

帶領學生閱讀數學書籍策略分享－「數學大騷動」

楊智強
王文光

壹、前言

「如何閱讀」，這是一件多麼困難，卻也是最重要的事情。回顧以往的教學過程，身為數學教師的我們，總會在看完教科書及一些補充資料後，便在一節課中毫無保留的教給學生，學生也似乎沒啥掙扎的就接受了。

但仔細回想，覺得問題大了。這樣的教學過程，老師將所想傳授的知識包裝好了，忘了知識應是在個體自我解構與建構中形成的；學生將老師在課堂上所講的全記起來，卻忘了應該時時刻刻保持懷疑及探索的心，充其量只不過是背誦與記憶罷了。

因此，我們開始思考著應該要做什麼是對學生好的，而且是長遠的幫助，「閱讀」應是首位。剛開始便進入一種困惑，一本與數學有高度相關的書和一般小說的書籍，閱讀方式是否有差別？以自己的經驗而言，是有差別的。當我自己在看一般的文學小說（例如《未央歌》）時，會很容易陷入它的劇情，感性的跟著書本走，但是，數學類的書卻常是讓我將自己專注在每個過程中，深怕自己對某一論點沒有全然了解，甚至有時還會提出一些質疑，再經由查證來作確認，而這也是我們在看數學課本時應有的態度。所以，我將帶領學生閱讀的目標鎖定在對課本的閱讀會有感覺，這感覺可以是對內容的欣賞、深思或疑問；方法則是透過課外讀物作為進入課本文本閱讀的橋樑。

貳、具體策略

根據自己所設定的目標及對象（七年級生），選定《數學大騷動》為這學期的課外讀物，每位學生都購置一本，利用學校七年級每星期的一節彈性課程進行教學。分成六個階段，其主題、內容與老師感想，敘述如下：

一、第一階段 實施 2 節課

主題	內容
安靜閱讀	學生已經很久沒有（或說從沒有）看一本難度比自己認知還高的書，30 分鐘安靜閱讀可以幫助學生慢慢看到書中他所知道的部份，也會發現一些所不知道的故事。30 分鐘的時間是不能和其他同學討論。
分享	接下來的 10 分鐘，闔上書本，讓學生發言他所看到的單元，發言的內容可以是他覺得有趣的地方或他想了解的部份。
	這樣的教學進行兩節課，第一節課進行時學生在自行閱讀時比較無法掌握要訣，因此在 10 分鐘的分享過程中，老師引導學生相形重要。 第二節課進行時，學生比較能進入狀況，因此會有討論的氣氛出現。但畢竟是剛升上國中的小學生，不小心就會離題，仍需老師的班級經營技巧。

二、第二階段 實施 2 節課

主題	內容
部分閱讀	由老師挑選兩篇文章，一節課花 15 分鐘只專注在老師指定的文章上閱讀，期間是不能和其他同學討論。 第一節：畢氏學派（P36）。 第二節：三角形的穩定性（P.26～P.29）。
分享 老師回饋 或分析	學生提出的問題 • 畢氏學派－1、什麼是「萬物皆數」；2、為什麼要用金錢利誘學生去聽課；3、什麼是「和諧比、三角數、平方數及畢氏定理」；4、為什麼希巴賽司發現 2 的平方根就要被害死；5、什麼是平方根？ • 三角形的穩定性－1、為什麼三角形的框架結構會是最結實牢固的結構；2、「齒輪比」是什麼？
	<p>第一節課學生看的是「畢氏學派」，讓學生對數學家有一些了解，而針對學生所提出問題老師給予適當的回饋。例如學生提到「什麼是萬物皆數」及「為什麼希巴賽司發現 2 的平方根就要被害死」，我的回應是畢達哥拉斯認為宇宙的基礎是整數，其實對照現在我們所學的就是正整數而已。</p> <p>而在他們學派中有位信徒—希巴賽司（Hippasus），從面積是 1 平方單位的正方形邊長是 1 公分，其對角線在整數或分數中找不到（如右圖），所以一定還有是我們沒發現的數，因此對萬物皆數提出的質疑。就這樣，畢氏學派為了封口把希巴賽司從這地球上消失了！話說至此，我便詢問學生為什麼畢氏學派非得這樣做不可？藉此讓學生再次的思索可能性。</p> <p>第二節課則是挑選了比上一節內容多，但其實重點比較少的文章，目的在於讓學生從 4 頁的文章瀏覽後找到重點。針對框架結構的部份，正好自己有一台折疊式腳踏車，其結構正可讓學生了解三角形的穩定性與四邊形的不穩定性的關係，解說後再以本校前後校門口為例子，前門運用的是四邊形的不穩定性，以致於在收納時較不佔空間而後門則是固定框架式的，並讓學生再次思考前後校門設計的用意。</p>

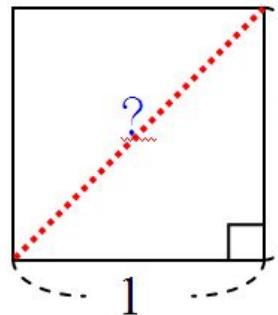


圖 1 正方形的對角線



圖 2.3 摺疊式腳踏車 由四邊形的不穩定性至三角形的穩定性



圖 4.5 前門利用四邊形的不穩定性



圖 6 後門的框架為固定式

三、第三階段 實施 1 節課

主題	內容
影片欣賞	觀看「李昌鈺博士－蜘蛛馬跡」其中一段案子的破案過程。
藉由李博士團隊最擅長的微跡證，告訴學生在閱讀數學書籍時，我們會發現一些不是很了解的地方，這時得利用我們的分析與資料蒐集來做判斷。同時也得小心我們看得懂的部份，或許只是看得懂但不一定真正懂，都需要用心、安靜的閱讀才可能會發現。	

四、第四階段 實施 4 節課

主題	內容
老師教學 1	<p>p. 21—數系發展 「印度人最早使用 0，歐洲人認為這個符號邪惡」，以此將數系的發展介紹讓學生有初步概念，也明白一件事情或一個不被當時社會所接受的概念，它的發展總是需要一段時間與爭議，但若是正確的，最後終究會在這社會上被保留下來。</p> <p>p.21—有理數 解釋什麼是有理數，「即是可以用小數或分數來表示的數字，其中分數指的是兩個整數的比例」。並藉此再與之前所介紹畢氏學派希巴賽司發現的問題，說明面積為 2 的正方形，其邊長不是有理數，而是另一種數，為現今我們所稱的「無理數」。 同時以有理數的概念介紹畢氏學派的「合諧比」與音樂上的關係（該部分是書中第四單元）。</p>
老師教學 2	<p>pp. 32-33 — 45 度角 「如果你想讓球飛得最遠，最佳的投球角度應該是不高不低的 45 度角」。 書本上提到的是以籃球為圖例，而學生對 45 度角產生了興趣，但卻不知道為何是 45 度。經向理化教師請教之後，這計算的公式已經移至高中且與初速度有關，因此無法在此時教導學生計算。但仍舊從網路上找到相關的訊息，也就是以棒球為例，球探分析投手除了球速外，另一關鍵處是球離開投手瞬間的位置，手臂與地面是呈 45 度角（如下圖所示）。</p>
	
	<p>圖 7 球離開投手的瞬間（原本有 16 張圖，這裡只摘錄 3 張）</p> <p>資料來源：http://www.baseballtaiwan.net/pitchers/taiwan/amateur/zhengqihong/motion.htm</p>
老師教學 3	<p>pp.39-44 — MC. 伊斯切爾 (Escher) 的棋盤格形 以伊斯切爾的作品開始，將書本中的圖及網路上所獲得的作品，讓學生先對此人作品有驚嘆不已。再將所秀作品的共通性—「棋盤格形（鑲嵌）」引入，使學生了解什麼是「鑲嵌」。 之後，再以基本的四片正方形可達成鑲嵌，讓學生再思</p>

索有哪些正多邊形也可達成？進一步如書中由正八邊形和正方形所形成的鑲嵌，讓學生再次思索有哪兩種正多邊形也可達成？

學生明白後，回到 Escher 的作品，以老師畫的一個作品，讓學生分析這是如何完成的，再讓學生自己也嘗試完成一件作品。

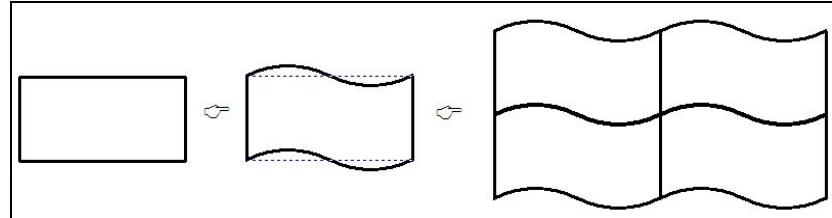


圖 8 棋盤格形製作方式

現在我們在教數學時，總是希望學生很快便知道數的四則運算，但當我們越了解數學的發展歷史，就會體會到為什麼有許多學生是很痛苦的在學習，尤其台灣教育最喜歡一直考試，似乎不容許學生有犯錯的情事。介紹數系，讓他們知道數學不是「蹦」一下就全部就出現，光一個 0 就花很久的時間有被某一個地方所接受，到下一個地方再被接受有得花一段很長的時間。告訴學生不相信可以去試試看，學生會覺得不可思議，哪裡還有人不知道 0 這東西，此時老師告訴學生可以到亞馬遜的原始部落問問看，學生會在歡笑中減輕了一些壓力，此時在讓學生回到書本中第 21 頁那巴西的皮洛哈部落的原住民，看看有什麼感想。

45 度角是個理想的角度，說的是飛得較遠，藉由書本以籃球、網路上的棒球，讓學生明白真的是 45 度角，也很坦白的告訴學生這相關的計算會在高中的物理課學習到。不過事情不應就此打住，學生對籃球、棒球的相信，真的嗎？因此會接著追問「45 度角是兩直線的夾角，那籃球與棒球各是哪兩直線」，這做法可讓學生不只從老師方面獲得資訊，也開始與日常中所看見籃球、棒球運動畫面中搜尋資料。當學生明瞭後再問學生那踢足球、擲標槍或扔鐵餅呢？最後，仍得像學生澄清，45 度角只是個理想中飛得較遠的角度，但今天打擊者是要做犧牲短打，那就不是 45 度角了！

五、第五階段 實施 4 節課

主題	內容
閱讀心得書寫	<p>前面的教學，都是以老師為主，引導學生去發現，老師再做說明。</p> <p>接下來的教學則以學生針對書中的內容、上節課上課內容或自己在日常生活中看到與數學相關的事物，可將心中所想、疑問等，在心得中發表。</p> <p>老師於下回上課時，將學生所寫的心得值得發表的部份，於課堂中搭配數本相關內容進行教學。學生的閱讀心得報告參見附件一。</p>
學生的心得報告，有些學生寫的還是停留在將書本中的一小段抄出來，沒有自己的想法，但仍有學生很用心的書寫。當學生用心書寫的部份，老師上課就以此心得為題材進行教學，當學生的書寫需要個別指導時，便會私下	

與學生討論，去發掘他心所想，再轉化為文字。

六、第六階段 實施 5 節課

主題	內容
數學小實驗	<p>規劃出五個可進行實驗的小主題，由有興趣的學生報告（1~3人為一組）。老師與學生討論到該組學生可上台為止。題目有：我把明信片變大了、硬幣穿洞、莫比烏斯帶、繩子穿洞、繩子打結等。</p> <p>學生對小實驗充滿興趣，但如何進行實驗則懵懵懂懂，上台教學更是膽怯。因此，每組上台進行教學前，老師須與小組進行2至4回的討論，等學生在實驗上是成熟後，再由學生進行一次的模擬教學，最後上場教學。</p> <p>每一小組上常教學，從思考如何進行到上台的時間大約是兩個星期。真正上場教學時，老師再適時給予協助，並肯定小組的表現，幫助小組順利完成。</p>

參、感想

從未帶領學生閱讀一本書，怎樣閱讀？怎樣的閱讀技巧是必備的？一學期的教學下來，自己仍未有定論。就自己的想法而言，希望學生看完一篇文章後，不只對其文筆有些感想，對其中的一些內容會想再繼續追查下去的態度，這樣的希望會成功嗎？檢視的方式是從數學課本著手，翻開課本某一頁，讓學生安靜閱讀，過了5~10分鐘後再闡上課本，請學生提出他認為的重點或疑問，老師依學生所提的部份進行教學。要求全部的學生都達成是有難度的，但也發現部份的學生（約10/29）能與老師對話了，期待下一學期的進行能有更多的學生達成。

肆、展望未來

這學期的進行方式，目的是為了引導學生在閱讀有關數學的書籍時所應持的態度。下學期則會將我對每一單元（共八個單元）以分組的方式，由每一組認養一個單元，針對我所設計的題目進行解答，希望他們能夠在發現問題後，主動探索答案的可能性，當他們回到課本的文本閱讀時有能夠持續保持這樣的態度。因單元的問題仍在建置中，僅附上單元一的題目（附件二）。

附件一 學生閱讀心得報告

第一份

特色：從學生的心得，老師給的回饋中再寫出她的想法。而老師再次給她「博士熱愛的數學」中一小段與該計算方式不同的想法，藉以激發學生多方面的感受。

數學大騷動每星期心得報告	
	座號： 姓名：王于瑄
日期	97/11/21
頁碼	P28『我知道了』
我的 感想	<p>在小學的時候常常會考我們1~100的和是多少，老師又沒說該怎麼算，會算的人算，不會算的人只好一個一個慢慢算。</p> $1+2+3+\dots+100$ $1+100=101 \quad 101 \times 50 = 5050$ $2+99=101$ $3+98=101$ \vdots
老師的 回應	<p>那好現在會算了吧！ 統計一何問題：</p> <p>$1+3+5+\dots+105$怎麼算？</p> <p>$1+105=106$ $3+103=106$ $5+101=106$ \vdots $51+55=106$</p> <p>因為1~105有53個基數，所以要最中那個數減掉，也就是減1變52，而中間那個數就是53。</p> <p>$106 \times 26 + 53 = 2809$</p> <p>52個基數，兩兩一組有26組，2個數加起來=106，總共有26組，所以乘26，最後再把中間那個數(53)加上去，最後得到2809</p>

第二份

特色：對數學實驗的想法

數學大騷動每星期心得報告		
座號：6 姓名：許凱雲		
日期	97年11月21日	
頁碼	P101	
我的 感想	<p>這個明信片雖然看起來很小，可是我們只要剪幾刀就可以把明信片的周邊延長擴大，我做過了這個明信片的實驗，證明了書上所寫的是正確的，剪得空隙越小，面積就會變得更大，數學可以不斷的實驗就算做錯了也不會怎樣，並不會有任何生命危險，而做這個實驗時我也失敗了很多次，原因不是剪錯不然就是破掉，最後還是成功了，證明書是對的。</p>	
老師的 回應	<p>知識是一世紀、一世紀累積起來的。 而且知識不只有課上才是。 諸君們有些想法、疑問，更重要的 是我們敢不敢在些時間去想。 每個事、題目都慢慢思考後，對他們的看法也會 變得不一樣。</p>	

第三份

特色：自己做實驗的感想

數學大騷動每星期心得報告		
	座號：22	姓名：王奕捷
日期	11/21	
頁碼	109~110 (莫比烏斯帶)	
我的 感想	<p>我看了這幾頁有關《莫比烏斯帶》的實驗有些不懂，但真正做實驗時我才知道，「真的太神奇了！」我捲了一～五次及十次的捲，三次的真的是打一個結！二次的兩個圈真在一起，四次的好像四個圈都扣住，至於十次是我無聊，因為書裡又說宇宙可能是十或十一次元的爆炸產生的，也有可能宇宙是一條巨大的莫比烏斯帶，不是無限大！而是彼此相聯繩的！可是做好了，卻完全看不出是怎麼樣子，好像打了三次結有環環相扣的樣子！宇宙到底是什麼？多麼神奇！</p>	
老師的 回應	<p>宇宙是什麼。到目前沒有被印的證據，因為它太大了。但人類的想像力無限。目前有人則認為可能與莫比烏斯帶有關。</p>	

第四份

特色：體會出數學與她在學習音樂中的關係

數學大騷動每星期心得報告	
日期	12/17
頁碼	59~62
我的 感想	<p>跳舞古舞西班牙舞步，每個舞步之間都有規律可循，我在那裏發現每個舞步有道理，象徵「跳舞」的名稱，古號「跳舞」就是由舞步的規律而得來的，它告：」一首舞曲60下舞步，4拍子，速度四分之一，跳舞時間 = 2分鐘，因為 $60 \times 4 = 240$ $240 \div 120 = 2$ 真得很好玩，而且用舞步模式還可以變成一首舞曲呢！</p>
老師的 回應	<p>所以數學的部份計算很有幫助，在音樂整理上的學習。</p>

附件二 學習單

第一單元 取消數學課

單位換算

當山姆從著火的椅子上跳起 1 英里時，傑瑞明把它換算成 1.609 公里(P.09)，這可是英制和公制之間的單位換算。

- 1、旅美投手王建民曾在美國大聯盟投出時速 97 英里的球速，如果換成我們常用的單位“公里”，那代表時速是多少公里？
- 2、目前知道在世界上球類飛行速度最快的是羽毛球（不相信吧！），羽毛球的離拍速度最高可達每小時 180 英里，這代表時速是多少公里？
- 3、比較看看，羽毛球離拍速度最高比王建民投出時速 97 英里的球速快了多少公里？
- 4、請你舉例在日常生活中，我們會碰到的度量製單位的換算。例如：1 英吋 = 2.54 公分是長度單位的換算，常用在人的身高。

蝴蝶效應 (P.16)

「混沌」聽起來就像是「亂成一團」。但若從數學的觀點來看，卻是有邏輯可循的

- 1、請說明什麼是「蝴蝶效應」？
- 2、除了玩彈珠遊戲與「蝴蝶效應」有類似的情況外，請再舉其他的例子說明。

山姆的服裝組合秀 (P.11)

- 1、山姆的衣櫥上所貼的服裝搭配圖 (P.12)，分上、下兩個部份。說說看上、下兩部份有什麼地方不一樣？又有什麼地方是一樣的？
- 2、如果我們將褲子當作第一列、衣服為第二列、鞋子為第三列。現在第一列改成 2 條、衣服仍是 3 件、鞋子還是 3 雙。請您試著畫出服裝混搭組合圖，並且這樣有多少種不同的組合？
- 3、山姆的服裝混搭組合圖所展現的組合，又要每天穿的衣服從來不出現相同的組合，那他最多可以幾天是不同的搭配？
- 4、上一題的答案是不到一個月的，若要一個月 (30 天) 內能達成“穿的衣服從來不出現相同的組合”，請你幫山姆分配褲子、衣服及鞋子各需幾件會達成？（可能性有很多種，請試著列出最少的總件數）。
- 5、山姆買的服裝，喜歡買均一價，也就是他買的褲子都是 399 元，衣服 499 元，鞋子 599 元。同上題，如何花最少錢達成目標？

山姆與市長的賭注 (p.24)

- 1、山姆表示如果無法說服市長，將在市府服務一整年並收取工資。我們將工資“美分”改成熟悉的台幣“元”。請問第五天、第十天工資各是多少？
- 2、市長如果讓山姆去服務，一個月 (30 天) 後山姆將累積了多少工資？
- 3、山姆是一個熱愛數學的同學，你覺得他向市長提出的賭注聰明嗎？說說你的看法。
- 4、算算看一年後 (365 天)，山姆得到的總工資是多少？