主題：勾股三元數組

國立台灣師範大學數學系　黃文達

從國中數學知 (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17)都是邊長爲互質整數的直角三角形三邊長，如何找出所有由互質整數的直角三角形三邊長構成的勾股三元數組？

1 畢達哥拉斯的堆石子解法

畢達哥拉斯發現，用三個正整數表示直角三角形的邊長的一種公式，也就是不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一種解：$2k+1$, $2k^2+2k$ 是二股，$2k^2+2k+1$ 是斜邊. 據說這個構想來自堆石子遊戲，先用石子堆成邊長爲n+1 之正方形，然後剝掉一層，變成邊長爲 n 之正方形與含 2n+1 個的一堆石子，最後考慮 n 必需爲何值時，2n+1 個石子才能拼出一個邊長爲 m 之正方形.利用代數式表出爲

$$(n+1)^2=n^2+(2n+1)=n^2+m^2$$

因 $m^2=2n+1$，知 $n=\frac{m^2-1}{2}$ 爲整數，故m必爲奇數. 令 $m=2k+1$，則

$$n=\frac{(2k+1)^2-1}{2}=2k^2+2k.$$

因此，可得 $2k+1$，$2k^2+2k$ 是二直角邊，$2k^2+2k+1$ 是斜邊，取 $k=1,2,3,4,5$ 可得直角三角形之三邊長爲

(3, 4, 5);(5, 12, 13);(7, 24, 25);(9, 40, 41);
(11, 60, 61).

2 丟番圖的思維

畢達哥拉斯發現的公式，只不過是不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的部份解. 全部本原解的公式是

$$x=2mn \quad y=m^2-n^2 \quad z=m^2+n^2$$

其中m>n 是互質，且爲一偶一奇的正整數. 多數學者認爲最先得到這全部解的是丟番圖. 他的思路是這樣的:

設z爲已知平方數，欲求 x,y 使 $z^2=x^2+y^2$. 改寫成 $z^2-x^2=y^2$. 因左式爲 x 之二次式，要使兩端平衡，可設 y 爲 x 之一次式 kx-z，其中 k 是有理數，第二項必需爲-z，否則即將出現矛盾. 於是

$$z^2-x^2=y^2=k^2x^2-2kzx+z^2$$

解之得 $x=\dfrac{2kz}{k^2+1}$， $y=\dfrac{k^2-1}{k^2+1}$.令 $k=\dfrac{m}{n}$ ，$z=m^2+n^2$ 代入可得正整數解

$$x=2mn \quad y=m^2-n^2 \quad z=m^2+n^2$$

因爲 x,y,z 三數互質，故 m,n 兩數必須互質且爲一奇一偶，至於一般的必是三元數組形如

$$x=2kmn \quad y=k(m^2-n^2) \quad z=k(m^2+n^2)$$

3 費馬的斜率方法

從解析幾何的觀點來看，若 a，b，c 滿足 $c^2=a^2+b^2$ 則 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$，即 $\left(\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}\right)$爲單位圓周 $x^2+y^2=1$上的有理點，今已知 (0，-1)爲單位圓上的一點，若(a，b)亦爲單位圓周上的有理點，則此兩點的連線其斜率爲有理數，反之給定一有理數斜率$\dfrac{m}{n}$ ，則過點(0，-1)且斜率爲$\dfrac{m}{n}$ 之直線 $y=\dfrac{m}{n}x-1$與單位圓 $x^2+y^2=1$ 之交點 $\left(\dfrac{2mn}{m^2+n^2},\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$ 亦爲有理點，因此

$$\frac{a}{c}=\frac{2mn}{m^2+n^2},\frac{b}{c}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} ,$$

取 $c=m^2+n^2$ ，則 $a=2mn$，$b=m^2-n^2$。

4 因數分解

如果要採用較爲嚴密的證明, 可先導出兩個引理:

(1) 若 n 爲奇數, 則 n^2 用8 除之所得的餘數必爲1.

(2) 若 m, n 均爲奇數, 則 m^2+n^2 不可能爲完全平方數.

定理：設a,b,c 爲互質之三個正整數,且滿足$a^2+b^2=c^2$, 則

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2,$$

其中m>n 是互質, 且爲一偶一奇的正整數.

證明:1.因a,b 互質, 知 a,b 不可能同時爲偶數. 又a^2+b^2 爲完全平方數. 由引理二得知a,b 不可能同時爲奇數. 故可設 a爲奇數,b爲偶數, c爲奇數. 因

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$$

令$c+a=2p$, $c-a=2q$, 則 $a=p-q$, $c=p+q$.

2. 欲證p,q 爲互質, 又爲完全平方數.

若爲質數, $d\mid p$且$d\mid q$, 則$d\mid(p+q)$ 且$d\mid(p-q)$, 即 $d\mid c$且$\mid a$. 故$d\mid c^2-a^2$, 即$d\mid b^2$, 因此$d\mid b$. 故 a,b,c 不是互質的.

因b 爲偶數, 令$b=2r$ 代入$b^2=2p\times 2q$ 得 $r^2=p\times q$. 利用p, q 互質, 得證p, q 均爲完全平方數.

3. 令$p=m^2$, $q=n^2$, 代入得

$a=p-q=m^2-n^2$, $c=p+q=m^2+n^2$, $b^2=2p\times 2q=4m^2n^2$, 故$b=2mn$.

5 高斯的複整數思維

利用高斯複整數的概念，也可得出畢氏三元數組。設a,b爲整數則$a+bi$爲高斯複整數，當然整數可算作是高斯複整數，整數中的質數，可以是2，可以是形如$4n+1$的，也可以是形如$4n+1$的，因爲

$2=(1+i)(1-i)$

形如$4n+1$的質數p一定可以表成 a^2+b^2的形式，**因此**

$p=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$在高斯複整數不再是質數，

形如$4n+1$的質數p在高斯複整數仍是質數。

在這種認知下，任何一個正整數仍可分解成高斯複整數中質數的連乘積，利用這個性質我們可導出畢氏三元數組，由於

$z^2=x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$

因爲 x,y 互質， $x+iy,x-iy$也一定要互質，利用因數唯一分解定理知

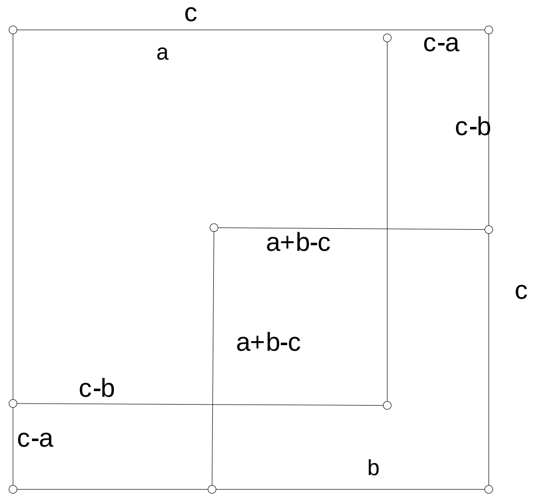
$x+iy=e(m+ni)^2$, $e=1,-1,i,$或$-i$

因 $(m+ni)^2=(m^2-n^2)+2mni$ ，比較兩邊實部與虛部，可得

$x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$ 或 $y=m^2-n^2$, $x=2mn$, $z=m^2+n^2$。

6 劉徽勾股差爲定值的勾股形構作

劉徽在勾股章提出勾股數的構作方法，首先，將邊長分別爲直角三角形三邊長 a,b,c 爲邊的三個正方形按下圖的方式排列



中間重疊部分的面積恰爲右上及左下兩個矩形面積的和，因此

$2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$ ....(*)

開平方得 $a+b-c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$

因此

$$a=(a+b-c)+(c-b)=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$$

$$b=(a+b-c)+(c-a)=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$$

$$c=(a+b-c)+(c-a)+(c-b)=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)$$

因 a, b, c 均爲正整數，可取兩個正整數 p,q 滿足

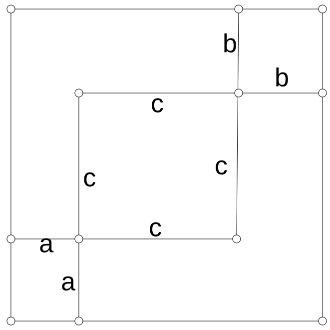
$c-a=2p^2$, $c-b=q^2$，

此時 $a+b-c=2pq$， 可得直角三角形三邊長爲

$$a=2pq+q^2$$

$$b=2p^2+2pq$$

$$c=2p^2+2pq+q^2$$



其次，將邊長分別爲直角三角形三邊長 a,b,c 爲邊的三個正方形按左圖的方式排列，由於中央的正方形面積恰爲右上及左下兩正方形面積之和，因此大正方形的面積恰爲右下及左上兩正方形之和，故得

$2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2$ ....(**)

劉徽利用兩個恆等式(*)(**)給出一個構作勾股形的迭代方法：從一個比較小

的勾股形 (a,b,c) 構作出一個比較大的勾股形 (a’,b’,c’)，使得勾股差保持不變 b’-a’=b-a，它的做法如下：取 c’-a’=c+b, c’-b’=c+a ，利用恆等式(*)(**)得知 a’+b’-c’=a+b+c，由此可解出

a’=2a+b+2c, b’=a+2b+2c, c’=2a+2b+3c................(***)

劉徽從最小的勾股三角形(3,4,5)出發，利用公式依次可得

$(3,4,5)\Rightarrow(20,21,29)\Rightarrow(119,120,169)\Rightarrow(696,697,985)\Rightarrow\ldots$

問題：按照劉徽的迭代程序是否可找出所有勾股差為 1 之勾股三角形呢?

我們容易察覺劉徽的迭代程序是可逆的，也就是說從劉徽的迭代程序可以解出 a,b,c ，亦即

$$\begin{cases} a = 2a'+b'-2c' \\ b = a'+2b'-2c' \\ c = -2a'-2b'+3c' \end{cases}$$

由三角不等式知

$c=-2a'-2b'+3c'=c'-2(a'+b'-c')<c'$

因此(a,b,c) 為較小的勾股三角形；又

$2a'+b'-2c'=a>0 \Rightarrow 2a'+b'>2c' \Rightarrow (2a'+b')^2>4c'^2=4a'^2+4b'^2$

$\Rightarrow 4a'>3b' \Rightarrow a'>3(b'-a')=3$

因此所有勾股差為 1 的勾股三角形必可還原到一個勾不大於 3 的互質勾股三角形，而勾股差為 1 且勾不大於 3 的互質勾股三角形只有(3,4,5)而已，故所有勾股差為 1 之勾股三角形可按照劉徽的迭代程序從 (3,4,5) 出發全部找出。

問題：哪些正奇整數可為互質勾股三角形的勾股差?

問題：設 d 為某些互質勾股三角形的勾股差，按照劉徽的迭代程序是否可找出所有勾股差為 d 之勾股三角形呢?

一些結論

1. 正奇整數 3,5,9 不可能為互質勾股三角形的勾股差。
2. 勾股差為 7 的互質勾股三角形共有兩組，分別由(5,12,13)，(8,15,17) 出發，依照劉徽的迭代程序得出。

7. 有關畢氏三元數組的問題

1. 有多少個本原三角形，使它的一股長為給定的正整數 A？
2. 有多少個畢氏三角形，使它的一股長為給定的正整數 A？
3. 畢氏三角形的斜邊長有何特殊的形式？有多少個畢氏三角形，使它的斜邊長為給定的正整數 A？
4. 若 A 為給定的正整數，有多少個畢氏三角形，使它的斜邊或一股長為給定的正整數 A？
5. 求出一個最小正整數，使之成為一個定數（如 1000）個直角三角形的一股長？
6. 求出一個最小正整數，使之成為一個個直角三角形的斜邊或一股長，而這樣的直角三角形正好有 1000000 之多？
7. 推導出勾股差恰為 1 的直角三角形的通式，試求出前 100 個此類三角形？
8. 求出至少三個具有相同面積的畢氏三角形？
9. 求出具有最小周長而面積正好超過 1000000 的畢氏本原三角形？
10. 三邊邊長均介於 2000 與 3000 的本原畢氏三角形有哪些？
11. 求出具有下面性質的本原三角形：
    （1）面積為定值
    （2）周長為定值
    （3）面積是平方數
    （4）周長是平方數
    （5）面積與周長的和是立方數
    （6）面積與斜邊等值
    （7）斜邊的平方加面積仍為平方數