主題 尤拉公式

國立台灣師範大學數學系　黃文達

§1 公式導出

考慮一片耕地共有 E 條田埂，將此片耕地分割成 F 塊(含外部的一塊)，二條田埂的交點爲某塊田的角頂，設角頂共有 V 個。想像最外面一塊田充滿著水，欲灌溉全部田地，由外圍開始，每挖掉一條田埂就可灌溉一塊田，當然爲灌溉全部田地及修復田埂起見，田埂能夠不挖盡量不挖，當全部灌溉完畢時，我們觀察田埂的情形：

（1） 欲多灌溉一塊田地，必須多挖掉一條田埂，而原先共有 F-1 塊乾地，故被挖去的田埂數爲 F-1 條。

（2） 固定任一角頂，我們必可由此角頂經由未挖去的田埂不需涉水，及可達到其他任意角頂，如果有一角頂無法經由乾路到達，則必定有一條田埂不需挖而被挖掉了。

由固定角頂到其他頂點的乾路必唯一，否則必有一塊田地仍爲乾地，我們將其他頂點與到達此頂點的最後一段路一一對應，發現未被挖去的田埂數恰爲 V-1 條。

由（1）（2）知，田埂總數爲未挖去的田埂數加上已挖去的田埂數，即

E=(F-1)+(V-1)

得證尤拉公式　V-E+F=2

§2 西瓜的切割

問題 1：平面上有 n 條相異直線，這 n 條直線可將此平面分割成多少塊區域？

如果這 n 條直線任二直線必相交，任三條直線不共點，則此 n 條直線必有 C(n,2)個交點，外加一個無窮遠點，因此

$$V=C(n,2)+1$$

又每條直線都會與其他直線都會相交，因此這條直線上共有 n-1 個交點，這條直線被分成 n 段，因此

$$E=n^2$$

利用 Euler 公式可知

$F=2-V+E$

$$=2-C(n,2)-1+n^2=1-\frac{n(n-1)}{2}+n^2=\frac{n^2+n+2}{2}=C(n,2)+C(n,1)+1$$

問題 2：平面上有 n 條直線，這 n 條直線將平面分割成多邊形區域，這些區域中有多少個是有界的?有多少個是無界的?

n 條直線在平面最多有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個交點，可找出一個很大的圓包含所有的交點， 則此圓與給定的 n 條直線相交於 2n 的點 此圓周被分割成 2n 段，又每一段恰在一個無界區域上， 故無界區域恰有 2n 個，從而有界區域共有

$$\frac{n^2+n+2}{2}-2n=\frac{n^2-3n+2}{2}$$ 個

研究問題：射影平面上 n 條直線將此平面分割成多少個區域？

Ans：$\frac{n^2+n+2}{2}-n=\frac{n^2-n+2}{2}$ 條

問題 3 如果限制這 n 條直線任二不平行任三不相交，則其中有多少個區域是三角形區域？

解：（1）**三角形區域個數的上界**：由於任三線不共點，三角形不會有公共邊，故總邊數為 3a，另一方面由於每個邊都是基本線段，而每條直線上有 n-2 個基本線段，故得

$$3a\le n(n-2)\Rightarrow a\le\frac{n(n-2)}{3}\ ,$$

當 n=3,4,5,7,9,15 時等號成立。

（2）**三角形區域個數的下界**：

設直線 ℓ 與另外 n-1 條直線的交點依次為 $A_1, A_2,\ldots, A_n$，基本線段 A_iA_{i+1}, 與過 A_i, A_{i+1} 的直線圍成三角形 $\triangle BA_iA_{i+1}$ $(1\le i\le n-2)$，任意直線穿過這個三角形將它分成兩塊時，仍有一塊為三角形區域，因此在整個構圖中每個 $\triangle BA_iA_{i+1}$ 都有三角形區域，它們的頂點中必有一個離 ℓ 最遠，記為 P_i，由於 $i\neq j$ 時 $\Delta_i\neq\Delta_j$，就得到 $a\geqq n-2$。

問題 4 空間中任作 n 個平面，最多將空間分成多少個區域？

ans：$\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$

問題 5 **瓜皮問題：**

（a）平面上任作 n 個圓，最多將平面分成多少個區域？

（**b**）空間中任作 n 個球，最多將空間分成多少個區域？

Ans： a. n^2-n+2 **b.** $\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$

問題 6 平面上任作 n 個凸 m 邊形，最多將平面分成多少個區域？

解： 設最多個數為 u_n ，則 $u_1=2$，$u_n=u_{n-1}+2m(n-1)$

故 $u_n \le u_1 + 2m\sum_{i=1}^{n-1} i = mn(n-1)+2$

等號成立的構形：將直徑為 1 的圓周 mn 等分，交錯連成 n 個正 m 邊形，每兩個 m 邊形交於 2m 個點，每條邊上的 2(n-1)個交點都不重合，因此等號成立。

問題 5 平面上任作 n 條拋物線，最多將平面分成多少個區域？
如果限制拋物線的軸互相平行，最多將平面分成多少個區域？

§3 Pick 面積公式

熱流證法：

設 P 為格子多邊形，內部共有 I 個格子點，邊上共有 b 個格子點，

Pick 面積公式：P 的面積為

μ(P)= $i+\frac{b}{2}-1$

設初始時刻 t=0 時，每個格子點有一單位的熱源，熱量從格子點散佈到整個格子板上，經過長時間後，熱量均勻分布在整個格子板上，且平均密度為 1，此時格子多邊形的總熱量恰為格子多邊形的的面積 μ(P)。

問題：格子多邊形 P 的總熱量來自何處？

觀察下面事實：

(1) 設 e 為格子多邊形 P 的一個邊，M 為 e 的中點，不在 e 上的格子點成對對稱於 M 點，從每組成對的格子點所散發出來且穿過邊 e 的熱量相等，但其方向相反，因此穿過邊 e 的熱流總和為 0。因此我們可說格子多邊形 P 的總熱量來自 P 內部的格子點和來自 P 邊界∂P 上的格子點。

(2) 計算格子多邊形的總熱量 μ(P)，來自 P 內部的格子點共有 i 個，每個熱量為 1，共有 i 單位的熱量；來自邊界∂P 但不為頂點的格子點，每個熱量為 1，有一半的熱量留在 P，來自頂點的格子點，每個熱量為 1，有(內角/2π)，即一半再扣掉(外角/2π)的熱量留在 P 中，來自邊界∂P 上的格子點共有（$\frac{b}{2}-1$）i 單位的熱量留在 P 中。

綜合(1)(2)可導出 $\mu(P)=i+\frac{b}{2}-1$。

幾何證法：

先考慮有兩條直角邊分別平行於兩座標軸的格點直角三角形，此三角形無論

沿橫座標軸方向，縱座標方向，無論平移多少整數單位長，均不影響其邊上及其內部的格點數，故不妨設這個格點三角形的頂點是 O(0,0), A(a,0), B(0,b)，a,b 均為正整數。

設 AB 內部不含端點的格子數為 u，內部格子點數 q，邊上的格子點數為 p=u+a+b+1。取 C 為點 (a,b)，則矩形 OACB 內部格子點數為 (a-1)(b-1)=u+2q，得

p+2q=u+a+b+1+2q

=(a-1)(b-1)+a+b+1

=ab+2

=2ΔOAB +2

從而

$$\Delta\text{OAB}=\frac{1}{2}p+q-1$$

進而考慮一般的格子三角形，它可視為一個含它的矩形截去若干個格點直角三角形得到的。

最後考慮一般的格子多邊形，它可分割為若干個格點三角形。

尤拉公式證法：

基本三角形是指三個頂點是格子點且內部和邊上都沒有其他的格子點的三角形。

（1） 所有的基本三角形其面積都是 1/2

（2） 所有的格子多邊形都可分解成基本三角形

將給定的格子多邊形可分解成基本三角形，然後在複製此格子多邊形，將兩個格子多邊形沿著邊界黏合起來得到球面上的連通圖形，由尤拉公式知

V’-E’+F’=2

因這個連通圖形的面都是三角形區域，因此 2E’=3F’；又圖形式上下對稱，

得知 F’=2F， V’=2I+b

代入尤拉公式得

2I+b-3F+2F=2

解得 F＝2I+b-2

因此格子多邊形的面積是 $\frac{1}{2}F=I+\frac{b}{2}-1$

§4 正三角形的相異正三角形分割

問題：是否能將一個正三角形分割成若干個大小均異的小正三角形?

設一個正三角形有一個相異小正三角形分割，記此分割為 T。T 的頂點可

分爲三大類：（1）原大正三角形的頂點 （2）六個小三角形的公共頂點 （3）恰爲三個小三角形的公共頂點，其他的π角在 T 的外部或爲某個小三角形內部。

首先構造一個連通圖形：

結點：（a）在分割 T 的小三角形中心放置一個紅點，

（b）在恰爲三個小三角形的公共頂點上均放置一個綠點，

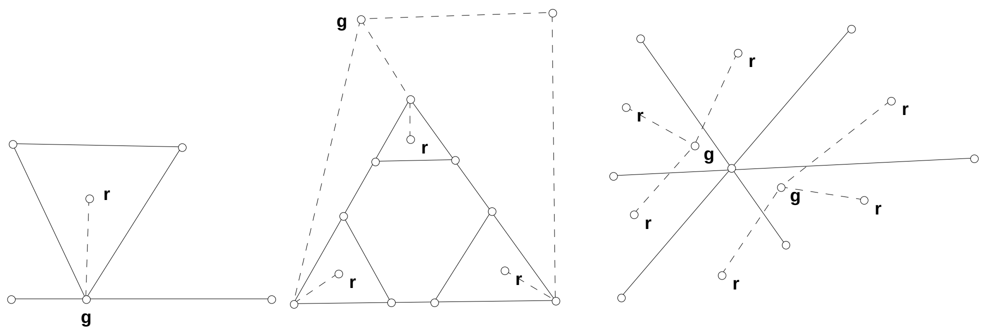
（c）在大正三角形的外部某定點放置一個綠點，

（d）在六個小三角形的公共頂點選出一對對頂角，在此角頂附近各放置一個綠點。

弧： （a）若小三角形中心有一紅點，有一頂點爲綠點，將此兩點連成一弧；

（b)連結包含原大正三角形頂點的小正三角形中心的紅點與外部的綠點；

（c）在包含六個小三角形的公共頂點的小正三角形中心的紅點，或與該三角形的綠點相連，或與緊鄰該三角形的綠點相連。



假設 T 共被分割成 n 個小三角形，則此連通圖形共有 n 個紅點，每條弧都是連接一個紅點與一個綠點，每個紅點恰與三個綠點相連接，故

E=3n；

又每個綠點都與三條弧相連，故知綠點共有 n 個，因此

V=n+n；

利用尤拉公式知 $F=E-V+2=3n-2n+2=n+2$。

設 c_i 爲恰由 i 條弧所圍成區域的個數，因爲每個面都是紅綠結點交替連接射，當 i 爲奇數時，$c_I=0$，又每對結點最多只有一弧連接，因此 $c_2=0$，從而

$$F=c_4+c_6+c_8+\ldots=n+2$$

因每條弧都是兩線的交線，故

$$2E=4c_4+6c_6+8c_8+\ldots=2(3n)=6n$$

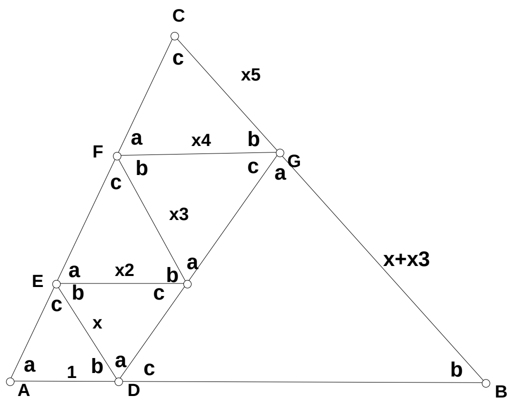
消去 n 可得

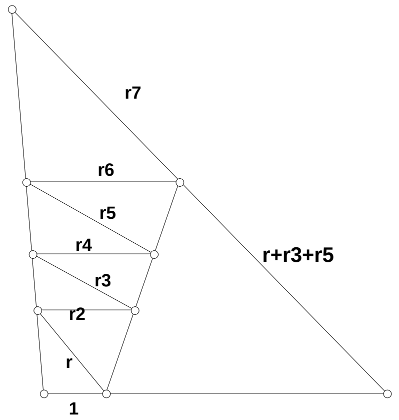
$$6=c_4-c_8-2c_{10}-\ldots$$

因此 $c_4\geq 6$，及至少有六個四邊形區域。

由連通圖形的造法我們知道至少有一對三角形具有公共邊，此時這兩個三角形全等，與假設矛盾。

問題：任給一個非正三角形，是否必有一個彼此相似且大小相異的三角分割？





當 $x+x^3 \neq x^4$ 時，非正三角形的相異相似分割如左上圖
當 $x+x^3 = x^4$ 時，非正三角形的相異相似分割如右上圖。

問題：球面上是否存在一個圖形使得每個頂點至少引出六條弧？

設 c_i 爲恰由 i 條弧所圍成區域的個數， 每對結點最多只有一弧連接，因此 $c_2=0$，因每條弧都是兩線的交線，故

$$2E=3c_3+4c_4+6c_6+8c_8+\dots\geq 3F$$

設 V_k 表示恰引出 k 條弧的頂點個數，由假設知

$$V_1=V_2=V_3=V_4=V_5=0,\ 故$$

$$2E=6V_6+7V_7+8V_8+\dots\geq 6V$$

利用尤拉公式知 $6(E+2)=6(V+F)\leq 2E+4E=6E$。
這是不可能的，因此至少有一個頂點引出的弧數少於 6。