**2000**多年來數學巨塔依然屹立不墜。正是數學知識的應用性和數學家的洞見與連結，看似乾涸枯竭的絕望之後，總是蘊藏著新的泉源、新的礦脈。

公元前**300**年，希臘人們崇尚理性的力量，定居在亞歷山卓城的歐幾里得系統化地組織、彙整了當代的重要數學成果，以**23**個定義 **(definition)**、**5**個設準 **(postulate)**、及**5**個公理 **(common notion**，或譯爲共有概念**)**作爲發展幾何料理的基本食材，並以嚴密的演繹方法作爲主要工具，烹煮出一道又一道著名的數學佳餚，最終完成了《幾何原本》一書，不僅成爲希臘數學的典範，其內容與形式也對往後西方數學與科學的發展，產生了重要而深遠的影響力。

《幾何原本》原書名爲 ***The Elements***，雖然書名當中的「幾何」二字爲後來譯者徐光啓翻譯過程中所加，然也足見此書中幾何知識的重要性。本書內容涵蓋了平面幾何與立體幾何的相關命題 **(proposition)**，而這諸多命題之中，除了各種定性的幾何性質之外，另外，也有許多的命題內容主要探討尺規作圖（或幾何作圖 **(geometric construction)**）之相關問題，對於愛好思考、喜歡數學或者熱愛幾何作圖的人而言，而這就像一本攤在面前的精美食譜一般，除了陳列出引動人們味蕾的佳餚 **(**各式各樣的幾何作圖命題**)** 之外，同時歐大師也謹循著演繹的規範，在過程當中一步接著一步地加入定義、設準、公理，以及利用早已完成的命題等等食材，有條有理地完成這些幾何圖形的建構。而歐幾里得的作圖題正如證明題一樣，不但都稱爲命題，而且都必須經過嚴密的證明 **(**洪萬生，**2009)**。在這諸多作圖題之中，一個重要而具有發展性的問題，便是關於正多邊形的作圖方法。

在《幾何原本》的脈絡之中，歐大師順利解決了正**3**角形、正**4**、正**5**、正**6**、正**8**、正**10**、正**12**、正**15**邊形等的作圖問題。然而，當數學家想藉以挑戰正**7**邊形、正**9**邊形、正**11**邊形或者正**17**邊形等作圖問題時，卻面臨了新的挑戰。**2000**年來數學之火依舊旺盛地燃燒，然而，在正多邊形的尺規作圖上，數學家們卻始終端不出令人滿意的新料理，直到年輕的高斯 **(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)** 在數學的大舞台上展露了頭角。高斯生於德國的布倫茲維克城 **(Brunswick)**，他不

只是數學家，更是著名的天文學家、物理學家，在其涉獵的各個域都有相當突出的表現。然而，就在十九歲那年，當他證明了正**17** 邊形可以尺規作圖之後，便在數學史上奠立了不朽的功績，也注定了他將會名留青史，最終成爲十九世紀最偉大的數學家。值得一提的是，他的方法除了解決正**17**邊形這個特例子外，還能更進一步地加以推廣。以下，我們將從歐幾里得《幾何原本》之中的第一個命題：正三角形尺規作圖，乃至高斯完成正**17**邊形尺規作圖這之間的相關進展，作一簡要的回顧與說明。

II 歐幾里得的私房菜

II. 1 跨越 3 到 5 的一小步，是《幾何原本》的一大步

利用 **(**沒有刻度的**)** 直尺與圓規，在有限步驟之中作出正多邊，是自古希臘以來，數學家們竭力探討的重要問題之一，歐幾里得在編寫《幾何原本》的過程當中，在第**I**冊的第**1**個命題之中，開門見山地給出了正三角形的作圖方法，足見尺規作圖在本書脈絡之中，所具之重要性與不可或缺的必要性。殺雞不需牛刀！只需簡單地運用最初所給出的定義、設準以及公理，歐大師證明了正三角形的作圖方法。在所有正**n**邊形的作圖之中，**n = 3** 的情況可說是在不費吹灰之力的情況下就被解決了，然而，我們是否可以就此鬆一口氣，大膽而放心地宣告依此類推呢？問題的答案很明顯，當**n = 4**時，正四邊形的作圖必需等到進入第**I**冊的尾聲，也就是在第**46**個命題時才出現。一切也意味著，這個從 **n = 3**到 **n = 4**的推廣，一點也不顯然同時也不直接。跨越這小小的一步之論證所需之支撐，竟然包含第**I**冊的命題**1**，**2**，**3**，**4**，**5**，**7**，**8**，**10**，**11**，**13**，**15**，**16**，**18**，**20**，**22**，**23**，**26**，**27**，**29**，**31** 和 **34**，共計二十一個之多 **(**洪萬生，**2009)**。

更進一步地，也許你會繼續問下去，那正五邊形的作圖呢？倘若你拿起《幾何原本》不斷地翻頁，你將會發現，必須翻至第**IV**冊的第**11**個命題時，正**5**邊形尺規作圖的方法才終於現形。同時，我們若要想在《幾何原本》的脈絡中嚴格地證明正**5**邊形的尺規作圖，那麼，所需之命題最少四十個 **(**洪萬生，**2009)**。不過，歐幾里得終究還是跨過這一步，巧妙地引入外接圓的協助，終於順利地將正**5**邊形作圖這道美味佳餚端上桌，以供大家品嘗留香。接下來，也許大家會好奇，想知道還有那些正多邊形是我們可以利用尺規作圖作出來的呢？正**6**邊形呢？正**7**邊形呢？正**8**邊形呢？又或者有沒有什麼一般性的方法，一次可以解決很多正多邊形的作圖問題呢？

II. 2 更一般性的推廣

這裡，我們再提供兩個較爲一般性的方法，可以用來解決一大類的正多邊形作圖問題。第一個方法：如果我們會作出正 **n** 邊形，那麼就能做出正 **2n** 邊形，在類推之後，我們就能作出所有的正$n \cdot 2^m$形。第二個方法：如果我們可以作出

正 **a** 邊形與正 **b** 邊形，而且 **a** 又與 **b** 互質，則我們可以作出正 **a·b** 邊形。以下，我們提出一些簡單的說明。

首先，只要我們應用《幾何原本》第 **III** 冊中關於如何將一個圓弧二等分的命題 **30**，一旦有了正 **4** 邊形的作圖方法之後，歐幾里得就不難作出所有的正2^m形，其中的 **m** 是大於等於 **2** 的正整數。或者我們也可以這樣想：當我們連接正 **n** 邊形的 **n** 個頂點與其對稱中心 (重心) 時,會將會得到 **n** 個全等的等腰三角形，其中這 **n** 個等腰三角形的頂角皆爲$\frac{2\pi}{n}$，也就是$\frac{360°}{n}$，因此，反過來說，如果我們可以尺規作圖作出$\frac{2\pi}{n}$的這個角度，就能做出正 **n** 邊形。又由於可以透過作角平分線的方式，來二等分任意的角度，因此，只要我們已知θ角，則透過不斷等分的過程，我們可以作出$\frac{\theta}{2^m}$角，也可以達到同樣效果。

由於《幾何原本》第 **I** 冊的第 **46** 個命題，已經解決了正四邊形的作圖問題，於是我們能藉此做得出直角$\frac{\pi}{2}$，再不斷地依據上述方法我們可以作出任意的$\frac{2\pi}{2^m}$，其中 **m** 是大於等於 **2** 的正整數，因此，任意正2^m形的作圖問題宣告解決。當然，我們也可以類似地使用上述方法，從已知正三角形與正五邊形的作圖出發，進一步地作出正$3 \cdot 2^m$形與正$5 \cdot 2^m$形的圖形，其中 **m** 爲非負整數。

再者，歐幾里得也發現下列的法則：已知我們可以作出正 ***a*** 邊形與正 ***b*** 邊形，如果 ***a*** 又與 ***b*** 互質，則我們可以作出正 ***a·b*** 邊形。這是因爲當 ***a*** 與 ***b*** 互質時，我們可以利用輾轉相除法找出整數 ***k*** 與 ***l***，滿足 $ak + bl = 1$，又因爲我們能作出正 **a** 邊形與正 **b** 邊形，亦即能作出$\frac{2\pi}{a}$與$\frac{2\pi}{b}$弧度的角，進一步地，能作出$\frac{2l\pi}{a}$與$\frac{2k\pi}{b}$弧度的角，這時，只要把這兩個角相加，便得到$\frac{2l\pi}{a}+\frac{2k\pi}{b}=\frac{2bl\pi+2ak\pi}{ab}=\frac{2\pi}{ab}$，而最後的等式是因爲 $ak + bl = 1$ 而成立。因此，我們便能順利作出正 ***a·b*** 邊形來。以上便是《幾何原本》第 **IV** 冊第 **15** 與 **16** 命題關於正 **6** 與正 **15** 邊形作圖想法的原理與推廣。

依此類推，因爲 **3** 與 **5** 互質，於是我們能作出正 **15** 邊形，同理，因爲 **2**、**3**、**5** 這三個數互質，且正 **3** 角形與正 **5** 邊形的尺規作圖古希臘人早已解決，因此，到目前爲止，只要 **n** 是形如$2^m \cdot 3^k \cdot 5^l$的數，其中 **m** 是非負整數，而且 ***k*** 與 ***l*** 皆爲 **0** 或 **1**，我們都能作出正 **n** 邊形來。更一般化來看，如果已知 **n** 是一個形如$2^m \cdot p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ 的數，其中對所有的p_i，我們都能作出正 p_i 邊形，而且這些

p_i 互質，r_i 皆爲 **0** 或 **1**，那我們就可以作出正 **n** 邊形。

接著，我們可以擴大討論所有 $n \leq 20$的情況。首先，正 **3** 角形，正 **4** 邊形與正 **5** 邊形已經解決，接下來，因爲 $6 = 2 \cdot 3$，$8 = 2^3$，$10 = 2 \cdot 5$，$12 = 2^2 \cdot 3$，$15 = 3 \cdot 5$，$16 = 2^4$，$20 = 2^2 \cdot 5$，所以，由《幾何原本》的相關命題，可以作出正 **6**、**8**、**10**、**12**、**15**、**16**、**20** 邊形。然而，面對 **n=7**、**9**、**11**、**13**、**14**、**17**、**18**、**19** 時，數學家們再一次陷入了困境之中，無法利用前述的各種法則來解決，必須進一步找尋新的方法，嘗試新的路徑。

III 新的方法，新的局面

從《幾何原本》問世之後，尺規作圖的問題，就吸引了數學家們的關注。然而，歐幾里得所提出的方法並無法有效地一般化與推廣，眾人的費力苦思，卻始終無法徹底解決所面對的難題。因此，唯有新的方法、新的巧思，方能開創新的格局。漫漫的長夜是無止盡的等待，終於，兩千年多年後的十八世紀末，隨著高斯的誕生，希望的曙光才逐漸照亮黑暗。

III. 1 可尺規作圖的實數

最讓人引領期盼的豪華宴席料理，緊接著即將登場，然而主菜上桌之前，我們必需先端上幾道開胃小菜。

給定位單位長度 **1** 之後，哪些實數是可以依循古希臘尺規作圖的規定，透過有限多次地使用 (沒有刻度的) 直尺與圓規畫出來的呢？首先，如果我可以從已知的單位長度，透過有限多次地使用直尺與圓規來畫出 $|a|$ 這個長度，那我們稱爲實數 **a** 可以尺規作圖，例如：**3**，**-4**，**5/2** 等數皆可以尺規作圖。更一般性地來說，已知 **a** 與 **b** 都可以尺規作圖，則 $a + b$、$a - b$、ab、a / b (當 **b** 不爲 **0** 時)，也都可以尺規作圖，也就是說，所有的有理數都可以利用直尺與圓規，在有限個步驟之中畫出來。又當 $a>0$ 時，我們亦可以透過尺規作圖的方式畫出$\sqrt{a}$。至於上述這些作圖的方法，在中學課程之中都有介紹，有興趣的讀者可參考或回憶現今中學的數學課程之中的相關內容。

進一步地，從代數的語言來看，所有可以尺規作圖的實數，會形成一個體 **(Field)**，而這個可以尺規作圖的實數體 **(F)** 是整個實數體 **(R)** 的子體，同時包含所有的有理數 **(Q)**，亦即 **Q** 包含於 **F** 且包含於 **R** 之中。這個體 **(F)** 當中所包含的元素，正好是我們可以從有理數進行有限次加、減、乘、除有理運算以及取正數的平方根等動作而得到的所有實數，有理數 **a** 加、減、乘、除有理數 **b** 仍是有理數，因此，在做加、減、乘、除操作的過程中，所得到的數仍落在有理數體之中，並不使得原本的體變大。然而，當我們作「開根號」的動作時，出現諸如 $\sqrt{a}$ 的無理數，因此會讓使得原本的有理數體變大。根據代數學之中相關的基本性質與定理，我們可以知道 $[Q(\sqrt{a}) : Q] = 2$ (將 $Q(\sqrt{a})$ 看成佈於 **Q** 的向量空間時，維度爲 **2**)。更進一步地，如果實數 **a** 可尺規作圖，則存在有限多個實數 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n = a$，使得 $[Q(a_1) : Q] = 2$，且 $[Q(a_1, a_2, .., a_i) : Q(a_1, a_2, .., a_{i-1})] = 2$。由

此，我們還可以知道 **[Q(a)：Q] = 2**^{s}，其中 **s** 爲正整數，同時，**[Q(a)：Q]** 會等於係數佈於有理數體時 **a** 之首一不可約多項式的次數。至於這個定理的證明內容，涉及到許多代數學上的知識，在此並不加以討論，有興趣的讀者可查閱代數學相關書籍內容。但重要的是，我們可以得到以下重要的結論 **(**定理**)**：

> **若實數 a 可尺規作圖，則[Q(a)：Q] =** 2^s **，意即若實數 a 可尺規作圖，則 a 的不可約多項式(係數佈於有理數)之次數必為 2 的冪次。**

上述結論等價於：如果 **a** 的不可約多項式 **(**係數佈於有理數**)** 之次數不爲 **2** 的冪次時，那麼，**a** 就無法以尺規作圖作出。由這個結果，我們亦可以輕易地解決「倍立方」、「化圓爲方」、「三等分任意角」等古希臘三大作圖題。

接著，我們再引入一個定理：θ角可以尺規作圖，若且唯若 **cos**θ可以尺規作圖 **(**關於這個定理的證明並不困難，留給讀者們自行思考**)**。在一開始的討論之中我們知道，正 **n** 邊形可以尺規作圖若且唯若$\frac{2\pi}{n}$可以尺規作圖，再根據上述定理，正 **n** 邊形可以尺規作圖若且唯若$\cos(\frac{2\pi}{n})$可尺規作圖。接下來，主菜隨即上桌，我們透過高斯的方法，來研究一些正 **n** 邊形可尺規作圖的可能性。

III. 2 5 與 7，可與不可之間

先回顧高中的數學課程，利用複數極式的概念以及棣美弗定理，我們可以求得$x^n-1=0$的 **n** 個根，如果把x^n-1除以$x-1$，則可以得到$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdot\cdot+x+1$，除了$x=1$之外，它的$n-1$個根會與$x^n-1=0$的所有根相同，並且，**1** 的這 **n** 個根會構成一個循環群，我們可以下列方式將 **n** 個根依序排列：$R,R^2,R^3\cdot\cdot,R^n=1$，其中$R=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，而$R^{-1}$或$\frac{1}{R}=\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}$。同時，我們也知道 **1** 的這 **n** 個根在複數平面上，會把單位圓分成 **n** 條相等的弧。並且當 **n** 爲質數時，$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdot\cdot+x+1=0$是不可約的 **(**這可由 **Eisenstein** 判定法加以判斷**)**。此時，我們把$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdot\cdot+x+1=0$稱之爲割圓方程 **(**或曰分圓多項式**)**。由稍早提過的相關定理也可以知道，只有當$n-1=2^m$，且其中 **m** 爲大於等於 **1** 的正整數時，才有可能作得出正 **n** 邊形。

有了上述先備知識之後，我們便可以著手來討論正 **5** 邊形的作圖問題。首先令$R=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，則有$R^5-1=0$，又因爲$R\neq1$，所以$\frac{R^5-1}{R-1}=$
$R^4+R^3+R^2+R+1=0$。加上此割圓方程式是不可約的，同時次數具有2^m的形式，所以，我們知道可能可以作得出這個方程的根。

接著，我們把割圓方程的所有根加以配對相加：

$$y_1 = R + \frac{1}{R} = (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}) + (\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$y_2 = R^2 + \frac{1}{R^2} = (\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}) + (\cos\frac{4\pi}{5} - i\sin\frac{4\pi}{5}) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

因此，我們便能得到下列關係式：

$$y_1 + y_2 = R + R^4 + R^2 + R^3 = -1$$

$$y_1 \cdot y_2 = (R + R^4)(R^2 + R^3) = R^3 + R^4 + R^6 + R^7 = R^3 + R^4 + R + R^2 = -1$$

再來，根據根與係數關係，我們可以知道 y_1 與 y_2 滿足 $y^2 + y - 1 = 0$ 這個方程式，利二次方程式的公式解，我們便能得到 $y^2 + y - 1 = 0$ 的兩個根爲 $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$。又因爲 $\frac{2\pi}{5}$ 落在第一象限，$\frac{4\pi}{5}$ 落在第二象限，所以，我們知道 $y_1 = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ 且 $y_2 = 2\cos\frac{4\pi}{5} < 0$，因此，$y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，於是可以得到 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$，這是一個可以尺規作圖的實數。又已知 θ 角可以尺規作圖若且唯若 **cos**θ可以尺規作圖，所以，我們可以作出 $\frac{2\pi}{5}$，因此，便能作出正 **5** 邊形，而作圖的方法在《幾何原本》之中亦完整給出。

接下來，我們繼續討論正 **7** 邊形的情況，當歐幾里得順利地解決了正 **3**、**4**、**6**、**8**、**10** 邊形等作圖問題之後，顯然在嘗試作正 **7** 邊形時遇上了困難，始終無法突破，直至 **18** 世紀之間的數學家們亦束手無策。這裡，我們再次利用前述的方法來說明這個問題。首先，我們令 $R = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$，則 $R^7 - 1 = 0$，又因爲 $R \neq 1$，所以，割圓方程即爲 $\frac{R^7 - 1}{R - 1} = R^6 + R^5 + R^4 + R^3 + R^2 + R + 1 = 0$，而這是一個不可約方程，然而次數並不爲 **2** 的冪次，因此，我們無法尺規作圖作正 **7** 邊形。或者，我們再次把割圓方程的根加以配對相加：

$$y_1 = R + \frac{1}{R} = (\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}) + (\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}) = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$y_2 = R^2 + \frac{1}{R^2} = R^2 + R^5$$

$$y_3 = R^3 + \frac{1}{R^3} = R^3 + R^4$$

因此，我們可以得到下列關係式：

$$y_1 + y_2 + y_3 = (R + R^6) + (R^2 + R^5) + (R^3 + R^4) = -1$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (R^3 + R^1 + R^6 + R^4) + (R^4 + R^2 + R^5 + R^3) + (R^5 + R^1 + R^6 + R^2) = -2$$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = (R + R^6)(R^2 + R^5)(R^3 + R^4) = 1$$

根據根與係數關係，我們可以知道 y_1、y_2、y_3 會滿足下列三次方程式：

$y^3+y^2-2y-1=0$，再運用有理根檢驗法，因爲 y^3 項與常數項的係數分別爲 **1** 與 **-1**，所以，這個三次方程式的有理根僅可能是± 1。然而，因式定理告訴我們，± 1都不是這個方程式的根，因此，這個三次方程式是不可約的，同時亦沒有有理根，所以，我們無法以尺規作圖作出它的三個根，當然就無法作出 $y_1=2\cos\frac{2\pi}{7}$，也因此無法作出正 **7** 邊形。

IV 最終的豪華料理－正十七邊形之尺規作圖

IV.1 高斯之洞見

最後這道豪華料理，主要探討正 **17** 邊形的作圖問題，我們從高斯的觀點切入，說明可作圖性，從證明的過程當中，我們也能掌握正 **17** 邊形的作圖方法。

首先，我們先作一個簡單的觀察：如果2^m+1是一個質數，那麼 $m=2^k$，其中 **k** 是非負整數。這裡可以簡單說明如下：假設 **m** 有大於 **1** 的奇因數，則$m=rs$，其中 **s** 爲大於 **1** 的正整數且 **r** 是正整數。由於當 **s** 是奇數時，我們可以將a^s+b^s因式分解：$a^s+b^s=(a+b)(a^{s-1}-a^{s-2}b+a^{s-3}b^2-\cdot\cdot+b^{s-1})$，因此，$2^m+1=2^{rs}+1$ $=(2^r+1)(2^{r(s-1)}-2^{r(s-2)}+2^{r(s-3)}-\cdot\cdot+1)$，又因爲 **r** 與 **s** 皆爲正整數，因此 2^m+1會有二個大於 **1** 的因數，這與2^m+1是質數的假設矛盾。所以，如果2^m+1是一個質數，那麼，它必具有 $2^{2^k}+1$的形式，其中 k 爲非負整數。至於形如$2^{2^k}+1$的質數，我們稱之爲費馬質數，同時，費馬也大膽地猜測形如上述$2^{2^k}+1$的正整數都會是質數，例如：**3=**$2^{2^0}+1$，**5=**$2^{2^1}+1$，**17=**$2^{2^2}+1$等。又例如 **101=**$2^2\cdot 5^2+1$，因此 **101** 非費馬質數。然而，尤拉發現 $2^{2^5}+1$ 並非質數，其可整除 **641**，這也說明費馬的這個猜想並不正確。

事實上，後來數學家們證明了下列的一般性定理：

正 n 邊形可尺規作圖，若且唯若所有整除 n 的奇質數皆為費馬質數，意即 $n=2^k\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cdot p_n$，其中，所有的 p_i 皆為費馬質數。

因此，如果 **n** 是形如$2^{2^k}+1$的質數，那麼，吾人將可以作出正 **n** 邊形。《幾何原本》之中，已給出了當 **k=0** 或 **1**，也就是當 **n=3** 或 **5** 時，如何作出正 **3** 角形與正 **5** 邊形的方法。從上述的後見之明中，我們也知道，當 **k=2** 時，理論上可以尺規作圖作出正 **17** 邊形。至於如何實際操作以尺規作圖作出正 **17** 邊形，則是困擾了數學家們許久的一個難題，至少從歐幾里得至高斯誕生之前的這 **2000** 年裡，一直沒有數學家能真正給出正 **17** 邊形的作圖方法。以下，我們將再次使用前述的方法，進一步呈現出高斯的洞見以及其作正 **17** 邊形的方法。

IV.2 高斯之正 17 邊形尺規作圖證明

我們令 $R=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$，則 $R^{17}-1=0$，所以，割圓方程式即爲：

$R^{16}+R^{15}+\cdot\cdot+R^2+R+1=0$。接著，以如下方式將 **17** 個根排序：

$$R, R^3, R^9, R^{10}, R^{13}, R^5, R^{15}, R^{11}, R^{16}, R^{14}, R^8, R^7, R^{12}, R^2, R^6$$

這裡的排序方式是考慮 R^{3^k}，其中 **k** 為非負整數，依此順序會得到上列的排列方式。接著，把上述的奇數項相加得到：

$$y_1 = R+R^9+R^{13}+R^{15}+R^{16}+R^8+R^4+R^2$$

再把偶數項相加得到：

$$y_2 = R^3+R^{10}+R^5+R^{11}+R^{14}+R^7+R^{12}+R^6$$

則我們有下列關係式：

$$y_1+y_2 = R+R^2+\cdot\cdot R^{16}+R^{17} = -1$$

$$y_1y_2 = (R+R^9+R^{13}+R^{15}+R^{16}+R^8+R^4+R^2)(R^3+R^{10}+R^5+R^{11}+R^{14}+R^7+R^{12}+R^6) = -4$$

因此，我們可以知道 y_1, y_2 是二次方程式 $y^2+y-4=0$ 的兩個根。

接著，我們取 y_1 的奇數項相加得：$z_1 = R+R^{13}+R^{16}+R^4$，再取 y_1 的偶數項相加得：$z_2 = R^9+R^{15}+R^8+R^2$。我們又取 y_1 的奇數項相加得：$w_1 = R^3+R^5+R^{14}+R^{12}$，再取 y_1 的偶數項相加得：$w_2 = R^{10}+R^{11}+R^7+R^6$

因此，我們有下列關係式：

$$z_1+z_2=y_1，\ w_1+w_2=y_2$$

$$z_1\cdot z_2=-1，\ w_1\cdot w_2=-1$$

進一步地，還可以知道 z_1, z_2 滿足二次方程式 $z^2-y_1z-1=0$ 而且 w_1, w_2 滿足二次方程式 $w^2-y_2w-1=0$。

最後，我們取 z_1 的奇數項相加得：$v_1=R+R^{16}$，再取 z_1 的偶數項相加得：$v_2=R^{13}+R^4$，這時，我們可以得到：$v_1+v_2=z_1$，$v_1\cdot v_2=w_1$，並且 v_1, v_2 會滿足二次方程式：$v^2-z_1v+w_1=0$，又因為 $v_1=R+R^{16}$ 且 $R\cdot R^{16}=R^{17}=1$，所以 R, R^{16} 滿足二次方程式：$r^2-v_1r+1=0$。

至此，我們可以透過解一系列的方程式來得到 R，再者 $R=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$，所以 $\frac{1}{R}=\cos\frac{2\pi}{17}-i\sin\frac{2\pi}{17}$，從而

$$v_1 = R+R^{16} = R+\frac{1}{R} = 2\cos(\frac{2\pi}{17})，$$

$$v_2 = R^4+\frac{1}{R^4} = 2\cos(\frac{8\pi}{17})。$$

又 $\frac{2\pi}{17}$ 與 $\frac{8\pi}{17}$ 都在第一象限內，所以 $v_1>v_2>0$ 且 $z_1=v_1+v_2>0$。

同理，

$$w_1 = R^3+R^5+R^{14}+R^{12} = (R^3+\frac{1}{R^3})+(R^5+\frac{1}{R^5})$$

$$= 2\cos(\frac{6\pi}{17})+2\cos(\frac{10\pi}{17}) = 2\cos(\frac{6\pi}{17})-2\cos(\frac{7\pi}{17})。$$

又因為$\left|\cos(\frac{6\pi}{17})\right| > \left|\cos(\frac{7\pi}{17})\right|$，所以$w_1 > 0$。並且，

$$y_2 = (R^3 + \frac{1}{R^3}) + (R^5 + \frac{1}{R^5}) + (R^6 + \frac{1}{R^6}) + (R^7 + \frac{1}{R^7})$$
$$= 2\cos(\frac{6\pi}{17}) + 2\cos(\frac{10\pi}{17}) + 2\cos(\frac{12\pi}{17}) + 2\cos(\frac{14\pi}{17})$$

其中只有$\cos(\frac{6\pi}{17}) > 0$，而且$\left|\cos(\frac{6\pi}{17})\right| < \left|\cos(\frac{5\pi}{17})\right| = \left|\cos(\frac{12\pi}{17})\right|$，所以$y_2 < 0$。又已知$y_1 y_2 = -4$，所以$y_1 > 0$。

接下來，我們可以利用二次方程式的公式解，解出下列各值。

首先，y_1, y_2是方程式$y^2 + y - 4 = 0$的兩個根，而且$y_1 > 0$，$y_2 < 0$，所以我們可得：

(1) $y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$

(2) $y_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{17} - 1)$

再來，由於z_1與w_1分別為方程式$z^2 - y_1 z - 1 = 0$與$w^2 - y_2 w - 1 = 0$的正根，於是：

(3) $z_1 = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y^2}$

(4) $w_1 = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y^2}$

因此，我們只需要再利用畢氏定理，就能作出這 **4** 條線段，接著就能作出$v^2 - z_1 v + w_1 = 0$的根，又因為$v_1 = R + R^{16} = R + \frac{1}{R} = 2\cos(\frac{2\pi}{17})$是這個方程式之一根**(**且由前述可知其為較大之根**)**，因此，我們能作出$\cos(\frac{2\pi}{17})$，於是能作$\frac{2\pi}{17}$，所以就能利用尺規作圖作出正 **17** 邊形了。

IV. 3 正 17 邊形的作圖方法

最後，我們介紹高斯作正 **17** 邊形的方法。

首先，在單位圓內作 **2** 條互相垂直直的徑 **AB** 與 **CD**。令過 **A** 與 **D** 的兩切線相交於 **S**，接著把 **AS** 四等分，再作 **AE = 1/4 AS**。令以 **E** 為圓心，以 **OE** 為半徑的圓與 **AS** 相交於 **H(**在 **FF'**的外部**)**。以 **F'**為圓心，**F'O** 為半徑的圓與 **AS** 相交於 **H'(**在 **F'**與 **F** 之間**)**。

接著，我們可以透過下圖來證明$AH = z_1$，$AH' = w_1$。

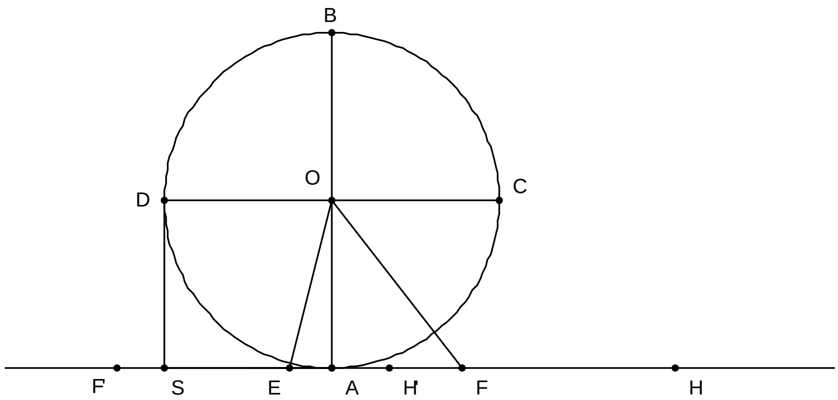

圖 1

從圖 **1** 之中，我們可以得到下列關係式：

(1) $OE=\sqrt{OA^2+EA^2}=\sqrt{1^2+(\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{4}\sqrt{17}$

(2) $AF=EF-EA=OE-EA=\frac{1}{4}\sqrt{17}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}y_1$

(3) $AF'=EF'+EA=OE+EA=\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}y_2$

(4) $OF=\sqrt{OA^2+AF^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}y_1^2}$

(5) $OF'=\sqrt{OA^2+AF'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}y_2^2}$

因此，進一步得到：

(6) $AH=AH+FH=AH+OF=\frac{1}{2}y_1+\sqrt{1+\frac{1}{4}y_1^2}=z_1$

(7) $AH'=F'H-F'A=F'O-F'A=\frac{1}{2}y_2+\sqrt{1+\frac{1}{4}y_2^2}=w_1$

所以，我們便能得到前述證明過程之中出現的 z_1 與 w_1 。

在已知 $AH=z_1$ 以及 $AH'=w_1$ 的情況下，我們可以作出 $v^2-z_1v+w_1=0$ 的根。

在這裡，我們再以小小的篇幅，介紹如何利用尺規作圖，作一元二次方程式之兩個實根的方法。已知一元二次方程式為 $x^2-ax+b=0$ $(a^2>4b)$，以下的方法可以幫助我們畫出其兩個實根：

首先，連接 **B** 點**(0 , 1)**與 **D** 點**(a , b)**得到線段 **BD**。再以 **BD** 為直徑作圓，與 **x** 交於 **E** 與 **F**。則 **E** 與 **F** 的橫坐標即為方程式的兩個根。

上述方法的簡單證明步驟如下：

(1) 以 **BD** 爲直徑的圓之方程式爲：$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b+1}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{(b-1)^2}{4}$ 。

(2) 令 **y=0**，則可解得 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ，此即爲 $x^2-ax+b=0$ 的兩個根。

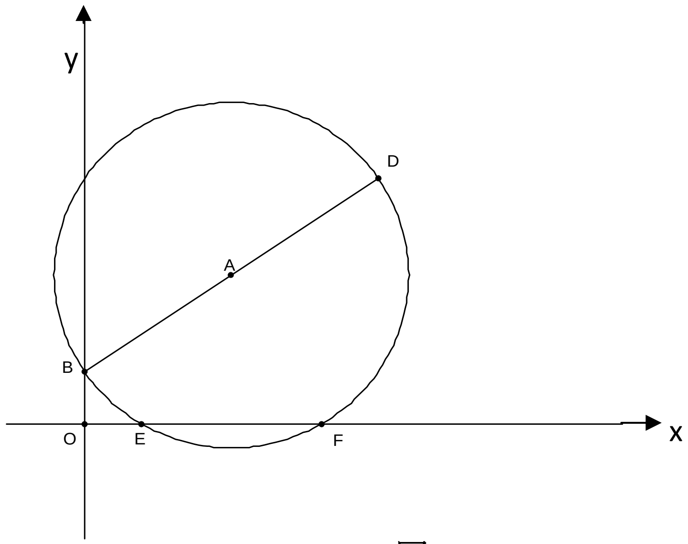

圖 2

因此，利用上述方法，我們首先連接 **B** 點 **(0,1)** 與 **D** 點 (z_1,w_1) 得到線段 **BD**，接著，以 **BD** 爲直徑作圓，與 **x** 交於 **E** 與 **F**，此時右交點 **F** 之橫坐標即爲所求之 $v_1=2\cos(\frac{2\pi}{17})$ ，亦即 $OF=2\cos(\frac{2\pi}{17})$ 。

最後，我們便可以進一步在單位圓上作出正 **17** 邊形的一邊，接著作出正 **17** 邊形。而這個過程可以分成四個步驟：

(1) 在 **x** 上標示出 $OF=v_1=2\cos(\frac{2\pi}{17})$ 。

(2) 令 **M** 是 **OF** 之中點，即 $OM=\frac{1}{2}v_1=\cos(\frac{2\pi}{17})$ 。

(3) 作 OF 的垂線交單位圓於 **P** 點，此時 $\angle POM=\frac{2\pi}{17}$ ，因此 **AP** 即爲正 **17** 邊形的一邊。

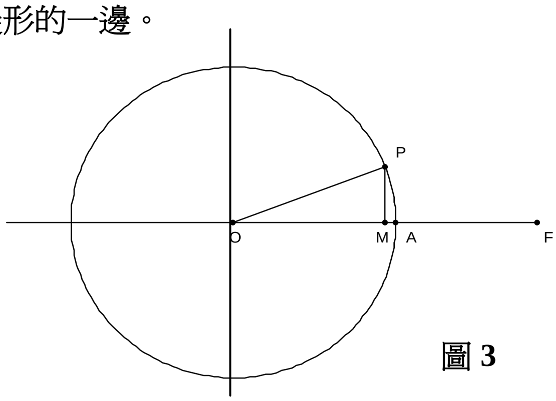

圖 3

(4) 以 **AP** 爲長來量圓周，畫出 **17** 個頂點，再連接各線段，所得圖形即爲正 **17** 邊形，亦即正 **17** 邊形的尺規作圖完成。

V 更寬廣的新世界

高斯上述作正 **17** 邊形的方法，可以進一步地推廣至所有形如 $2^{2^k}+1$ 的正 **n** 邊形，當 **n** 是形如 $2^{2^k}+1$ 的質數時，它的割圓方程爲一個 2^{2^k} 次不可約多項式，其中共有 2^{2^k} 個根。接著，我們仿照高斯處理正 **17** 邊形的方法，不斷地將這 2^{2^k} 個根分成兩個集合，第一次將 2^{2^k} 個根配對分成兩集合時，每個集合會有 2^{2^k-1} 個根，接著，再將元素個數爲 2^{2^k-1} 的這兩個集合各自配對分割之後，這時，每個集合會包含有 2^{2^k-2} 個根，持續相同的分割過程之中，我們會得到一系列的二次方程式，其中每一個方程的係數，都是由前一個方程的根所決定，並且在有限次之後，每個集合之中都只會留下兩個元素，諸如：R 與 $\frac{1}{R}$ 、R^2 與 $\frac{1}{R^2}$ 、R^3 與 $\frac{1}{R^3}$ 等等，這時 $x^n=1$ 的根，可以用有限次有理運算與求平方根得到。

有關上述延拓的細節，讀者可自行思考或者進一步參考其它相關書籍或文獻。

反思高斯的方法，除了在邏輯上嚴謹地證明了正 **17** 邊形的可作圖性，證明的過程之中，也同時說明了實際如何作圖的方法。相較於其它透過代數學相關知識的證明方法而言，高斯的確具有更深的洞見，也爲原本似乎走入死胡同的難題，開創了一條新的道路。此外，高斯亦在 **1826** 年時宣稱了正多邊形可尺規作圖的條件，即：

正 n 邊形可尺規作圖，若且唯若所有整除 n 的奇質數皆為費馬質數，意即 $n=2^k\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，其中，所有的 p_i 皆為費馬質數，所有的 k_i 皆為 0 或 1。

雖然其確實證明了這個條件的充分性，然而，針對必要性的部份，他並沒有給出完整的證明。直到 **1837** 年，汪徹（**Wantzel**）才終於證明了可尺規作圖條件的必要性。這場跨越了 **2000** 多年，始於古希臘，發揚於歐幾里得，成就於高斯的數學宴席料理，在現代代數學的威力下，劃下了完美的句點。古典的幾何學問題，最終被源於解方程式以及伽羅瓦 **(E. Galois)** 的研究成果等代數學工具完全解決。解析幾何的發明，連結且平等了希臘神聖的幾何學以及技藝性質的代數學，群論的誕生，更使得代數學與幾何學在現代數學研究中越趨緊密的結合，不管是十九世紀末，克萊因 **(F. Klein)** 用群的觀念來統一不同的幾何，或者黎曼 **(Riemann)** 從代數曲線的研究成果，所發展出的重要領域「代數幾何學」，無不宣告代數學與幾何學之間的齊頭並進以及相輔相乘。

兩千多年前，理性的力量引導好思考的人們渴求了解世界的真理、自然的定律。四百年前，數學家們把科學的數學律歸功於上帝的巧手設計，文明與真理的追求，是爲了彰顯上帝的榮耀與光輝。也曾經，部份數學家開始從現實世界撤離，轉向越來越抽象、也越來越專門化的數學本身，並僅僅鑽研自身精熟的領域，致力著數學的內在美感以及純智性的挑戰。然而，孤立終將帶來迷惘、數學的舊礦脈終會貧瘠。而未來，理性的力量必需依賴更開闊的心胸，更多元的結合，才有更豐富的創造、更寬廣的新世界。

參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications, INC.

John B. Fraleigh (1999). *A first Course in Abstract Algebra* (6th ed). Addison-Wesley Educational Publishers Inc.

Thomas W. Hungerford (1974). *Algebra*. New York: Springer –Verlag New York Inc.

Bold, B (鄭元祿譯**) (2008).**《著名的幾何問題及其解法－尺規作圖的歷史》，北京：高等教育出版社。

Berlinghoff, William P. and Fernando Q. Gouvea (洪萬生、英家銘等譯**) (2008).**《溫柔數學史》，台北：博雅書屋。

Kline, Morris（趙學信，翁秉仁譯）**(2004).**《數學－確定性的失落》，台北：台灣商務印書館。

洪萬生 **(2006).**《此零非彼 0：數學、文化、歷史與教育文集》，台北：台灣商務印書館。

康明昌 **(1988).**《近世代數》，台北，聯經出版社。

網路資料

洪萬生 **(2008)**：〈尺規作圖：從三角形到正方形〉，台灣數學博物館：**http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php**

洪萬生 **(2008)**：〈正 **5**、**6**、**15** 邊形之尺規作圖〉，台灣數學博物館：**http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php**

洪萬生 **(2008)**：〈正七邊形的尺規作圖之不可能！〉，台灣數學博物館：**http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php**

李建勳 **(2008)**：〈正七邊形不可能尺規作圖！〉，台灣數學博物館：**http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php**

陳彩鳳 **(2008)**：〈高斯〉，台灣數學博物館：**http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php**

蘇惠玉 **(2008)**：〈三大作圖題〉，台灣數學博物館：**http://museum.math.ntnu.edu.tw/index.php**

Joyce, David: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_10_04_1/index.html