穿透真實無窮的康托爾：集合論的「自由」本質

洪萬生
台灣師範大學數學系

一、前言

循環小數 **0.999…**是否等於 **1**，或者循環小數 **0.333…×3** 是否等於 **1**，與我們如何認識 **{0.9, 0.99, 0.999, …}**這個無窮集合 **(infinite set)** 的「整體性」息息相關。這個概念，涉及了人類首度穿透無窮的「魔障」，從而也幫助我們得以刻劃了有關無窮的「等級」。這是德國數學家康托爾 **(Georg Cantor, 1845-1918)** 在數學史上所留下的不朽貢獻！

這一數學史上最爲波瀾壯闊的史詩，卻也同時映照了康托爾一生的哀愁。但也多虧了他的虔誠宗教信仰，我們才得以體會數學與宗教的密切互動，大大地裨益了康托爾有關無窮的認識，以及他如何保障相關數學知識的正當性。

本文一方面意在說明康托爾集合論的價值與意義，另一方面，我們也希望爲數學與宗教的關係，再多下一個註解，以便豐富我們對於數學知識活動的多元面向之想像。

二、無窮集合何以需要分類？

康托爾數學的原創性，完全在於他如何以「集合」這樣一個樸素的概念，洞穿了有關無窮的概念之本質。比如說吧，他發現：吾人利用一一對應關係，[1]即可證明偶數集合與自然數集合－都是無窮集合－的個數一樣多；[2]也可以證明自然數集合的個數與有理數的集合一樣多；[3]然而，實數集合的個數卻比有理數集合的個數多很多。換句話說，前二者的兩個集合的「無窮多」一樣多，但是，最後的兩個「無窮多」卻讓康托爾區別出大小的等級來了。

正如有限集合一樣，無窮集合也可以利用一一對應來進行比較，從而區別出大小來。這個運算，幫助康托爾針對無窮集合定義基數 **(cardinal number)**，用以指定這些集合的大小 **(size)**。至於他首次體認到無窮集合必須分類，是他從

[1] 根據希臘數學史家的最新研究成果，阿基米德曾經在兩個無窮集合之間，建立一一對應關係；此外，他還非常明確地將無窮多項的級數加總起來。讀者如有意理解這兩項希臘數學史的新發現，不妨參考新近出版的《阿基米德寶典》(內茲、諾爾合撰，2007，天下文化出版)。儘管如此，康托爾「自由創造」超窮的 (transfinite) 集合論，卻是屹立不搖的貢獻。

[2] 通過 $n \leftrightarrow 2n$ 的一一對應，可知自然數集合 N={1, 2, 3, … n, …} 與偶數集合 E={2, 4, 6, … 2n, …} 之個數一樣多。

[3] 請參看附錄 I。

1870 年開始，接受漢內 **(Eduard Heine, 1821-1881)** 的建議，[4]開始研究傅氏級數的表現式之唯一性問題所引發的。沒想到，他的下一步竟然是直接針對無窮集合本身，進行人類歷史上的空前大探索。最後，康托爾將原先的研究工具－「集合」變成了目的，爲集合而集合起來了。從 **1874** 年開始，康托爾利用一系列的論文，爲我們陸續揭開「真實無窮」**(actual infinity)** 的奧秘。

不過，真正在認識論上造成巨大衝擊，莫過於 **1877** 年，當康托爾發現正方形內的點之個數（或基數 **cardinal number**）與其邊的點之個數「一樣多」（或相等）時（也就是這兩個無窮集合的「無窮多」爲同樣「等級」，或者如康托爾所說，它們的「冪」**(power)** 相等），他自己也嚇了一大跳！**1877** 年 **6** 月 **29** 日，當他寫信向他的好友戴德金 **(Richard Dedekind, 1831-1916)** 告知此一證明時，他寫下了數學史上極爲著名的一句話：「我看到它，但是，我不相信它！」其實，「偶數」的個數與「自然數」的個數一樣多，或者「有理數」的個數與「自然數」一樣多，也就罷了（儘管這些都挑戰了直觀意義的「全量大於分量」）。現在，康托爾又冒出了新發現：「二維的正方形與一維的線段，擁有一樣多的點」，那真是更令人匪夷所思了。

當這篇論文在 **1877** 年 **7** 月 **12** 日投稿到柏林大學發行的《克雷爾期刊》**(*Crelle Journal*)** 時，[5]主編克隆涅克 **(Leopold Kronecker, 1823-1891)** 儘管怎麼看都挑不出邏輯推論上的紕漏，可是，它的結論之意義究竟何在呢？克隆涅克也無從判斷，所以，他只好將稿件暫時壓著，直到 **1878** 年才刊出。康托爾出身柏林大學，克隆涅克曾經是他的老師。就是由於此一插曲及其他因素，康托爾從此不再投稿《克雷爾期刊》，而轉投由克萊因 **(Felix Klein, 1849-1925)** 所主編、由哥廷根大學發行的《數學年刊》**(*Mathematische Annalen*)**。這兩份數學期刊見證了互相競爭的柏林、哥廷根兩大學派，如何在十九世紀下半葉共同締造了德國的數學霸權。

無論如何，上述事件對於一心一意想要利用這些論文的發表（尤其是在當時聲望最高的《克雷爾期刊》出刊），以便爭取回母校柏林大學任教的康托爾來說，帶來了極大的壓力。另一方面，這一段插曲，也揭開了康托爾的集合論如何在數學家社群中取得合法地位的序幕。其實，克隆涅克所以「壓稿」也並非全然由於他的數學哲學立場（他不接受集合論所內稟的「真實無窮」**(actual infinity)** 觀點）使然，對於數學社群而言，一個數學理論或成果有沒有「意義」，經常不只

---

[4] 漢內也是出身柏林學派，在函數論方面貢獻卓著。目前我們所學的極限如 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 定義爲：對於所有的正數 ε，存在一個正數 η_0 使得對於 $0<\eta<\eta_0$，$\left|f(x_0\pm\eta)-l\right|<\varepsilon$，就是首見於 1872 年漢內的著作。而那是他深受外爾斯特拉斯學派的「分析算術化」(arithmetization of analysis) 影響之產物。

[5] 本刊現名 *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*。1826 年由 August Leopold Crelle 所創刊，故名之。剛創刊時，Crelle 獨具慧眼，刊登了挪威天才數學家阿貝爾 (Niles Henrik Abel, 1802-1829) 有關五次方程解的經典論文，而聲名大噪。

是有關它的「證明」已經被接受了，顯然還有知識的其他面向需要安頓。正如數學史家道本周 **(Joseph Dauben)** 指出：「論證一個新理論的數學一致性 **(consistency)**，從而斷定它的合法性 **(legitimacy)**，從來就是不夠的。」其實，基於現代數學教育有關「證明與理解」關係的深入研究，我們對於康托爾早期生涯的挫折，尤其是出自克隆涅克的「阻撓」，終於可以比較平常心對待了。

這一挫折，當然也部分解釋了他後來的精神崩潰。不過，家族環境因素也不容忽視，尤其是非常虔誠的宗教信仰傳統。根據史家道本周 **(Joseph Dauben)** 的研究，由於康托爾的父親屬於路德教派，所以，家中六個小孩都受洗爲路德教徒，儘管母親是羅馬天主教徒。還有，他父親在幾乎每一封給他的書信中，都會利用教義諄諄教誨他，而康托爾則是心悅誠服，真誠地頌讚上帝的恩德。這種宗教經驗，帶給他精神上的慰藉，也幫助他得以熬過他一生中最困阨的時光。

另一方面，康托爾與他父親的感情十分親密。他身爲家中長子，努力達成父親的期望，不只是一種責任，更是一種榮耀。因此，當他父親終於同意他以數學專業爲學習目標時，他不只非常喜樂，同時，也矢志出人頭地，以便光宗耀祖！這可以解釋他何以那麼急切地想要回柏林大學任教，因爲要是有機會在這一座數學界的麥加城立足，而成爲頂尖的數學家，那麼，他對於父親以及父子虔誠服侍的上帝，就作了最好的交代了。

三、真實無窮與天主教神學

1896 年 **2** 月 **2** 日，康托爾致函羅馬的耶瑟神父 **(Father Thomas Esser)**，說明他數學與形上學的密切關係：

> 建立數學與自然科學的法則，是形上學的責任。因此，形上學必須視它們如子女、如僕從、如助手。不要讓它們離開她的視野，要看管它們。要如蜂巢中的母王鋒驅使成千的工蜂到花園去，從花朵上吸取花蜜然後聚集，在她的指揮下，釀成可愛的蜂蜜。它們替她從廣大的物質與精神的實在界，帶來了建築材料，為她蓋起金碧輝煌的宮殿。

其實，康托爾會受到天主教神學的吸引，一方面當然出自家庭的宗教信仰傳統，另一方面，則是由於他的超無窮 **(transfinite infinity)** 研究知音難尋，只有轉向宗教界尋求慰藉與協助。顯然，上帝不僅爲康托爾解決心理障礙問題，他還幫助康托爾解決認識論問題。康托爾認爲他的集合論之所以絕對正確，乃是因爲它來自上帝的啓示。他把自己看成是上帝的使者，他不僅精確紀錄、報告和傳達新啓示的超窮數理論，而且還自詡爲上帝的使徒，視傳播福音爲他的天職。還有，他認爲上帝在這方面施予他的恩寵，主要目的是爲了避免教會在有關無窮的本性方面，再犯大錯。這樣一來，他把自己的數學和上帝的事業聯繫在一起。

康托爾生命中數學與宗教的連結，應該是緣起他在 **1883** 年所發表的《一般集合論基礎》(***Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre***)，引起了天主教神學家的注意。這是他在 **1879-1884** 年間在《數學年刊》所發表的六篇一系列論文中的第五篇之另行出版單行本 (**monograph**)，其重要性正如數學史家道本周所指出：「**《一般集合論基礎》的主要成就，在於它將超越數呈現成為自然數的一種自主且系統的延拓。**」顯然，康托爾自己也體認到在該文之作，「**將會使我自己處於某種與數學中，有關無窮和自然數性質得到廣泛支持的相對立觀點之地位。但是，我相信超窮數終將被承認是吾人對於數目的概念之最簡單、最適當與最自然之推廣。**」在引進超窮數之前，康托爾還提醒讀者必須注意潛在無窮 **(potential infinity)** 與真實無窮 **(actual infinity)** 的區別。他指出微積分所涉及的無窮只是變量之極限，而這些極限並非代表一個完備的整體或最後的量，譬如 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 並非表示有一個「最後的」x_∞ 存在使得 $x_\infty = \mathbf{0}$，因而，它們只是些潛在無窮的概念。相反地，康托爾所引進的超窮數 **(transfinite number)** 如基數 **(cardinal number)** 或序數 **(ordinal number)**，卻可以類比為普通的數目（儘管它們表徵了無窮集合（之整體）），因而呈現了真實無窮的概念。事實上，他自己也承認一開始他並未體認此一本質差異。

此外，在《一般集合論基礎》的簡短序言中，康托爾也強調數學上有關無窮概念的哲學，無法自外於哲學上的無窮存在之概念。也就是說，該文不單是針對超窮集合論的數學闡述，也是針對有關無窮的哲學觀念之公開論述。顯然，康托爾意在拉攏哲學成為數學的平等伙伴。

正因為在他的數學論文中，康托爾觸及無窮的哲學問題，無怪乎引起天主教神學家的興趣。**1886** 年，德國神學家古特貝爾 **(Constantin Gutbelet)** 在哲學期刊上發表論文〈無窮問題〉，就是援引康托爾的集合論，來辯護他自己有關無窮的神學與哲學觀點。他認為有關上帝的思想是永恆不變的，因此，神聖思想的整體必定構成一個絕對的、無窮的、完備的乃至於封閉的集合。而這，正是像康托爾的超窮數之類概念的實際存在之證據。總之，吾人要嘛接受真實無窮的實際存在，要嘛否定上帝的絕對心靈之無窮智慧與永恆特性。後者當然直接對立了天主教義。

康托爾其實早就熱衷於他的數學與神學之聯姻，現在，古特貝爾為他舉行了堅信禮。它們兩人通了幾次信，主要討論數學的無窮，是否挑戰了上帝存在這一唯一的絕對無窮。其結論當然皆大歡喜，因為康托爾的數學擴大了上帝的榮耀與全知全能之領域。

除了古特貝爾與耶塞之外，康托爾還與好幾位神學家交流，他們當然共同關心一個主要問題，亦即前文所提及：超窮數在自然界中實際存在嗎？針對此一問題，雖然康托爾完全肯定，然而，古特貝爾卻不無疑慮，他的老師弗蘭奇林 **(Johannes Franzelin)** 主教則極力反對。弗蘭奇林主教認為康托爾有關超窮數的存在的信仰－亦即，它是自然界的本性－可能引出一種泛神論的主張，這是因為上帝並不等同自然界，而是高於自然界！為了消除這些疑慮，康托爾在 **1886** 年

致函弗蘭奇林主教，指出吾人除了「可能的」與「實在的」區分之外，還應該注意絕對無窮與真實無窮的區別，前者是上帝所獨有，後者則見諸於上帝創造的自然界，並以其中客體的真實無窮爲其典範。

換句話說，康托爾認爲超窮的實際存在，正是上帝的無窮性存在之反映。這樣的論述，不僅多少撫慰了弗蘭奇林主教的不安，同時，也允許康托爾得以將集合論納入形上學之中。這種數學認識論的進路，在數學史上幾乎絕無僅有！而這，當然也造就了康托爾的堅苦卓絕與超凡貢獻。

康托爾積極地向天主教神學尋求慰藉與支援，還有一個外在的重要原因，乃是前文曾經提及，他與柏林時代老師克隆涅克因集合論的正當性所引起的恩怨。**1883-1884** 年間，哥廷根與柏林各自出缺了一位數學教席，不幸地，顯然由於克隆涅克的作梗，康托爾只能繼續坐困哈勒 **(Halle)** 大學，而無法轉往那兩大數學中心。於是，再加上他企圖解決連續統假設 **(continuum hypothesis)** 問題，[6]一再遭受重大挫折，康托爾終於在 **1884** 年 **5** 月第一次精神崩潰。

沒想到大約此時，他又與數學界幾乎是唯一知音米塔格・萊夫勒 **(Gosta Mittag-Leffler, 1846-1927)** 交惡，後者在瑞典所創立的《數學學報》(***Acta Mathematica***)，是康托爾除了前此刊登表論文的《數學年刊》之外，一個發表集合論研究成果的最主要園地。至於他對米塔格・萊夫勒不滿的主要原因，則是後者勸他淡化新近投稿的〈序型的理論原理〉之哲學意涵。其實，應該也算是柏林學派成員的米塔格・萊夫勒對他推崇備至，前者希望他撤回完全是一番好意：

> **我確信在你能夠提出新的肯定結果之前，你的新成果的發表，將極大地損害你在數學界的聲譽。我深知你對這些根本不在乎。可是，如果你的理論在這種情況下受到遲疑，就會長期遭到數學界的冷淡對待，甚至在你我的有生之年，你和你的理論都得不到你本該得到的公平待遇。也許這一百年之後，這一理論又被其他人重新發現，然後人們也發現你早已完成了全部工作，那時你才得到正確的評價。而你這樣做，就不會產生任何有意義的影響，而這種影響，是你也是任何從事科學研究者所自然期待的。**

可惜，康托爾就是無法諒解，因爲他認爲米塔格・萊夫勒多少屈服於克隆涅克的影響力，[7]因此，他們兩人的友誼也終告結束。

所有這些因素，可以解釋何以康托爾將數學、哲學與神學之結盟，視爲畢生的神聖使命。而這，當然是數學史上的罕見例子。

---

[6] 模仿實數的性質，亦即：兩個實數中間一定有第三個實數，康托爾企圖證明可數的無窮集合如自然數之基數，與第一個不可數的無窮集合如實數之基數之間，存在有第三個基數。

[7] 按克隆涅克、外爾斯特拉斯 (Karl Weierstrass, 1815-1897) 與庫脈 (Ernest Eduard Kummer, 1810-1893) 並稱柏林三巨頭。不過，由於克隆涅克只接受有限次步驟完成的證明，因此，他對外爾斯特拉斯師徒有關無理數乃至函數論的研究成果，始終不假顏色。他曾經寫信給證明 π 是超越數的林德曼 (Carl L. F. von Lindemann, 1852-1939) 說：「你那有關 π 的漂亮證明有什麼好處？在無理數根本不存在的情況下，為甚麼還要研究這類問題呢？」這解釋了他對康托爾的超窮集合論的敵意。

四、實數集合的真實無窮

康托爾出生於俄國聖彼得堡，十一歲時隨著雙親移居德國法蘭克福。他在 **1867** 年獲得柏林大學的博士學士之後，曾經在一所女子高中任教，再轉入一個數學教師討論班 **(Schellbach Seminar)** 工作，直到 **1869** 年他獲得哈勒大學聘任爲 **habitation** 爲止。顯然由於此一經驗，他對於中學數學教師的詢問，特別是有關他的集合論，他的答覆充分表現了分享的熱情與懇切。譬如說吧，他在 **1886** 年 **6** 月 **18** 日，回覆古德賽德 **(Franz Goldscheider)** 老師的一封信之內容，簡直就像一本集合論導引的小冊子。這固然可能由於他的知音難尋，不過，他樂意與人爲善，絕對是主要原因之一。

在這一封信中，康托爾詳述了集合論的基本概念之拓展。然而，不同「冪」**(power)** 或「基數」**(cardinal number)** 的集合之存在性，卻只是提及而未曾加以證明。事實上，一旦實數集合無法與自然數一一對應的「不可數」**(non-denumerability)** 對比了自然數的「可數」**(denumerability)** 之後，康托爾無窮理念的意義，才變得透顯與明朗起來。誠如史家梅西考斯基 **(Herbert Meschkowski)** 所指出：由於不同冪的集合之確實存在，「**因而，『冪』的概念，也被採用以區分那些以前無法接近的『無限的』領域。**」此外，他還來利用希伯來字母的第一個，來代表自然數（無窮）集合的基數 $\aleph_0$ **(**英文讀作 **aleph naught)**。至於實數集合的基數，則是以 c 來表示，顯然 $\aleph_0 < c$。在這兩個不同的基數之間是否存在第三個基數，正是前述康托爾極爲關切的連續統問題。

在一般的數學教科書中，有關實數集合的不可數，通常運用所謂的「對角線法」**(diagonal process)** 給以證明。其實，康托爾還有另一個鮮爲人知的方法，值得推薦給有興趣的讀者。先將他的定理轉述如下：

> **令** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ **是相異實數的無窮數列，照任意方式排出，則在任意給定的區間 (*c, d*) 中，必有一數 y（因此也必有無窮多個這樣的數！）不在這個數列中出現。**

爲了證明本定理，我們令本數列中落在區間 **(*c, d*)** 內的頭兩個數爲 c_1 和 d_1，同理，c_{n+1} 與 d_{n+1} 是本數列中落在區間 (c_n, d_n) **(** $n = 1,2,3,\ldots$ **)** 的頭兩個數。現在，我們必須區分下列兩種可能：

1. 只有有限多個區間 (c_n, d_n)：$n = 1,2,3,\ldots$。則在最後的區間內，至多只有本數列中的一個數而不是兩個。在這種情況下，的確有一數 **y** 在這個區間內（也在 **(c, d)** 內），而不在本數列中出現。
2. 有無窮多個區間 (c_n, d_n)。則有界數列 c_n 與 d_n 分別是單調遞增和單調遞

減，因此，它們均有極限

$$C = \lim c_n \text{ ， } D = \lim d_n$$

如果 **C＝D**，則它必然包含在每一個區間(c_n, d_n)內，因此，它與本數列的任意數都不相同。如果 **C≠D**，則（閉）區間 **[C, D]** 內的每一數也具有相同的性質。因此，在這兩種情形中，至少有一數 **y** 不在本數列之內。

五、結論

在答辯博士論文時，康托爾按德國學術界慣例，特別提出三個論點，其中一個論點說：**在數學中，提問的方法之價值，必須遠高於如何解決**。這一主張，最後竟然具體實現在他念茲在茲的連續統假設上。當然，這也見證了他那極具膽識的超無窮之集合論之研究。正因爲如此，當他晚年回顧畢生數學研究時，強調「**數學的本質在於自由**」，我們絲毫不覺得意外。

數學知識的這種從自然界的實在 **(reality)** 解放出來的特性，似乎平行了藝術史的發展。數學家 **William Dunham** 在他的《天才之旅》**(*Journey through Genius*)** 中，曾利用數學史 **vs.** 藝術史的有趣對比，來說明十九世紀下半葉數學發展的自由本質。他認爲當時由於偉大藝術家如塞尙、高更與梵谷的影響，畫布獲得了它自己的生命，而不只是爲了忠誠地再現大自然而已。於是，繪畫正式宣告從視覺化的實在 **(visual reality)** 獨立出來，正如高斯 **(Gauss)**、波里耶 **(Bolyai)** 與羅巴秋夫斯基 **(Lobachevsky)** 的非歐幾何學，將幾何從物理世界解放出來一樣。

不過，也正因爲自由自在，康托爾的集合論缺少了正統數學的「意義」依托（譬如克隆涅克就始終不假詞色），所以，它的正當性 **(legitimacy)** 之建立，就有賴數學以外的力量了。這種機緣，當然也歸功於他的集合論之形上學蘊涵，足以吸引天主教神學家的注意。這些因緣際會，都促使他積極地介入數學、形上學與天主教神學之論述。無論形上學或天主教神學是否實質地啓發了他的超窮集合論，我們都可以確定一件事，那就是：他認爲前者可以幫助他安頓集合論在整個數學聖殿中的位置。

數學 **vs.** 宗教關係十分密切，康托爾隻手建立集合論的故事，爲我們做了最真誠的見證！

後記：

本文限於篇幅，無法討論康托爾的集合定義所引發的悖論，以及其後相關的數學基礎之發展（包括連續統假設如何「解決」等）。讀者不妨參考克萊因的《數學：確定性的失落》。

參考文獻

克萊因 **(Morris Kline)**（翁秉仁、趙學信合譯）**(2004).**《數學：確定性的失落》，台北：台灣商務印書館。

胡作玄 **(1997).**《引起紛爭的金蘋果：哲人科學家－康托爾》，台北：業強出版社。

Meschkowski, Herbert (1976).（洪萬生中譯）**.**《偉大數學家的想法》**(*Ways of Thought of Great Mathematicians*, 1964)**，台北：南宏圖書出版公司。

Dauben, Joseph W. (1979/1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Dunham, William (1990). *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics.* New York: Penguin Books.