尺規作圖：正 3、4、5、6、15 邊形

洪萬生

一、前言

有關尺規作圖之教學，顯然由於題目太難，因此，目前已經再不是中學數學課程與教學的重點了。其實，對於比較優秀的學生（甚至那些將來可能成爲中小學教師者）而言，這種學習活動所需要的解析 **(analysis) vs.** 綜合 **(synthesis)** 之能力，實在是數學經驗的極珍貴部分，非常值得適度地納入中小學數學教師的訓練教材，即使對於百分之八十的中學生而言，尺規作圖的確是太沈重了一些。目前的教材教法，主要強調直觀的進路與說明。

不過，幾何知識的教與學過程中，最值得凸顯的價值之一，或許是論證 **(reasoning)** 的智性需求 **(intellectual need)**。因此，過分地訴諸直觀，而忽略了直觀 vs. 論證之對比，則學習效果恐怕難以深入，從而幾何學的教學目標，大概也就不易達成了。

在本文中，我們打算從歐幾里得 **(Euclid)** 的經典《幾何原本》**(*The Elements*)** 取材，考察他如何「明智地」處理尺規作圖問題。取法數學的古典精華，向大師學習 **(Learn from the Masters!)**，[1]或許是可以讓數學的教或學更有品味的一種進路吧。

二、從正三角形到正方形

大部分的讀者應該都知道如何利用尺規作圖，在已知（或給定）線段上，求作一個正三角形（或等邊三角形）。依此類推，顯然，我們也應該很容易作一個正方形才是！然則這一問題究竟有多少人曾經認真想過？事實上，非常令人驚奇，這一問題一點都不簡單！至少放在歐幾里得《幾何原本》的脈絡就是如此！

讓我們先審察《幾何原本》**(*The Elements*)** 中，歐幾里得 **(Euclid)** 如何作一個正三角形或等邊三角形）：

命題 I. 1：在一個已知有限直線上作一個等邊三角形。

設 AB 是已知有限直線。那麼，要求在線段 AB 上作一個等邊三角形。
以 A 為心，且以 AB 為距離畫圓 BCD；（設準 3）
再以 B 為心，且以 BA 為距離畫圓 ACE；（設準 3）
由兩圓的交點 C 到點 A，B 連線 CA，CB。（設準 1）
因為點 A 是圓 CDB 的圓心，AC 等於 AB。（定義 15）
又點 B 是圓 CAE 的圓心，BC 等於 BA。（定義 15）

[1] 這是一本 HPM 論文集的書名，引自挪威早逝的天才數學家阿貝爾的一句話。

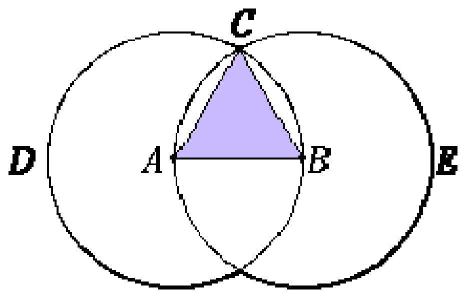
但是已經證明了 CA 等於 AB；所以線段 CA，CB 都等於 AB。

而且等於同量的量彼此相等。（公理 1）

所以 CA 也等於 CB。

三條線段 CA，AB，BC 彼此相等。所以三角形 ABC 是等邊的，即在已知有限直線 AB 上作出了這個三角形。

這就是所要求作的。



在上述引文（出自 **Heath** 版）中，**Prop. I.1** 指第 **I** 冊第一個命題（**Prop.**是 **proposition** 的縮寫），因此，正三角形的尺規作圖，乃是《幾何原本》全書的第一個命題，這對希臘數學的意義當然非同小可。原來，這是歐幾里得認爲可以被研究的幾何物件 **(geometric entities)**，莫過於那些可以經由尺規作出來的圖形。同時，由於它是全書第一個命題，所以，按照演繹科學 **(deductive science**，亞里斯多德的概念**)** 的規範，它必須只能運用定義 **(definition)**、設準 **(postulate)** 以及公理 **(common notion**，或譯爲共有概念**)** 來證明。而這些，正是《幾何原本》第 **I** 冊開頭的安排：依序爲 **23** 個定義，**5** 個設準，以及 **5** 個公理。因此，在上述引文中，**Post. 1**，**Post. 3** 分別代表設準 **1** 和 **3**，**C. N. 1** 代表公理 **1**，**I. Def. 15**，**I. Def. 20** 分別代表第 **I** 冊定義 **15** 和 **20**。至於 **Q.E.F** 則是拉丁字 ***quod erat faciendum*** 的縮寫，表示「得其所作」，亦即作圖完成的意思。

還有，我們也必須特別注意，歐幾里得的作圖題正如證明題一樣，不但都稱爲命題，而且都必須經過嚴密的證明。這或許可以解釋：何以正方形的作圖題必須安排在《幾何原本》第 **I** 冊的命題 **46**。[2]請參看下面引文：

命題 I. 46：在已知線段上作一個正方形。

設 AB 是已知線段；要求在線段 AB 上作一個正方形。

令 AC 是從線段 AB 上的點 A 所畫的直線，它與 AB 成直角。（I. 11）

取 AD 等於 AB；過點 D 作 DE 平行於 AB，過點 B 作 BE 平行於 AD，所以 ADEB 是平行四邊形；從而 AB 等於 DE，且 AD 等於 BE。（I. 34）

---

[2] 至於此一命題非出現不可的原因，乃是 I. 47 正是頂頂大名的畢氏定理，其中必須預設正方形的存在。

但是，**AB** 等於 **AD**，所以四條線段 **BA**、**AD**、**DE**、**EB** 彼此相等；所以平行四邊形 **ADEB** 是等邊的。

其次，又可證四個角都是直角。

因為，由於線段 **AD** 和平行線 **AB**，**DE** 相交，角 **BAD**，**ADE** 的和等於二直角。（**I. 29**）

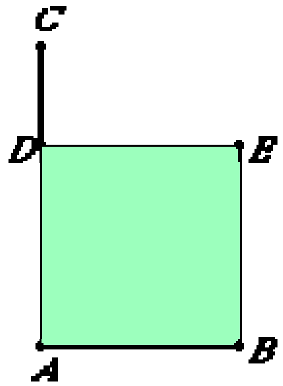
但是角 **BAD** 是直角；故角 **ADE** 也是直角。在平行四邊形面片中對邊以及對角相等。（**I. 34**）

所以對角 **ABE**，**BED** 的每一個也是直角。從而 **ADEB** 是直角的。

已經證明了它也是等邊的。

所以，它是在線段 **AB** 上作成的一個正方形。

作完。



在上述證明中，如果我們將歐幾里得所運用的命題 **I. 3**，**I. 11**，**I. 31** 和 **I. 34** 之成立所必須依賴的前導命題，整體追溯彙整，則可以列出求作一個正方形所必須假定的命題（不含設準和公理在內），總計有命題 **1**，**2**，**3**，**4**，**5**，**7**，**8**，**10**，**11**，**13**，**15**，**16**，**18**，**20**，**22**，**23**，**26**，**27**，**29**，**31** 和 **34** 等 **21** 個之多。由此可見，從正三角形到正方形的尺規作圖，一點都不是那麼容易可以「依此類推」！這也說明：從論證幾何（譬如以《幾何原本》爲範例）的觀點來看，直觀上有時相當「天真的」或「想當然爾」的「類推」**(analogy)**，並不見得永遠行得通！不過，這反過來更加證成 **(justify)** 幾何論證的重要意義！

這是歐幾里得留給我們的珍貴遺產，任何一位數學知識的愛好者都不應輕忽視之！

三、正 5 邊形、正 6 邊形與正 15 邊形

有關正 **5**、**6**、**15** 邊形之作圖，我們先提及出處：《幾何原本》第 **IV** 冊。現在，就讓我們介紹第 **IV** 冊的相關內容。在本冊中，正 **5** 邊形作圖列爲命題 **11**，不過，其「進路」**(approach)** 則是將此一正 **5** 邊形內接到一個已知圓內。還有，他的證明關鍵就在於本冊命題 **10**：

求作一個等腰三角形，使其底角為頂角之兩倍。

當然，此一等腰三角形的作圖，還是藉助於「外接圓」。[3]可見，歐幾里得充分地使用了外接圓這一個非常強而有力的概念工具，這對於我們從「系統觀」來理解《幾何原本》的知識結構，相當具有啓發性！

請注意，正如我們在第二節所提及，底下引文中的 **IV. 10** 代表《幾何原本》第 **IV** 冊第 **10** 命題，其餘類推。此外，如果要想在《幾何原本》的脈絡中嚴格證明正 **5** 邊形的尺規作圖，那麼，所需之命題最少 **40** 個，無怪乎此一作圖「被迫」安排到命題 **IV. 11**，顯然沒有外接圓的概念工具，是成不了事的。

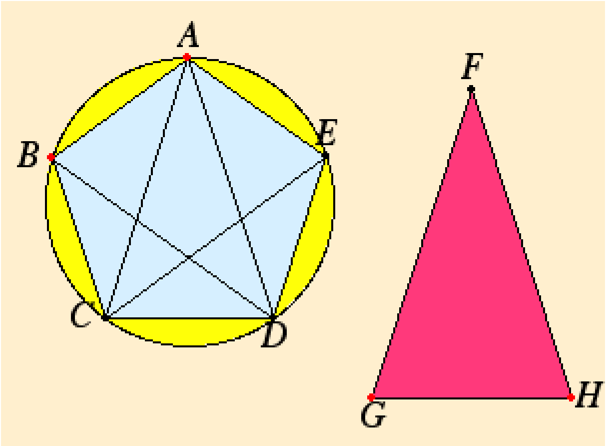
四、正 5 邊形之尺規作圖

命題 V. 11：求作已知圓的內接等邊且等角的五邊形。

設 ABCDE 是已知圓。要求在圓 ABCDE 內作一個等邊且等角的五邊形。
設等腰三角形 FGH 在 G，H 處的角的每一個都是 F 處的二倍。(IV. 10)
在圓 ABCDE 內畫一個和三角形 FGH 等角的三角形 ACD，這樣，角 CAD 等於在 F 的角，且在 G，H 的角分別等於角 ACD，CDA。(IV. 2)
故角 ACD，CDA 的每一個也是 CAD 的二倍。
現在，設角 ACD，CDA 分別被直線 CE，DB 二等分。(I. 9)
又連接 AB，BC，CE，EA。
那麼，因為角 ACD，CDA 是角 CAD 的二倍，且它們被直線 CE，DB 二等分。
故五個角 DAC，ACE，ECD，CDB，BDA 彼此相等。
但是，等角所對的弧也相等。(III. 26)
故五段弧 AB，BC，CD，DE，EA 彼此相等。
但是，等弧所對的弦也相等。(III. 29)
所以，五條弦 AB，BC，CD，DE，EA 彼此相等。
故五邊形 ABCDE 是等邊的。
其次，可證它也是等角的。
因為，弧 AB 等於弧 DE，給它們各邊加上 BCD，則整體弧 ABCD 等於整體的弧 EDCB。
又，角 AED 在弧 ABCD 上，且角 BAE 在弧 EDCB 上，故角 BAE 也等於角 AED。(III. 27)
同理，角 ABC，BCD，CDE 的每一個也等於角 BAE，AED 的每一個。
故五邊形 ABCDE 是等角的。
但是，已經證明了它是等邊的。
因此，在已知圓內作出了一個內接等邊且等角的五邊形。

作完。

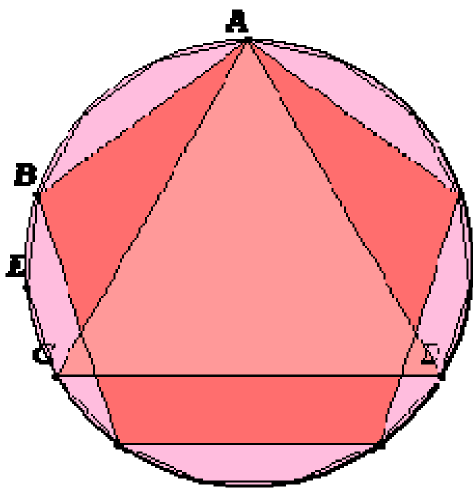
[3] 正 5 邊形作圖需要利用外接圓，這是一個相對於正 3、4 邊形作圖的極大差異，何以致此，值得深思。



同理，歐幾里得針對正 **6** 邊形、正 **15** 邊形的尺規作圖時，也是將它們內接到已知圓內，請分別參見 **David Joyce: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce** 命題 **IV. 15**，**16**。

五、正 15 邊形作圖

有關命題 **IV. 16** 證明，其關鍵在於如下圖，正三角形 **AC** 邊所對應的外接圓之 **AC** 弧如何五等分的問題。現在，既然正 **5** 邊形已經可以作圖，那麼，這個正 **5** 邊形的一邊 **AB** 所對應的 **AB** 弧，就佔了外接圓圓周的 **1/5**。由於 **AC** 弧佔了同一個外接圓圓周的 **1/3**，所以，**BC** 弧 ＝ **(1/3)**圓周 － **(1/5)**圓周 ＝ **(2/15)**圓周，於是，如果我們將 **BC** 弧二等分，得 **BE**、**EC** 弧，那麼，**BE**、**EC** 邊就是正 **15** 邊形的邊了。



David Joyce 注意到：*若 **m, n** 互質，我們就可以仿此一命題，利用正 **m** 邊形、正 **n** 邊形，為正 **mn** 邊形進行尺規作圖。*

針對尺規作圖可能性，《幾何原本》到第 **IV** 冊爲止，總共作出了正 **3** 邊形、正 **4** 邊形、正 **5** 邊形、正 **6** 邊形以及正 **15** 邊形。如果再應用命題 **III.30**（亦即將一個圓弧二等分），我們可以馬上得到下列圖形之尺規作圖：正 **8**、**10**、**12**、

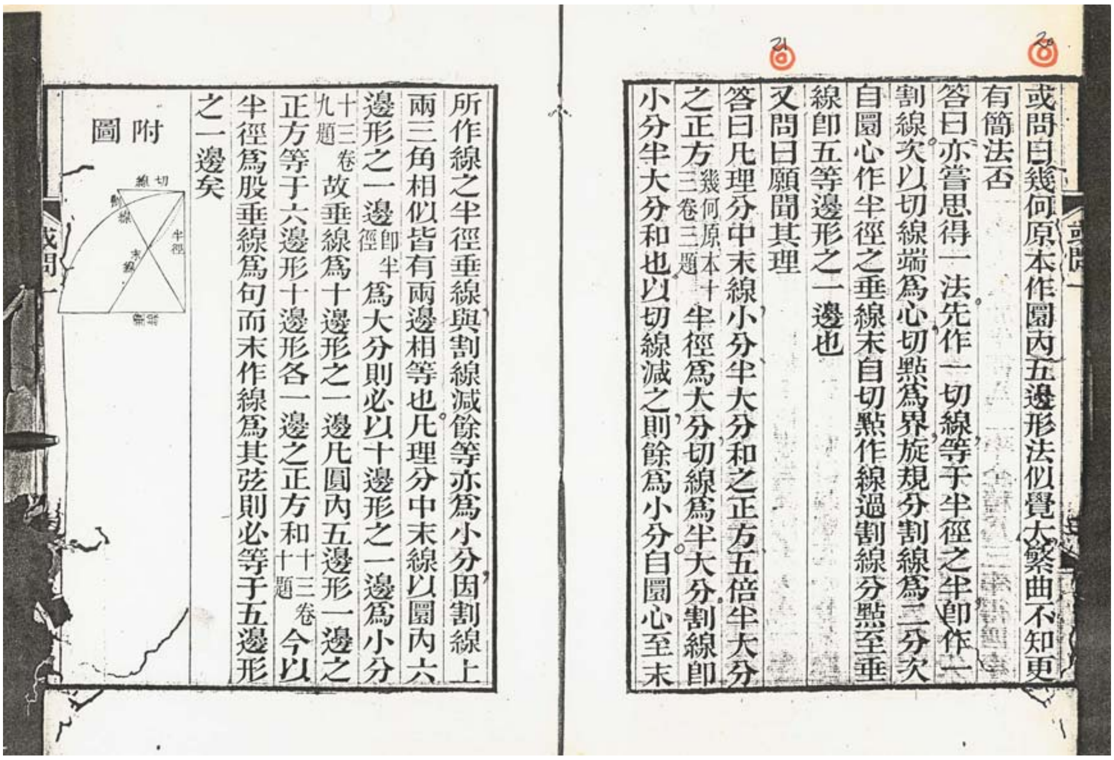
16、**20**、**2**4、30 邊形等等。

然則其他的正 **n** 邊形（譬如 **n = 7, 9, 11, 13, 17, 18, 19**）又如何呢？現在，該輪到偉大數學家高斯 **(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)** 上場了。他在十九歲時，證明了正 **17** 邊形可以尺規作圖，而在數學史上奠立了不朽的功績。

六、李善蘭的正 5 邊形作圖

最後，我們順便介紹中國數學家李善蘭 **(1811-1882)** 所提供的一個正 **5** 邊形的作圖，茲將此一文本掃瞄如下，請大家參考解讀。請注意：李善蘭的作圖及證明，主要依賴《幾何原本》命題 **XIII. 3**，**9**，**10**（在此，他分別稱爲第十三卷三題、九題和十題）。由於李善蘭協同英國傳教士偉烈亞力 **(Alexander Wylie)** 合譯《幾何原本》後九卷（他們所根據的英國版本，多收入兩卷），可見他相當熟悉此一經典之內容，而且還有能力應用以證明正 **5** 邊形之作圖，實在相當難能可貴。我們相當期待讀者可以自行將它「翻譯」成現代證明，以便更深刻欣賞他的創意！

還有，也請注意：這是相當典型的「解題活動」，因爲李善蘭利用了《幾何原本》後面的命題（第 **XIII** 冊），來證明前面的命題（第 **IV** 冊），而不是像歐幾里得一樣，想要建立一個數學結構。不過，其中似乎並沒有出現邏輯循環 **(logical circularity)** 的問題，請大家自行檢視。


或問曰幾何原本作圜內五邊形法似覺大繁曲不知更有簡法否

答曰亦嘗思得一法先作一切線等于半徑之半即作一割線次以切線端爲心切點爲界旋規分割線爲二分次自圜心作半徑之垂線末自切點作線過割線分點至垂線即五等邊形之一邊也

又問曰願聞其理

答曰凡理分中末線小分半大分和之正方五倍半大分之正方（幾何原本十三卷三題）半徑爲大分切線爲半大分割線即小分半大分和也以切線減之則餘爲小分自圜心至末所作線之半徑垂線與割線減餘等亦爲小分因割線上兩三角相似皆有兩邊相等也凡理分中末線以圜內六邊形之一邊（即半徑）爲大分則必以十邊形之一邊爲小分（十三卷九題）故垂線爲十邊形之一邊凡圜內五邊形一邊之正方等于六邊形十邊形各一邊之正方和（十三卷十題）今以半徑爲股垂線爲句而末作線爲其弦則必等于五邊形之一邊矣

附圖

李善蘭正 5 邊形作圖及證明 **(1867)**

七、結語

由本文論述可知，尺規作圖本身有其深刻的學習價值。此外，從論證學習的觀點來看，《幾何原本》中的這五個命題，也可以發揮科學哲學大師孔恩 **(Thomas Kuhn)** 所謂的範例 **(examplar)** 之功能。事實上，任何人要想體認數學知識的結構面向 **(structural aspects)** 之意義，那麼，充分掌握前兩個命題（亦即 **I. 1** 和 **I. 46**）的作圖及其證明，大概就綽綽有餘了，這是因爲有關它們的論證之理解，就涵蓋了本經典的整個第 **I** 冊的內容。而這當然也說明了論證與數學結構之密切關連。

或許有人辯稱這些古典的材料已經不合時宜，因爲目前電腦繪圖工具十分發達，尺規作圖不啻是一堆活化石，根本失去了教學的價值與意義。儘管如此，我們也必須注意目前非常風行的 **GSP** 軟體的幾何作圖功能，就是依據尺規作圖的原理所設計。換句話說，只要尺規作圖無法達成，那麼，該一圖形就無法「精確」畫出！更何況，我們還在國外相當知名的科普書籍中，赫然發現作者宣稱正 **7** 邊形、正 **9** 邊形可以尺規作圖！[4]在這種情況下，如果帶領閱讀科普的教師無法正確地引領學生，那麼，所謂的全民的科學素養之提升，就變成爲一個超級大笑話了。

參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). ***Thirteen Books of Euclid's Elements*****. New York: Dover Publications, INC.**

Joyce, David: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce.

李善蘭 **(1867).**《天算或問》，收入李善蘭，《則古昔齋算學》。

4