HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（家齊女中）
助理編輯：李建勳、陳春廷、趙國亨（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（新竹高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第九卷 第十期 目錄（2006年10月）

改弦易調說「正弦」

建國中學 郭慶章老師

推動數學最大進步的，是具有傑出直覺能力的人，
而非具有構造嚴格証明能力的人— Morris Kline

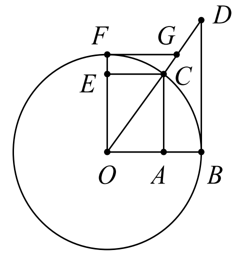
三角學的起源很早，遠在希臘亞歷山大時期，由於天文觀測、曆法、航海、地理的需要，Hipparchus、Ptolemy 和 Menelaus 創立了三角術。一般認爲三角術的奠基人是 Hipparchus，他所製作的〈弦表〉開現代三角學的先河。 Ptolemy 繼志述事，整理發揮前人的成就，系統化闡述三角術理論，成績足以名傳不朽。 Menelaus 在研究球面三角外，也討論圓上的弦。希臘三角術在約 98 年 Menelaus 時期達到巔峰。

文藝復興時期，三角學有了較大的發展，開始從天文學分離成爲數學的一支。隨著應用範圍的拓展，相關研究有必要採用更獨立的觀點，三角函數乃改弦易調重新規範。現在定義三角函數爲直角三角形邊長比的方法，是當時奧地利天文學家和數學家雷蒂庫斯(Rheticus, Georg Joachim，1514～1574)的傑作。至於在單位圓中設定一角，定義正弦、餘弦函數爲相應之線段長與圓半徑比值，則是二百年後瑞士數學家尤拉(Euler, Leonhard，1707～1783)首先創用。雷蒂庫斯曾跟隨哥白尼學天文學，推算詳細的三角函數表。尤拉後來又引入複數從更高深的角度處理三角問題，而有 $e^{i\pi}=-1$ 的發現，尤拉所提出的 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ，被稱爲數學中最美麗的公式，人人贊歎。

三角函數原有圓函數之稱，本來定義爲圓上一些線段的長，有關的研究長期在圓上進行。比較起來，新的定義的確是非常智慧的設計，既保有原本的幾何意義，又將概念適度的抽象，使涵蓋面更爲寬廣，更有力量；尤其重要的是建立了角度與數值之間的直接對應關係，明確化三角函數的意義。然而，新的定義朗朗上口之同時，或許是學習過程中未曾多加強調，有些基本知識未受重視。以「正弦」爲例，學生但知「直角三角形中，一銳角的對邊除以斜邊所得值，爲此角的正弦」，只知記誦「$\sin A$ 等於角 A 的對邊除以斜邊」，卻往往忽略了其中的幾何意義，對於正弦函數的本質在求弦長缺少深刻的認知，從而在探討

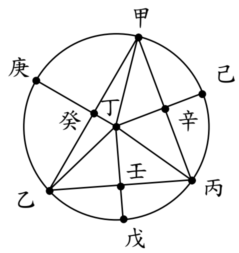
相關的問題時有所隔閡。

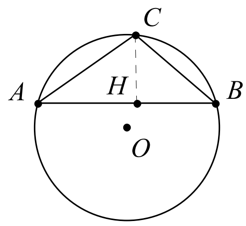
弦在數學上指的是圓周上或曲線上任意二點的連結線段。所謂「弦函數」顧名思義，當在討論弦長問題。其他五個三角函數亦都名實相符，其涵義可以直觀查知。清代中國的三角學常以八線爲名，爲釐清今日六個三角函數的幾何意義，當時的「割圓八線圖」有參考價值。回顧三角學發展史，Ptolemy 的〈弦表〉爲給定角度求相應弦長，相當現代的正弦函數，可見正弦函數的設計自始在求弦長。在角的度量採用弧度制後，正弦函數之爲用在化弧度爲長度。特別是在直徑爲 1 之圓上，已知弧長，其相應正弦值即弦長，用符號表示爲 $\sin\overset{\frown}{AB}=\overline{AB}$。而餘弦值則餘角之正弦值，即 $\cos A=\sin(90°-A)$。



圖一 割圓八線圖

法國大數學家拉格朗日(Lagrange, Joseph Louis，1736～1813)曾說：「當代數與幾何分道揚鑣時，它們的進展緩慢，應用也有限。但是這兩門學科一旦聯袂而行，它們就相互從對方吸收新鮮的活力，從而大踏步地走向各自的完美。」三角函數值既有數與形兩層意義，在研究相關問題時，若能試著將「比例關係」數的性質與「線段長度」形的意義適當聯想，通常可有不錯的成效。譬如正弦定理之論述，圖二引自清代數學家梅文鼎《平三角舉要》一書，其中道理已經描繪得很清楚，圖說一體，不證自明。然而，如果通過「直徑爲 1 之圓上，$\sin\overset{\frown}{AB}=\overline{AB}$」的觀點來看問題，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，只是圖形伸縮而已，更不待言。經由不同的角度來觀察研究事物，總有不同風貌，若再改弦易調強化幾何意義，從傳統圓函數取材，許多三角問題可有幾何解法；許多三角公式也可以以圖明之，一一在圓上畫出來。例如複角函數、和差與積互化公式、倍角公式等。





圖二 梅文鼎正弦定理示意圖　　圖三

和角公式之幾何證明，除常用托勒密（Ptolemy）定理入算之外，亦可參照圖三。設圓 O 直徑之長爲 1，$\overset{\frown}{AC}=\alpha$，$\overset{\frown}{BC}=\beta$，$\overline{CH}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於 H，則

$\overline{AB}=\sin(\alpha+\beta)$，$\overline{AC}=\sin\alpha$，$\overline{BC}=\sin\beta$

$\Rightarrow$ $\overline{AH}=\sin\alpha\cos\beta$，$\overline{BH}=\sin\beta\cos\alpha$，

得證：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

和差化積公式可藉由阿基米得「折弦定理：如圖四，若 M 爲 $\overset{\frown}{AB}$ 弧形中點，$\overline{MH}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 H，則 H 爲 $\overline{AC}+\overline{CB}$ 的中點」查知。圖四中，若圓 O 直徑 $\overline{CD}$ 長爲 1，$\overset{\frown}{AC}=\alpha$，$\overset{\frown}{BC}=\beta$，則 $\overline{AC}=\sin\alpha$，$\overline{BC}=\sin\beta$，

$\overline{AM}=\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$\overline{DM}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，

因爲 $\triangle AMH$ 與 $\triangle DCM$ 爲相似三角形，所以 $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DM}}\Rightarrow\overline{AH}=\overline{AM}\cdot\overline{DM}$，而

$\overline{AC}+\overline{CB}=2\overline{AH}$，從而可知：$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

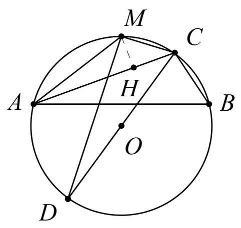
倍角公式之幾何證明，二倍角公式參照圖三，若 C 爲圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 中點，$\overset{\frown}{AC}=\theta$，則 $\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{AC}\cos\theta$，$\overline{AB}=\sin 2\theta$，$\overline{AC}=\sin\theta\ \Rightarrow\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。三倍角公式如圖五，若圓 O 直徑長爲 1，D、E 爲圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 之三等分點，$\overline{DM}\perp\overline{AB}$，$\overline{EN}\perp\overline{AB}$，$\overset{\frown}{AD}=\theta$，則

$\overline{AB}=\sin 3\theta$，$\overline{AD}=\overline{DE}=\sin\theta$，$\overline{AM}=\overline{AD}\cdot\cos 2\theta$

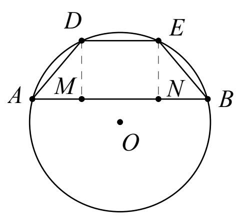
$\Rightarrow\sin 3\theta=2\sin\theta\cos 2\theta+\sin\theta$

$=(2\sin\theta)(1-2\sin^2\theta)+\sin\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$。

以上論證方式，可稱簡潔明快，直觀易懂。看到正弦函數，聯想圓上的弦，相互參照，這幾例幾何證明方法的構圖，都是此一思考模式的產物。再看以下



圖四



圖五

問題：「求 $\sin^2 23°+\sin^2 37°+\sin 23°\sin 37°$ 之值。」這是高中三角函數評量中常見的題目，一般解法是：先以餘弦二倍角公式化去 2 次方，再用和化積與積化差方法解題。解題不難，只是在做出答案爲 3／4 後，你可會有點疑惑？題中兩個數字 $\sin 23°$、$\sin 37°$ 都是無理數，命題者何以知道這兩個無理數乘一乘加一加的結果爲有理數？顯然其中另有門路。

如果你願訓練自己成爲具有傑出直覺能力的人，不妨多方設想，由函數想到圖形是基本素養，由 sin 想到弦與圓，於是圓及其內接三角形的圖形架構隱然浮現，在直徑爲 1 的圓上，三內角各是 $23°, 37°, 120°$ 之內接三角形，其三邊長各是 $\sin 23°, \sin 37°, \sin 120°$，原來這類問題的幕後影武者是餘弦定理。推想至此，解題之鑰隨手可得，答案呼之欲出。

餘弦定理是高中同學熟知的題材，它與正弦定理有等價關係，可以互相推演，您試演算過否？

附註：本文徵得作者同意，轉載自《科學月刊》2006 年 10 月號。

餘弦定律可以怎麼教？

台師大數學系博士班研究生/北一女中 蘇俊鴻老師

前言

本文的產生，緣起於筆者參加由財團法人思源科技教育基金會主辦之「思源 E-Teaching：金獅獎 2006 高中優良科學教案」徵選活動時，提出了一個有關餘弦定律的教案設計(活動網址：www.seed.org.tw)。幸運的，它獲得評審們的青睞，得到此次數學科的金牌獎。事實上，筆者只是將平日參與洪萬生教授國科會計畫與團體成員討論互動所獲致之相關的材料與心得，以及運用在自身教學活動的經驗等等，加以編排完成。因此，能夠得獎可說是對數學史融入數學教學(HPM)的肯定。以下便是對此教案設計之理念、內容及特色的進一步說明。

教案設計之理念、內容及特色

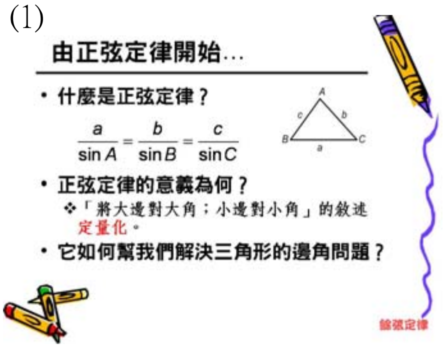
此一「餘弦定律」的簡報教案，其設計之理念主要是強調餘弦定律的發現脈絡，並且與畢氏定理的連結能更加深入與自然。其目的是希望讓學生對餘弦定律的了解能更為深入且多元，不至於僅僅流於單調的公式推導或計算。當然，對於同為教學工作者的教師們，也期能提供另一個教學呈現的設計。

整個教案共有 29 張投影片，可分為三個部份：

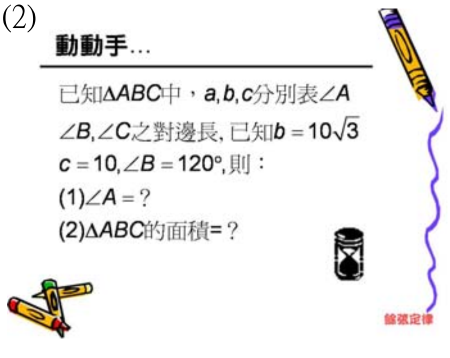
(一)餘弦定律的發現：(投影片檔案的第 2 張至第 10 張。不過，限於篇幅緣故，筆者僅列出主要的投影片。另外有些投影片有動作效果，以致看來有圖形重疊的現象。)

首先，呼應現行教學章節的安排，由複習正弦定律開始，並用來解決三角形之邊角問題，讓學生察覺其侷限性。進而利用條件的改變(由具體數字變成文字符號)，引導學生發現餘弦定律的形式。此一部份適合讓學生分組討論進行，合作將餘弦定律的形式導出。不妨參閱下列投影片，更能了解筆者所使用的例題。

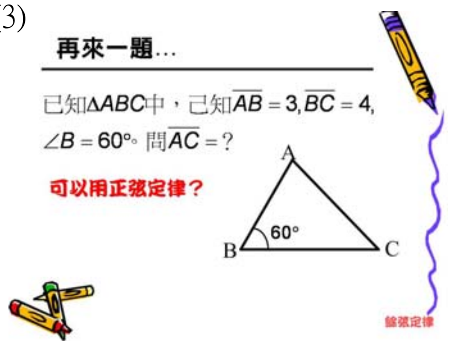
(1)



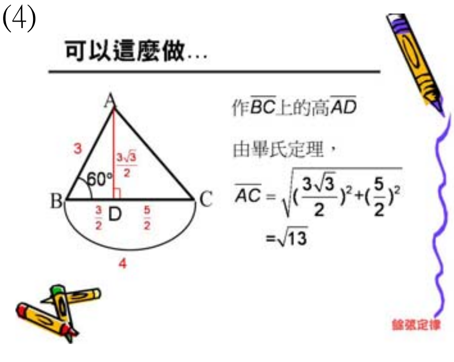
(2)



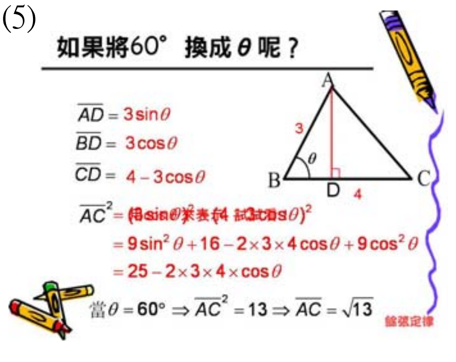
(3)



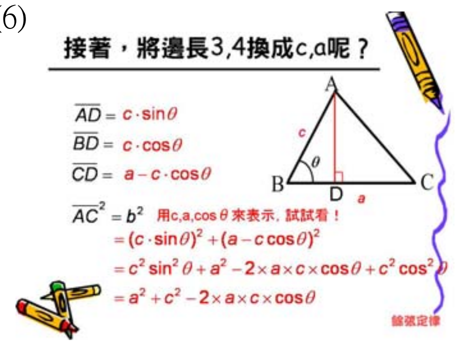
(4)



(5)



(6)



由上面的投影片中，可以看見筆者並非直接告知學生有關餘弦定律的形式。而是利用一個常見的銳角三角形之邊角問題，經由問題條件的逐漸一般化(見(3)至(6))，透過小組討論的安排，讓學生共同參與餘弦定律的形式之發現。事實上，這樣的教學的方式，在筆者參與洪教授國科會「中學教師 HPM 素養指標研究」的問卷中曾見老師提及。它的好處是利用相同的方式(畢氏定理)，由特例到一般化，營造出可以讓學生參與的發現脈絡。但接下來，若是回到題目的常規練習中，就不免讓學生流於單調的計算。對於這個定律的理解就失去深入的可能性。因此，筆者就利用下面三個問題，提供學生觀察餘弦定律的性質，並且往餘弦定律的幾何面向前進。

(二)餘弦定律的相關問題：(投影片的檔案第 11 張至第 14 張)

問題一：若 ΔABC 是鈍角三角形，上述的推導過程會依然成立嗎？

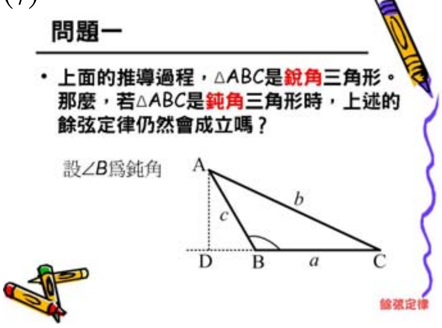
這個問題的提問是為了讓學生了解性質討論的完整性($\cos\theta$ 分別為正或負)。此外，筆者更希望在此處讓學生看見無論銳角或是鈍角三角形，其邊長的「形式」相同。因而，餘弦定律依然成立。這正是代數對「形式」的威力。

問題二：餘弦定律與畢氏定理有何關係？餘弦定律有什麼幾何意義呢？

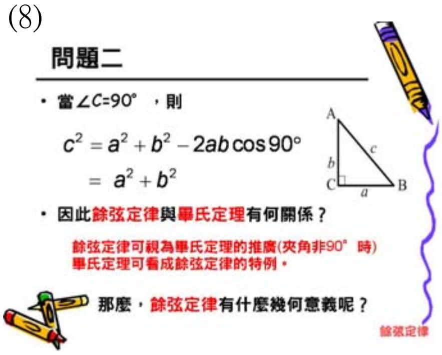
問題三：餘弦定律中的修正項的意義為何？

這兩個問題其實是一貫的，在意的是數(代數)形(幾何)互譯的重要性。利用畢氏定理與餘弦定律之間特例與通例的關係，我們可以由幾何面向再一次安排餘弦定律形式的被發現，這正是此教案的第三部份。

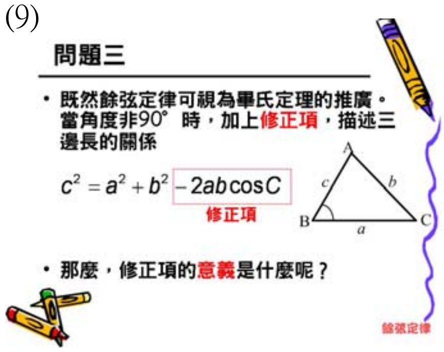
(7)



(8)



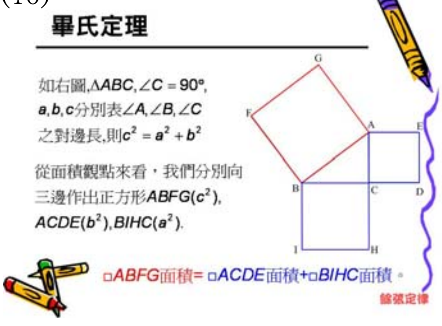
(9)



(三)由畢氏定理出發，呈現餘弦定律的幾何意義：(投影片的檔案第 15 張至第 29 張)

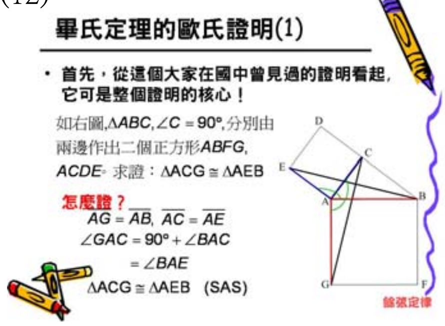
此部份設計的重點是由「畢氏定理是餘弦定律的特例；餘弦定律是畢氏定理的推廣」出發，探討餘弦定律 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 的幾何意義，以及 $2ab\cos C$ 的意義。因此，筆者由畢氏定理的歐幾里得證法開始談起。由於現行國中課程的幾何證明的份量減少，對於畢氏定理的証明也略去不提。所以，老師教學要特地停留，觀察學生們是否可以接受。說明需要花費精神鋪排一番，也要對其證明中主要的想法多所陳述。對於畢氏定理的歐氏證明掌握後，再來，我們就能將討論的問題由直角三角形轉向非直角三角形。先由銳角三角形看起，三邊長之關係的提出是件自然的想法，而餘弦定律的形式也是自然浮現。

(10)

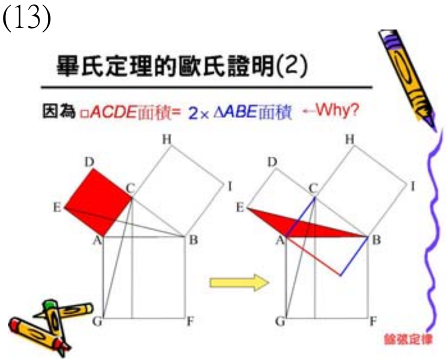


(11)

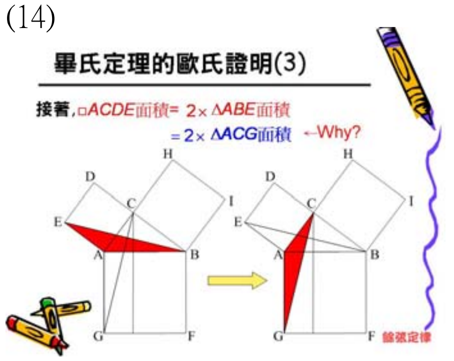
(12)



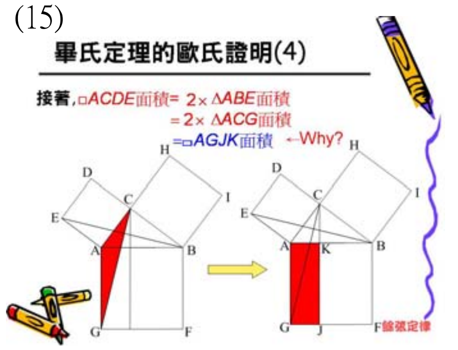
(13)



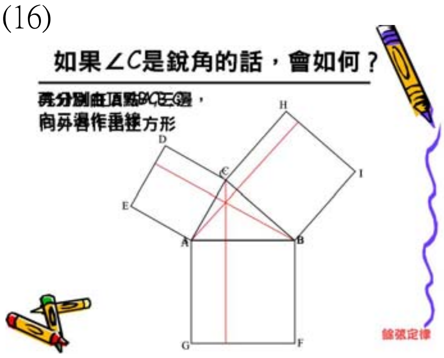
(14)



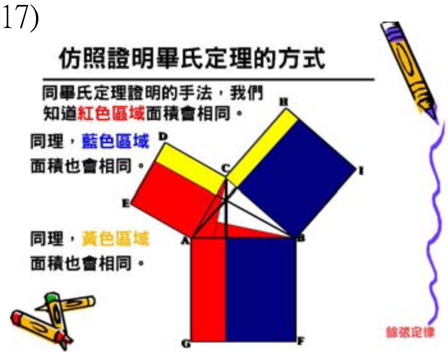
(15)



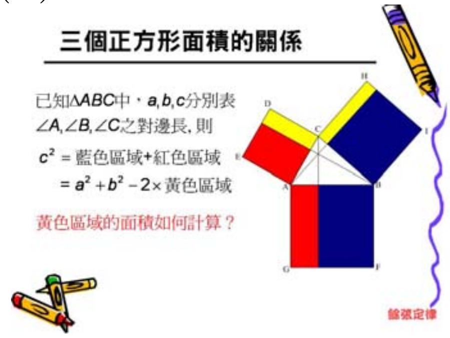
(16)



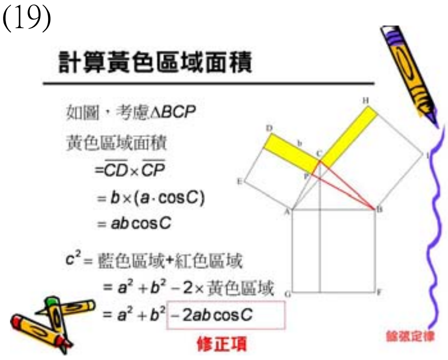
(17)



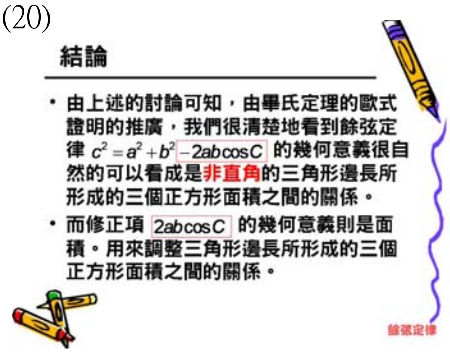
(18)



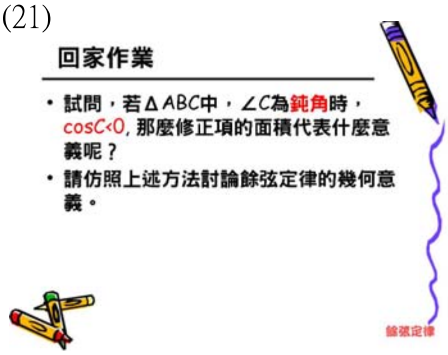
(19)



(20)



(21)



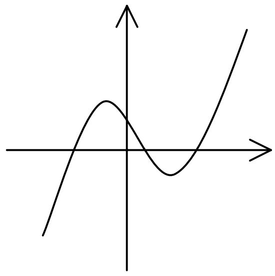
結論

透過上述的說明，希望能引起您使用此份教案的興趣。在這份教案中，筆者安排兩種不同發現餘弦定律的脈絡。歷史的觀照下，可以知道讓學生了解餘弦定律的提出與形式，並非憑空冒出。最後，且容筆者對思源科技教育基金會為提昇高中科學教學而願意舉辦教案徵選活動表示敬意。它不僅鼓勵高中教師將之教學想法提出，也建置一個可以分享交流的資訊平台(活動網址：www.seed.org.tw，關於本文所使用的教案投影片即將可於此處下載。)

魚與熊掌的取捨：picture-proofs缺少什麼？

台師大數學系碩士班研究生 趙國亨

「數學的本質是什麼？」這是個哲學問題，讓多數人抗拒回答，但是，當他簡化為「數學是什麼？」就有許多人願意回答這個問題，看熱鬧的人可能會說，「數學就是很難的東西。」也許這些人心中都將數學、哲學等學問視作外星人的陰謀；另一方面，看門道的人則常常說，「抽象、邏輯、嚴謹。」支持這種想法的人往往看重數學所特有的論證格式，因為數學家看待證明的推論過程，正像是凝視情人的雙眼一容不下一粒沙！



雖然早在公元前，人類已經開始使用《幾何原本》的寫作與論證方式，創造知識輝煌的時代，但是，文藝復興並沒有復興數學的嚴謹精神，數學家忙著解方程式、[1]忙著熟悉新興數目與代數、[2]忙著與內心的罪惡感妥協，[3]終於，來到微積分大鳴大放的十七、十八世紀，不符合所謂「嚴謹」的「非法行為」，造就了Newton、Leibniz、Euler等英雄，直到Cauchy、Weierstrass開始使用 ε - δ 條件來定義極限，才確立現代分析的論證基礎。

然而，在分析的領域裡，處理所謂「看似理所當然」命題的濫觴，或許該歸於Bolzano，[4]每個數學系的學生都必須知道的中間值定理，其實就是Bolzano's Theorem，同時，每個高中生都學過這個定理的一種特例，即多項式的勘根定理，下面我們列舉這個定理的三種形式。

(1) 勘根定理

If $f(x)$ is continuous on the interval $[a, b]$ and f changes sign from negative to positive (or vice versa), then there is a c between a and b such that $f(c) = 0$.

(2) 中間值定理

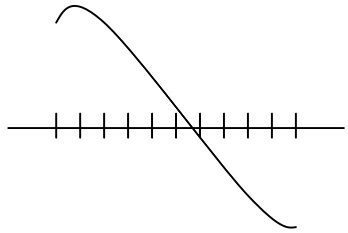
If $f(x)$ is continuous on the interval $[a, b]$ and there is a C between $f(a)$ and $f(b)$, then there is a c between a and b such that $f(c) = C$.[5]

(3)中間值定理的一般形式

If f and g are both continuous on the interval $[a, b]$ and $f(a) < g(a)$ and $f(b) > g(a)$, then there is a c between a and b such that $f(c) = g(c)$.

相信有許多高中教師在教勘根定理時，會選擇使用圖形來解釋這個定理，他是如此地理所當然、顯而易見，不是嗎？「當我打開門要從家裏出門時，隨著我從屋內到屋外，一定有一個時刻，我恰好站在門的位置。」這樣的解釋確實可以輕易地讓學生**相信**勘根定理的正確性，可是，這裡面是否遺漏了什麼？

或許，在Hilbert的公理化夢想破滅之後，不需要再追問「兩條線交錯的地方爲什麼真的存在這麼一個交點？」[6]但是，我們還是得去面對一個很現實的問題：「交點在哪？」的確，我們無法從圖形得知更多的訊息，相對地，我們試著看看這樣一個勘根定理的證明：



(1) 設 $f(a)<0<f(b)$，令 $a_0=a$、$b_0=b$。

(2) 考慮 $f(\frac{a_k+b_k}{2})$的正負性，

若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})=0$，則 $\frac{a_k+b_k}{2}$ 即爲一根；

若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})>0$，則令 $a_{k+1}=a_k$、$b_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$，重複(2)；

若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})<0$，則令 $a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$、$b_{k+1}=b_k$，重複(2)。

(3) 因爲，$\forall k$，$[a_{k+1},b_{k+1}]\subset[a_k,b_k]$，

而且，$[a_k,b_k]$的長度恰爲 $\frac{b-a}{2^k}$，隨著 $k\to\infty$ 而趨近於 0，

所以，$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k$ 存在，令爲 c。

(4) 因爲，$f(a_k)<0$、$f(b_k)>0$，

所以，$\lim_{k\to\infty}f(a_k)\le 0$、$\lim_{k\to\infty}f(b_k)\ge 0$，

同時，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，

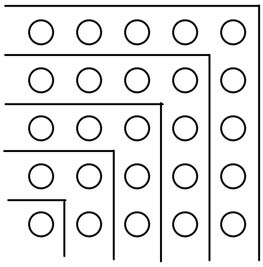
因此，$f(c)=\lim_{k\to\infty}f(a_k)=\lim_{k\to\infty}f(b_k)=0$。

(5) 若 $f(a)>0>f(b)$，同理可證。

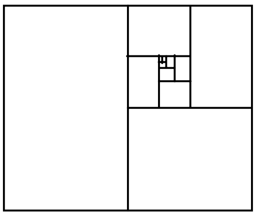
這個證明方法最精彩的部份，就是「不但**驗證** c 的存在，還**解釋** c 爲什麼存在，提供逼近 c 的**方法**。」當然，這已經跟原始相貌有了很大的改變，我們不需要再用十分逼近法書寫證明，反而用具有「邏輯等價」的二分逼近法呈現比較清爽自在的證明，但是，這不妨礙我們認知「具體數字操作可以用十分逼近法」這件事情，畢竟，二分逼近法還是比較符合電腦的天性。

從證明的六個功能—驗證、解釋、組織、發現、溝通、智力挑戰[7]—來評估上述證明的價值，確實會發現他蘊含著豐富的能量，除了前面提到的部份，區間套定理的使用，**組織它**與實數完備性的關聯，同時，這個證明手法在更高的層次裡，被用來證明Bolzano-Weierstrass定理。[8]

某個人從「使用越來越小的單位來進行測量藉以達到越來越高的準確」這件事情，領悟到「方程式求根的近似解」的方法，然後被另一個人拿去應用在更抽象的問題中。這個證明是**溝通**現實世界與Plato天堂的坦蕩大道，正是呈現知識演化的最佳脈絡！既然有路可走，何必憑窗遠眺，可望而不可即？[9]



「嚴謹」或許不是數學的最高依歸，否則，面對不完備定理的我們，能表現得比Hilbert更有貢獻嗎？[10]既然如此，爲什麼還要嚴謹的證明？這個問題可以視爲：「是怎樣的困擾迫使人類必須提出證明？」答案很多，但是，關鍵之一可能在於「三種無限」，無限多、無限大、無限小(任意小)。



直角三角形有無限多種，學過數學的人都知道，即便要求整數邊長，也可以利用將任意兩正整數($m>n$)代入m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2都可以得到一組直角三角形，無限多種例子迫使數學家必須想方設法將其一網打盡，其中，最經典的方法就是數學歸納法，可是，也正是數學歸納法難以捉摸地教人直想另闢蹊徑，[11]促使人們不得不注意到提供「洞察力」的圖形。

這個據說是畢達哥拉斯所提出的圖形，清楚地說明$1+3+5+7+9=25$，亦強烈地暗示$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，對比數學歸納法的不人性、缺乏「附加價值」，[12]趨向picture-proofs的想法顯得再正常不過，可是，一旦面對$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$，又要何措其手足呢？ 當然，圖形的輔助功能是叫人不能不舉雙手雙腳贊成，即便是在高等微積分的課程中，下面這樣一個圖形雖然不能產生對Bolzano-Weierstrass定理的理解與認知，卻提供一個確實有意義的image。

另一方面，如果將數學視爲「唯一能夠處理無限的學科」，那麼數學歸納法用來處理無限的價值，就確保他不可能被輕易取代，回首《幾何原本》來到「質數有無限多個」這道命題時，Euclid不得不使用「超越任意有限」這樣的想法，[13]不難想見「無限」這個概念一路上的顛沛流離，圖形再怎麼深刻，由於其先天所限，也不過達到「潛無限」，終究進不了「實無限」的殿堂，無法成爲數學家在搭建天堂時所使用的梁柱。

註解：

1. 在義大利，Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557) 跟 Cardano(1501-1576)爭執三次方程式公式解，Cardano 的徒弟 Lodovico Ferrari (1522-1565) 發現四次方程式公式解。
2. 在法國，François Viète(1540-1603)開始使用符號處理代數學、三角學，韋達定理就是我們熟悉的「根與係數關係」，在英國，John Napier (1550-1617)『發明』對數。
3. Rafael Bombelli (1526-1573)，義大利人，是第一位提供虛數明確定義的人，但是，他同時表明了使用虛數對自己造成的內心不安。

4. Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)，捷克人，教會祭司、業餘數學家。
5. 有些書本會要求 $f(a) \neq f(b)$ 且 $c \in (a, b)$ 來避免文字上的歧義，此處從簡。
6. Hilbert 的公理化幾何針對 Euclid 的五個公理無法解釋的細節，構造了 21 個公理來補完，其中的 V.2.Line completeness 就是用來解釋「兩條直線相交會決定一點」這件事。
7. Verification/Conviction、Explanation、Discovery、Systematization、Communication、Intellectual challenge，參考 *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad*，作者 Michael D. de Villiers。
8. 如果有無限多點存在有界區間裡，則必有一個聚集點。附帶一題，這個 BW 定理經常被戲稱爲黑白定理。
9. “Some ‘pictures’ are not really pictures, but rather are windows to Plato’s heaven.”，見 *Philosophy of Mathematics — An Introduction to the World of Proofs and Pictures* 一書。
10. Hilbert 的公理化幾何之夢在即將完成之前，被 Gödel 的不完備定理否定了成功的可能，據說，他在看到這個定理與其證明時，呆若木雞良久。
11. 《HPM 通訊》第八卷有兩期是數學歸納法專輯。

【後記】

當老師的人如果遇到學生用畫圖來替代證明時，首先要反思的問題，恐怕不是對錯或給分標準，而是評量目的，不論如何，學習數學歸納法的目的，總不會是證明 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 吧？

這篇文章源於數學哲學的課堂討論，當我們討論 James Robert Brown 的著作 *Philosophy of Mathematics — An Introduction to the World of Proofs and Pictures* 的第三章 Picture-proofs and Platonism 時，引發的一些想法，如果內容有些不足、不妥之處，還請不吝指教。

圖證、無限與數學歸納法

台師大數學系碩士班研究生 李建勳

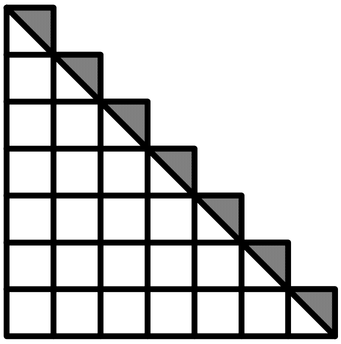
楔子

進入深秋的午後，涼風徐徐，或時兼帶細雨飄飄，用過午餐後，漫步在校園裡，一邊沉溺著自己的思緒，等待接受即將到來的一場「洗禮」。以上，是最近每個星期五下午準時上演的情節－在洪萬生老師的「數學哲學」課裡，大家時而聚精會神地研讀典籍，時而慷慨激昂地唇槍舌戰，彷彿爲學校裡一週的課程帶至最高潮，迅疾劃下完美的句點。

這篇文章，乃歸因於兩個禮拜前某位伙伴在課堂上的發言，所引發後續效應下的產物，當時我們正研讀著 *Philosophy of Mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*一書，在討論著書中某章節關於作者James Robert Brown如何看待「圖證」(picture-proof) 這類有啓發性的圖形 (instructive pictures)。在本書中，他連舉了幾個定理，每個定理的證明都放了一個圖形，底下就是其中一個例子：[1]

定理：$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$

證明：



藉此，作者連問了幾個問題：

> **這圖形令人信服 (convincing) 嗎？這是一個特例 (special case) 嗎（即對某些特別的n值成立）？他有建立完全的一般性 (complete generality) 嗎（即對所有的n值均成立）？是否一個標準的verbal/symbolic證明，即數學歸納法，會較令人信服？**[2]

而在其後，他如此深刻地形容自己的看法：[3]

> **我大膽的假設如下：某些圖形並非真的是圖形，倒不如說是通往柏拉圖天堂的窗口。**
>
> **數論圖形確實是$n=7$這個例子的一個表徵 (representation)，但並不是所有的，對於後者，它利用一種不一樣的方式作用，比較像個工具，當然這是個數學的實在論觀點，而不是圖形的實在論觀點，就像望遠鏡輔助我們的肉眼一樣，這些圖形是用來幫助我們心靈裸眼 (unaided's mind's eye) 的工具（而不是表徵）。**

針對這個敘述，我們大伙兒不斷提出各自的見解，甚至隨後將討論重心，短暫轉移到此定理可能的證明工具之一「數學歸納法」上，每個人對此方法褒貶不一，其中也有人覺得這

是一個低價值的證明工具，因其「機械式」的證明手法，無法告訴我們如何體察定理本身的「發現脈落」。

至此，筆者深刻反思過去在高中時期、甚至大學時期對「數學歸納法」的「美好」體驗，如此直覺使自己的熱情不斷翻滾，推動著我想去對「數學歸納法」作一番徹底的了解。

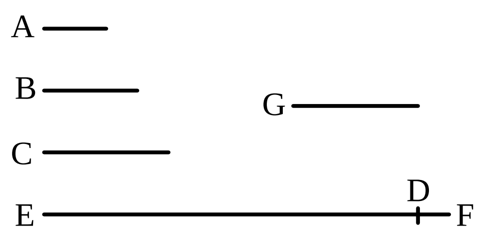
因此，我開始研讀一些文獻，來重新建構自己對於數學歸納法的看法。首先，便找了先前刊載在《HPM 通訊》中的『數學歸納法專輯』，針對各文章仔細品味一番，其後，便開始拜讀各家與數學歸納法有關的大作，範圍包括巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662)《論算述三角》(*A Treatise on the Arithmetical Triangle*) 中的一些內容，以及歐幾里得的《幾何原本》(*The Elements*) 裡的幾個命題等等。以下，將針對這兩本書中的兩個定理論述筆者的一些觀點。

《幾何原本》第九卷 Proposition 20

關於這個定理，上述曾提及的 James Robert Brown 便是以此命題當作全書的開場白，因此，筆者對於這個定理印象非常深刻，這定理的敘述如下：

質數比任一給定的一群質數還多。(“Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.”)

筆者試著將其原文證明的部份翻譯如下：



設 A , B , C 為給定的質數；
我說有比 A , B , C 更多的質數。
為此設 DE 為被 A , B , C 量進的最小數；
設給 DE 加上單位長 DF ，
則 EF 或者是質數或者不是質數。
首先，設它為質數；
則已經找到多於 A , B , C 的質數 A , B , C , EF 。
其次，設 EF 不是質數；
則 EF 能被某個質數量盡，
設它被質數 G 量盡，
我說 G 不和數 A , B , C 任何一個相同，
因為，如果可能，設它是如此，
現在 A , B , C 量盡 DE ；
因此 G 也量盡 DE ，
但它同樣量盡 EF ，
所以 G 這個數將量盡剩下的部分，即單位長 DF ，這是不合理的。
故 G 與數 A , B , C 任何一個都不同，且由假設，它是個質數，
因此已經找到了質數 A , B , C , G 比所給定的一群 A , B , C 還多。

證明結束

筆者盡量忠於原文中的書寫形式，其實是希望可以藉由這定理夥同大家一同觀察希臘數學的一些特色：首先是這個定理的陳述方式，在我們現今的高中教科書中，此命題的呈現形

式為「質數有無窮多個」，[4]而不是如《幾何原本》般以「隱晦」的方式書寫。眾所皆知，此乃因為在歐幾里得時代裡是避談「無限」這個名詞，說得更精確些，是不把「無窮」當成一個實體，更不可能像現在這樣把它當成物件來表徵極限的概念，亦即當時並沒有「實無限」的看法。其實，在古希臘時期的數學家只把無窮看成是潛在的（我們稱為「潛無限」），也因此歐幾里得便想盡辦法規避「無窮」字眼出現在《幾何原本》一書中，這一點我們從整本書一開始的第五設準 (Postulate 5)，也就是我們俗稱的「平行設準」的書寫形式就已彰顯無疑：

> **"That, if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles."**

筆者將其翻譯為：

> **如果一條直線與另外兩條直線相交，使得同一側的內角和小於兩直角角度和，則兩直線在這一側不間斷地延長下去就會相交。**

其中"indefinitely"一詞筆者將其譯為「不間斷的」，而非"infinitely"－「無窮地」（不要忘記，「無窮」在這裡是個禁忌！）。比起上述作者在文字安排上費盡苦心卻顯得贅累，就可以感覺到我們現在可以直接把「無限」當成名詞來使用，是如何便宜行事了。但在我們自以為「卓越」而沾沾自喜的同時，筆者想提領大家回頭再次細品「質數無窮多」定理，若我們有任何身為教育者的敏銳觸覺，那麼，接下來所感受到的衝擊，就應該會令我們鐵青著臉，彷彿看到歐幾里得的無情嘲諷，正穿越時空向我們襲來。筆者接下來試著將歐幾里得的「古典書寫形式」（以下簡稱為歐式寫法）與現今國內教科書的書寫形式並排，期望大家能經由刻意安排的對比，來感受筆者所欲表達的：

> **質數比任一給定的一群質數還多。（歐式寫法）**
> **質數有無窮多個。（現今的教科書寫法）**[4]

發現了嗎？同樣的數學概念，用不同的文字書寫，散發出不同的味道，對學習者更是產生了不同的影響。很明顯的，當學習者面對第一種書寫方式時，將比第二種書寫方式，更能去體現證明的脈絡，前者的書寫方式其實已經隱含了強烈的暗示性，暗示我們如何去從事它的證明，亦即只要我們假設給定任意 n 個質數，想辦法再多找一個，就完成了定理的證明。反觀後者將定理敘述表為「質數有無窮多個」，而證明手法大半均是利用歸謬法來完成，而使得學習成就較為低落的學生無所適從。其實，既然兩個方法幾乎是完全相同的，差別只是在於表達方式的不同，這無疑提醒著我們在教學過程中，應當不斷地反思我們的教學安排，選擇更能貼近學生、對學生有利的切入點來進行新知識的引進和介紹。

講到這裡，筆者不禁遙記起當年剛踏入高中校園，班上數學老師在介紹有理數時，就如同一般教科書一樣，都會教導我們利用歸謬法，從事以下命題的證明：『**試證 $\sqrt{2}$ 為無理數**』。[5]猶記得當年這命題所帶給筆者的衝突：其一，因整個定理表達形式太過精簡，以致於筆者一時之間對其證明不知從何下手。其二，後來看到老師在黑板上利用

歸謬法假設 $\sqrt{2}$ 爲有理數 $\frac{n}{m}$ 後，竟然在其後附帶假設 $(m,n)=1$ 並以此作爲最後得到矛盾的根據，當時筆者完全無法確信此證明所帶來的可靠性！而在今日，或許疑問早已解決了，但筆者總不免以此經驗警惕自己，期許自己在步入教學現場之時，能以學生的學習脈絡爲首要考量，利用較「平易近人」的方式引導學生親近數學知識。

其實，證明這件事對初學者而言本來就不易上手，即便我們將「質數無窮多」這定理以歐式寫法的方式呈現，並給定了 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 這些質數，要學生想辦法在這之外再多找一個，他們可能也想不到利用 $x_1 \times x_2 \cdots \times x_n + 1$ 這個數來下手，但是，若作爲純欣賞之用，我想上述的證明過程會比利用歸謬法來呈現「$\sqrt{2}$爲無理數」這一證明來得更富有啓發性，如同先前所提及的，就連*Philosophy of Mathematics*一書的作者James Robert Brown在該書第一章也以此定理作爲開頭，他在書中如此形容：

> **The proof is elegant and the result profound. Still, it is typical mathematics; so, it's a good example to reflect upon.**

顯然作者也給予這定理極高的評價。

數學歸納法？

筆者接著想跟大家討論的是：歐幾里德所呈現的證明過程是否隱含了數學歸納法的精神？當然，大家可以很清楚見到，他處理了「$n=3 \Rightarrow n=4$」這部份，這是一個特例 (special case)，雖然它顯然等價 (equivalent) 於通例 (general case)，亦即假設對任何一個正整數 k 成立－即任意給定 k 個質數，我們當然都可以利用同樣的手法證明存在第(k+1)個質數，這是數學歸納法的精神所在，所以到底歐幾里得算不算有使用了「數學歸納法」？

在回答這個問題之前，筆者想要先帶領大家在歷史的軌跡上往後邁進 2000 年，來看看巴斯卡在他的《論算數三角》(*A Treatise on the Arithmetical Triangle*) 一書中何以被公認有明確利用了數學歸納法的精粹來從事其命題的證明，希望能藉由兩者的對比來釐清我們的疑問。

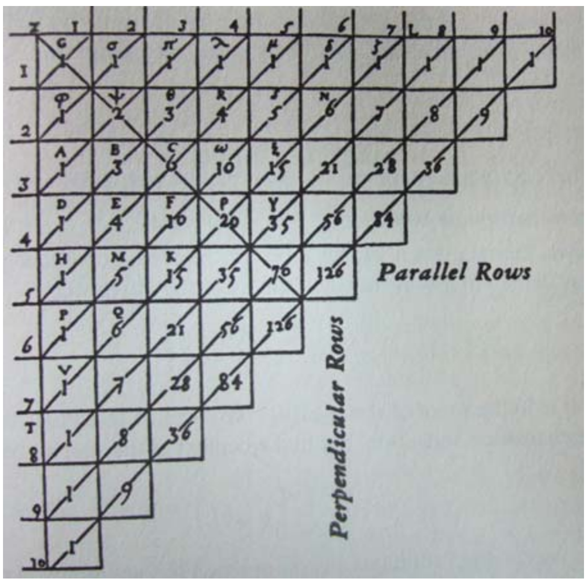
《論算數三角》Part I Corollary 12

"Of two adjacent coefficients in a base , the upper is to the lower as the number of coefficients from the upper onwards is to the number of coefficients from the lower downwards."

筆者自己將上述文字翻譯爲：

> **在同一底上的兩個相鄰的係數，上係數與下係數之比，等於從上係數往上與下係數往下的係數個數比。**

接下來，筆者將試著以現今我們習慣的符號來呈現原命題敘述與證明脈絡，爲了方便，我們將開始的行列編號均編爲0，如下圖所示：



算術三角形的巴斯卡形式

列＼行	0	1	2	3	4	5	6	7
0	**1**							
1	**1**	**1**						
2	**1**	**2**	**1**					
3	**1**	**3**	**3**	**1**				
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**		
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**

則我們可利用標準的二項式符號$\binom{n}{k}$來命名第n列的第k行的係數，並且由算術三角形基本的構造法則即可得

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

因此若我們考慮第n底（即第n列），共有底下這些係數：

$$\underbrace{1,\ n,\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \cdots\cdots,\ \binom{n}{r-1}}_{r\text{ 個係數}},\ \underbrace{\binom{n}{r},\ \binom{n}{r+1},\ \cdots\cdots,\ \binom{n}{n-3},\ \binom{n}{n-2},\ n,\ 1}_{(n-r+1)\text{ 個係數}}$$

此時若我們取上係數為$\binom{n}{r-1}$，下係數為$\binom{n}{r}$，

則此命題即可表為

$$\boldsymbol{\binom{n}{r-1} : \binom{n}{r} = r : (n-r+1)}$$

而巴斯卡證明這個定理的方式是利用一個「可以推廣的例子」(generalizable example) 來設法彰顯其他情況的正確性，但他顯然注意到此方法的不足之處，故作了以下的聲明：[6]

雖然這一命題有無窮多種情況，我將透過引進兩條引理來簡要地證明它。

引理一：是自明的，這比例在第一列成立。

引理二：假設此命題對某一底 (base) 為真時，則可得到其在下一底也一定為真。

即首先他確立「$n=1$」時命題為真：由圖中$n=1$時的上係數與下係數之值，我們可以顯然得到兩係數之比=1:1。再者，其作出的第二點聲明，與現今我們使用的「數學歸納法」第二步驟作出歸納假設，並嘗試往後遞推其正確性的想法完全一樣，但這個引理在此命題中如何被驗證？且讓筆者帶著大家繼續往下欣賞：

在作出這兩點聲明之後，巴斯卡接下來去證明$\binom{4}{1}:\binom{4}{2}=2:3$，首先他發現

$\binom{3}{0}:\binom{3}{1}=1:3$，因此利用算術三角形的基本構造法則即可推得

$$\binom{4}{1} : \binom{3}{1} = \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{0}\right) : \binom{3}{1} = 4:3\text{，}$$

接著，因爲$\binom{3}{1} : \binom{3}{2} = 3:3 = 2:2$，故可得

$$\binom{4}{2} : \binom{3}{1} = \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right) : \binom{3}{1} = 4:2\text{，}$$

最終便得到$\binom{4}{1} : \binom{4}{2} = 2:3$。

在此之後，巴斯卡意識到這一個證明只是一個特例，並不是普遍的，因此他又不厭其煩地作了以下的聲明，想辦法捍衛他證明的完整性：

> 對於所有其他的底而言，這證明都是一樣的，因為它只需要以下的事實成立：因為它只需要找出上一行的比例，且每一項等於等於上面一項和左邊一項的和，而這是處處成立的。[7]

整個證明至此便結束了，或許他仍然沒有證明一般情況，但是其費盡心思想去補上一般性的不足，使得在證明過程中確實出現數學歸納法的形式與精神，這點是無庸置疑的。

超級比一比

最後，讓我們回歸主題，對比本篇文章中出現的兩個證明。無獨有偶的，巴斯卡與歐幾里得均嘗試利用「特例」 (Special case) 的方式訴諸真理。嚴格來說，或許有讀者認爲兩人都沒有達到現今數學歸納法的標準，以我們今人的眼光來看待，利用數學歸納法的「歸納假設」，作出歸納步驟，最後，精準地延續敘述的成立，是最重要的過程。但如果你覺得巴斯卡在其證明過程中嘗試去作的「辛勤努力」令人深刻，那麼，在對比之下，我們將可以發現歐幾里得的「懶惰」，因爲歐幾里得顯然什麼都沒做！所以，若問歐幾里得的證明脈絡是否隱含了數學歸納法的精神，筆者的看法是「沒有」！

當然，不可否認的，上述兩人的證明過程，均非常明顯地提供了一個窗口引導我們通往「理想世界」，只是巴斯卡更加好心地想盡辦法，要提供了我們一條連結該世界的藤蔓！

後記

這篇文章是筆者最近幾天以來的讀書心得。關於數學歸納法，筆者仍有許多文獻仍在閱讀中，還沒有「消化」完畢，也因此筆者相信在這方面還有存在很多可以討論的議題，請靜待些時日，若筆者有任何新的想法或發現，將再與大家一起分享。

註解

1. 請參閱 *James Robert Brown, Philosophy of Mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*一書中的 p.35。
2. 此段原文敘述如下：“Is the diagram convincing？Is it a special case (i.e. for some particular n)？And does it establish complete generality (i.e. for every n)？Would a standard verbal/symbolic proof of the theorem, say, by mathematical induction, be more convincing？”

3. 請參閱 James Robert Brown, *Philosophy of Mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures* 一書中的 p. 39，此段的原文為："Some 'pictures' are not really pictures, but rather are windows to Plato's heaven. The number theory diagram is certainly a representation for the n=7 case, but it is not for all generality. For the latter, it works in a different way, more like an instrument. This, of course, is a realist view of mathematics, but not a realist view of pictures. As telescopes help the unaided eye, so some diagram are instruments (rather than representations) which help the unaided mind's eye."
4. 例如參閱楊維哲，蔡聰明，吳隆盛編著（1999），《高級中學 數學(一)輔助教材》p. 320，台北：三民書局。
5. 最近幾年筆者陸續在一些書上發現了此命題的他種證明方式，其中不乏有些較能引起初學者共鳴的手法。例如，請參閱蔡聰明(2003)，〈$\sqrt{2}$ 為無理數的證明〉，《數學拾貝》，台北：三民書局。
6. 該聲明的原文敘述如下："Although this proposition has an infinite number of cases, I will give a short demonstration, using two lemmas. Lemma 1, which is self-evident, is that this proportion is met with in the second base. Lemma 2 is that if this proportion is found in any base, it will necessarily be found in the next base."
7. 該段的原文如下："The proof is the same for all other rows, since it requires only that the proportion be found in the preceding row, and that each entry be equal to the entry above it and the entry to the left of that one, which is everywhere the case."

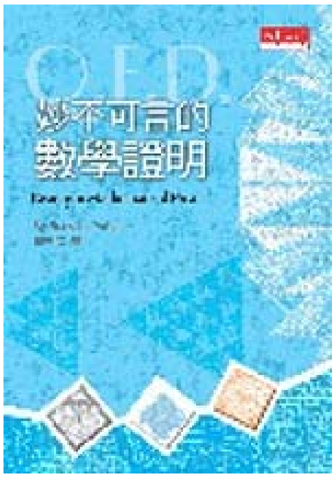
參考文獻

洪萬生 (2002).（數學文本與問題意識），《HPM通訊》第五卷第一期。
蘇俊鴻 (2005).〈數學歸納法的分析〉，《HPM通訊》第八卷第二、三期。
蘇惠玉 (2005).〈數學歸納法的證明形式之完成〉，《HPM通訊》第八卷第四期。
謝佳叡 (2003).〈數學雜談—從數學歸納法談起〉，《HPM通訊》第六卷第八、九期。
Brown, James Robert (1999). *Philosophy of Mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures*. London: Routledge.
Edwards, A. W. F. (1987). *Pascal's Arithmetical Triangle*. London: Charles Griffin & Company Limited.
Heath, Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publications.
Katz, Victor J (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.
楊維哲，蔡聰明，吳隆盛 (1999).《高級中學 數學(一)輔助教材》，台北：三民書局。

書籍介紹：《妙不可言的數學證明》

台師大數學系碩士班研究生　陳春廷

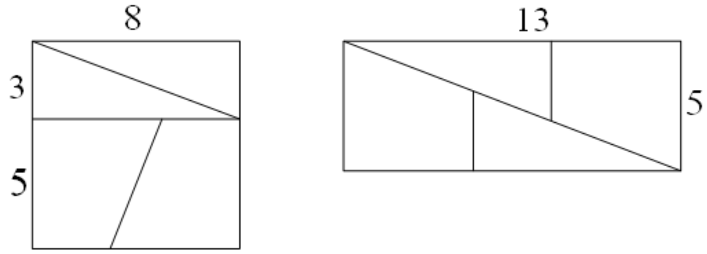
原書英文題名：Q.E.D.: Beauty in Mathematical Proof
書名：妙不可言的數學證明
作者：波斯特 (Burkard Polster)
譯者：胡守仁
出版社：天下文化
出版日期：2006 年 05 月 25 日
語言別：繁體中文
規格：平裝/122 頁/12.8*18.
普級/單色印刷/初版
ISBN：986417701X
定價：新台幣 180 元



《妙不可言的數學證明》的作者為波斯特 (Burkard Polster)，他是澳洲蒙那許大學 (Monash University) 的數學教授，另著有 *The Mathematics of Juggling* 及 *The Geometrical Picture Book* 等書。

全書內容分為二十三個部分，以下標號為筆者自行加記：（1）靠不住的真理（2）畢氏定理（3）又平又簡單（4）從派到 π（5）卡氏原理（6）卡瓦列里錐體切割（7）惱人的截頭角錐（8）阿基米德定理（9）由裡向外翻（10）數學骨牌（11）無窮階梯（12）順著鐘擺走（13）圓錐切片（14）摺出圓錐曲線（15）打結摺出多邊形（16）切割正方形（17）羃次和（18）永無止息的質數（19）數的本質（20）黃金比（21）大自然的數字（22）歐拉公式（23）化不能為可能。並有五個附錄：『一個定理，多個證法』、『人人為我，我為人人』、『眼見未必為真』、『一般情形的巴斯卡三角形』以及『多胞形』。

筆者認為全書的附圖，是最吸引人的部份，許多著名的數學證明只要以圖形呈現，肯定能讓讀者更容易發現關鍵之處，看一眼，就知道證明的訣竅何在。例如：畢氏定理的證明，是國中課程頗重要的一環，教師或許各自有一套教法，但是，不妨再看看本書『附錄』的各種巧妙證法（修剪證明法、分割證明法……等等）！筆者在此就不細談了。此外，呼應附錄三『眼見未必為真』，當利用切割拼湊圖形來做證明時，不能忽略作法的可行性與正確性，因此，如果切割拼湊圖形只是『看起來』好像相等，這並非是數學證明！以下圖為例，這是附錄三『眼見未必為真』之中的一個例子，雖然『看起來』左圖經過切割可以拼湊成右圖，但是，驗算面積並不相等，只是面積相差一平方單位往往不易發現，若是實際剪紙，更會誤以為是剪得不夠好造成的。因此，不難理解波斯特其實想讓讀者體會『數學證明』不僅僅是『看起來』如何而已，更是要經過正確無誤的推理與證明，有這樣的認知，才能進一步發覺數學證明之美！

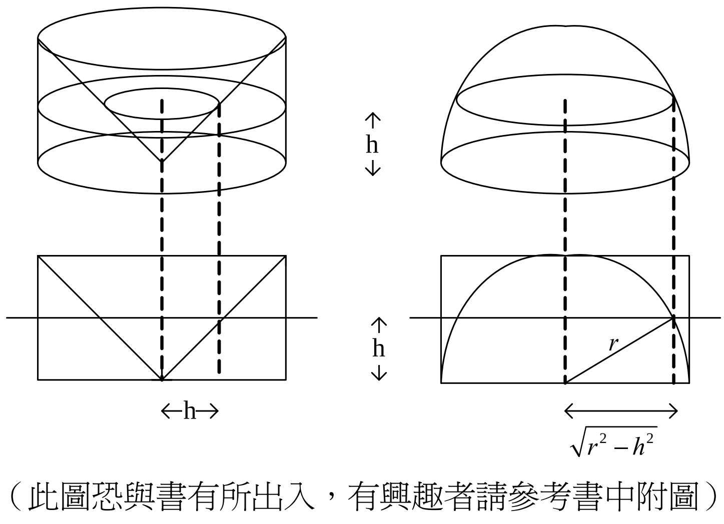


（本圖恐與書有所出入，有興趣者請參考本書附圖）

卡氏原理是以義大利數學家卡瓦列里 (Bonaventura Cavalieri,1598－1647) 來命名的，[1]此原理貫穿了本書中幾個主題，例如：卡瓦列里錐體切割、阿基米德定理……等等，這些相關聯的部份，即是筆者最欣賞此書之處。波斯特又將卡氏原理稱為『切片逼近證明法』：

> 兩個平面圖形與任一水平線相交的截線長度都相等，則此二圖形面積相等；兩個立體與任一水平面相交的截面面積都相等，則此二立體體積相等。

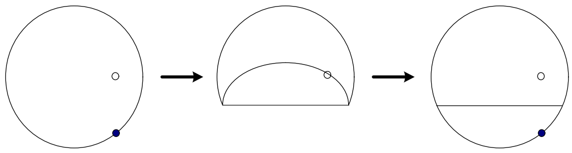
由此推導出錐體體積公式為 $\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高，進而我們可以利用切割分解立體圖形來計算體積。波斯特並且介紹了中國劉徽注《九章算術》裡所用到的立體，例如：陽馬（由立方體切出的一種四角錐）、塹堵（一種三角柱）……等等，不過，書中的『鱉腦』（一種四面體）應為『鼈臑』才對！此外，藉由卡氏原理可知半球的體積與「圓柱體扣掉圓錐體」的體積相同，方法大致如下圖，詳細說明請見《妙不可言的數學證明》。



（此圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖）

《妙不可言的數學證明》當然也不乏一些科普著作的『寵兒』啦！黃金比（自然界最鍾愛的數字）、費布納西數、數學骨牌（歸納法）、巴斯卡三角形、三大幾何作圖難題（倍立方、化圓為方、三等分角）……等等，這些就不用多說了。反而是『摺出圓錐曲線』與『打結摺出多邊形』這兩個動手做的單元更引人入勝！配合下圖，在圓形紙內任取一點，將圓周上任一點摺至此點，再將紙打開就得到一條摺線，取圓周上不同的點，重複同樣動作最後可以得到一個橢圓。試著想一想，其中的原理到底是什麼呢？其次，利用長方形的紙能摺出拋物線，用橢圓形的紙能摺出雙曲線唷！是否已經讓人躍躍欲試呢？別急、別急！還沒說完咧！學生時代流行用長紙條摺紙星星，也就是正五邊形，這還不夠看喔！可

以用兩條長紙帶摺出正六邊形，如果想摺出正七邊形也不成問題，現在就來挑戰看看吧！



（本圖恐與書有所出入，有興趣者請參考書中附圖）

這是一本只有 122 頁的小書，讀起來並不會太吃力或花費很多的時間，但是，足以啓發讀者的興趣，說不定還能讓誤以爲數學證明是枯燥乏味的人就此改觀！雖然其中包含一些較難的部份，以歐拉公式爲例，牽涉到凸多面體的頂點數 V、邊數 E 與面數 F 的關係（V＋F－E＝2），這是筆者大學時期才學到的觀念，但是多閱讀、多吸收、充實自己也不是壞事，搞不好因此激發出對數學的潛力，所以，筆者特別推薦給大家閱讀（尤其是中學生）。

註解：

1. 稱爲『祖氏原理』或許更爲恰當！在五世紀，球體積公式的推證方法，是由祖沖之與兒子祖暅根據劉徽的提示所求出的，比起十六世紀卡瓦列里早得多！

1. 爲節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂**PDF**電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至　**suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/～horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）
蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）
林裕意（開平中學）林壽福 (興雅國中)、傅聖國（健康國小）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 楊瓊茹 (及人中學)、羅春暉 (二重國小)
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中）、郭志輝（內壢高中）、程和欽 (永豐高中)、鍾秀瓏（東安國中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）、洪正川（新竹高商）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）
馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。