

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億  
助理編輯：李建勳、陳春廷（台灣師大數學所）  
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻、趙國亨（北一女中）  
黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）  
陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）  
王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南女中）  
英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）  
蔡寶桂（新竹縣網路資源中心）傅聖國（北市萬福國小）  
創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第八卷第七、八期合刊 目錄 2005年8月

- 數學才華——以平常之心看待「平庸」
- 94年大學入學指定考科數學甲多選題第9題參考解法
- HPM 學習單模組設計〈圓與圓周率〉單元簡介
- HPM 新期刊徵稿公告
- 數學科普書寫的新嘗試
- 《打開魔數箱》書評
- 日本出版市場科普書籍介紹
- 研究報告摘要：《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》
- 論文摘要：  
《從南秉吉(1820-1869)《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之「對話」》
- 《從算學試題看晚清自強運動期間數學教育與數學傳播》

## 數學才華 —— 以平常之心看待「平庸」

香港大學數學系 蕭文強教授

「求證」不是一齣數學劇，只是一齣以數學家的活動為背景的戲劇。因此，觀眾根本不需要什麼數學知識也可以欣賞瀰漫全劇的親情、友情、愛情

—— 劇中人內心世界的矛盾、自責、信任、興奮之情表現為喜怒哀樂的起伏跌宕。當中又以父女之情最為關鍵：父親對女兒的期望和愛護，女兒對父親的關愛照顧和長年累月受壓力偶爾萌生煩厭而導致的自咎，著實使人動容。

也由於這個父女關係的中心點，那條重要定理的證明便顯得是個更為突出的環節。劇名所指，不單是那條定理的證明，也指能否（或要否？）證明是誰構思那個極富創意的證明？在數學領域以外，有些事情毋需確鑿的證明，大家都會接受，過份追求證明反為不美！其實，即使在數學領域以內，證明的作用，又是否僅僅為了核實邏輯上的無誤呢？

很多人在劇中看到數學天才與精神病患者一線之隔這一點，我倒想從另一個角度看劇中人的想法（也許是不少數學家的想法）：大家承受著不甘於「平庸」的壓力。尤其大家一向認為數學才華應該很早顯現，要是年青時並非光芒四射，年紀越大便越感到英雄遲暮、日落西山的蒼涼。其實，在這方面而言，數學可能比別的藝術（數學不也是一種藝術嗎？）還要幸運！在數學上做了點點滴滴的工夫，雖然不是人人名傳後世，但在某種程度上這些工夫都推動了學科向前進展。各人的成果綜合於總體中，個人的貢獻在這總體形成過程中被溶化了。歷史上何止有千千萬萬的數學家，名留青史者萬中無一，即使在同時代的數學家群中，傑出者亦是少數而已。以此度之，是否應以平常之心看待「平庸」呢？

編者案：本文之轉載獲 Hong Kong Repertory Theatre 之同意，謹此聲明與致謝。

## 94 年大學入學指定考科數學甲多選題第 9 題參考解法

國立蘭陽女中 陳敏 老師

數學甲多選題第 9 題題目：有一條拋物線位於座標平面上方（即其  $y$  座標  $\geq 0$ ），並與  $x$  軸、直線  $y = x - 1$ 、直線  $y = -x - 1$  相切。下列敘述何者正確：

- (1) 此拋物線的對稱軸必為  $y$  軸。
- (2) 若此拋物線對稱軸為  $y$  軸，則其焦距為 1。（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）。
- (3) 此拋物線的頂點必在  $x$  軸上。
- (4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

答案：(2)(4)

這個題目是今年數學甲最令許多數學老師百思不得其解的問題，包含我自己在內，大概花了兩天的時間嘗試，用盡高中數學中的想法，仍不得其門而入。更有趣的事，第一時間公告答案的補教老師的答案，竟然是 (1)(2)(3)，若以大考計分方式得 -4 分，與全對 8 分，差距 12 分，可見這題應該是值得一探究的問題。

首先，第一情形為對稱軸為  $y$  軸，所以，令拋物線為  $x^2 = 4cy, c > 0$ ，所以準線方程式  $L: y = -c$ ，焦點  $F(0, c)$ ，設拋物線切  $y = x - 1$  於  $P(t, t - 1)$ ，所以  $d(P, L) = \overline{PF}$ ， $|t - 1 + c| = \sqrt{t^2 + (t - 1 - c)^2}$ ，得方程式為  $t^2 - 4ct + 4c = 0$ ，又因為  $P(t, t - 1)$  為切點，所以， $D_t = 0, (-4c)^2 - 4 \times 1 \times 4c = 0, \therefore c = 0, 1$ ，其中  $c = 0$  不合，得知選項 (2) 正確。

然而一般數學老師們都直覺以為除了開口向上的拋物線存在外，另一種存在的方式應該是側拋型，但是，光靠感覺是不具備有說服力，因此，筆者從《一百個著名初等數學問題歷史與解答》中得到靈感，根據蘭伯特(J. H. Lambert, 1728-1777) 定理：拋物線的三條切線的兩兩交點所形成三角形，其外接圓便是拋物線的焦點軌跡。根據題目所示的三條切線為  $y = 0, y = x - 1, y = -x - 1$ ，其兩兩交點為  $(1, 0), (-1, 0), (0, -1)$  所以，外接圓便是

$x^2 + y^2 = 1$ ，並且由於題目要求此拋物線必須位於  $x$  軸上方，筆者隨意取焦點座標

$F\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ ，接下來找出  $F\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  對  $y = 0, y = x - 1, y = -x - 1$  的對稱點分別為

$A\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), B\left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}\right), C\left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ，此三點  $A, B, C$  所在的位置便是準線方程式

$L: x + 2y + 2 = 0$ ，令拋物線的動點  $P(x, y)$ ，所以， $d(P, L) = \overline{PF}$ ，得

$\frac{|x + 2y + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{\left(x + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2}$ ，所以整理得拋物線方程式為

$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 14y + 1 = 0$ ，解得頂點座標為  $\left(-\frac{16}{25}, \frac{23}{25}\right)$ ，所以選項 (1)(4) 均錯。

檢驗：

(1) 令  $y = 0$  代入  $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 14y + 1 = 0$  得

$4x^2 + 4x + 1 = 0, \therefore (2x + 1)^2 = 0, x = -\frac{1}{2}$ ，可見拋物線切  $x$  軸於  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 。

(2) 令  $y = x - 1$  代入  $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 14y + 1 = 0$  得

$x^2 - 8x + 16 = 0, \therefore (x - 4)^2 = 0, x = 4$ ，可見拋物線切  $y = x - 1$  於  $(4, 3)$ 。

(3) 令  $y = -x - 1$  代入  $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 14y + 1 = 0$  得

$$9x^2 + 24x + 16 = 0, \therefore (3x + 4)^2 = 0, x = -\frac{4}{3}, \text{ 可見拋物線切 } y = -x - 1 \text{ 於 } \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)。$$

可見確實存在另一拋物線，所以選項(4)正確。

陳啟文的回應：

今年補習業界批評此次考題不夠創新，反被教育部官員把握機會，針對他們解錯題目幽默他們一下，真是難得的新聞！

我猜此題的設計的教授一定是熟悉 GSP 者，把拋物線兩切線正交的性質，轉換到直角座標上。

敏皓的解法相當不錯，據我知道當我提醒他此題值得探討開始，他的確花了好多時間寫解答，如今不愧是研究者，幫我們找到這麼精采的解法，太厲害了！

不過，離我們要講解給學生了解還有一段距離，大家不知還有更接近學生的講法嗎？趕快分享一下，否則，會掛黑板！

敏皓是我的偶像！

## HPM 學習單模組設計〈圓與圓周率〉單元簡介

北一女中 蘇俊鴻老師

### 前言

這份 HPM 學習單模組設計是筆者與傅聖國（萬福國小）、黃清揚（福和國中）三人參與洪萬生教授國科會《縱深統整》計劃第一年初步的成果，藉此一機會野人獻曝，就教方家指正。在第一年參與計劃的過程中，讓筆者印象最為深刻的部份是對於「學習單模組」設計的嘗試，大大地擴展對「學習單」此一學習工具的應用性。之前曾參與洪教授《古代數學文本在課堂上的使用》(2001~2002) 的計劃時，已經習得利用學習單來設計 HPM 相關的教案。接續在《數學教師專業發展與 HPM》(2002~2004) 的計劃中，更精熟學習單在教學上使用的設計。但是，當時的學習單設計著重於呈現國中（或高中）某一數學單元的片段，主要是重要概念（事件、人物或書籍）等歷史材料的運用。

此次參與《縱深統整》計劃的任務之一，是我們這個小組團隊（成員組成爲國小、國中及高中數學教師各一位）必須設計能連貫國小、國中及高中等階段的學習單，以達成「縱深」與「統整」的目標，而這正是我們初步討論集結的成果。由於國小、國中及高中各個階段的教育目標設定原本不同，因此，我們面臨兩個困難：首先，挑選能貫穿國小、國中及高中的數學課程的主題，並不容易。幸運的是，在與「圓」相關的許多主題中，「圓周率與圓面積」恰好是一個貫穿國小、國中及高中的數學課程的主題。因此，我們便將學習單設計的焦點放在這個主題上。

其次，由於國小、國中及高中等階段的學生所具備的數學知識與能力並不相同，一份工作單能各階段適用的可能性極小。所以，在洪萬生教授的建議下，參考 Victor J. Katz 與 Karen Dee Michalowicz 所發展出的 Historical Modules 的概念，我們採納了「模組」的想法，由成員各自針對任教階段的學生，設計出可適用的一與「圓周率與圓面積」這個主題有關—融入 HPM 的學習單，同時，在學習單中也加進教學指引，對於工作單在教學上的使用提供更多的解說，最後，再將之彙整成學習單模組（以 HPM 爲導向）。但是，我們所發展出 HPM 學習單模組與 Katz 與 Dee Michalowicz 等所發展出的不同之處，在於我們考慮了「縱深」與「統整」的因素。因此，每份學習單各自能在其適當的學習階段中使用。（詳見學習單模組設計說明）

### 學習單模組設計說明

這份學習單模組由三份學習單所組成（國小、國中及高中各一份）。設計想法說明如下：

#### (1) 國小階段：

在這個階段，強調具體操作，因此，測量直徑及圓周長的學習活動是一個重點。讓學生透過動手操作，感受不論圓形物體的大小爲何，圓周長與直徑的比值似乎總是某個區間變動（約 2.5~3.5 之間），而歸納出圓周率爲一定值。顯然，正確的測量方法將影響學童是否能感受到「圓周率」的存在。因此，在學習圓周率之初，引導學生正確的測量方法，是必要的先備技能。從而學習單的設計重點，是擺在測量方法上，讓學生測量的結果儘量不受測量技巧的影響。但對於圓周率爲何取近似值 3.14 則只能告知。

#### (2) 國中階段：

此階段的學生已由純然的具體操作，進而發展歸納性質與初步的公式推導的能力。由於國小教材中學得的圓面積或圓周長是用量度實做得到而非證明，這種作法所習得的圓面積充其量只能說是記憶，而不是真正的瞭解，若要說明或證明清楚又不可行（因爲  $\pi$  就是很難說明白的一個數學概念）。所以，圓面積公式的引入，要非常小心。本學習單有兩個

教學活動：活動一旨在改進『南一版』國中數學第一冊有關圓面積的活動，並介紹中國古代劉徽所採用的圓面積公式之一：半周乘半徑。他在證明圓面積公式「半周半徑相乘得積步」時，利用極限原理，設法將圓形轉換成以半周為從（長），半徑為廣（寬）的長方形，得到「故以半周乘半徑而為圓幕。」再由活動二得到圓面積與半徑平方成一定的比例（設為  $A$ ），則圓面積為  $Ar^2$ 。接下來要求學生比對這兩個公式  $Ar^2 = \frac{C}{2} \times r \Rightarrow A = \frac{C}{2r}$ ，其中  $C$  為圓周長， $r$  為半徑。因此， $A$  是周長除以直徑，也就是圓周率（ $\pi$ ）。筆者針對其中由面積切割將圓轉化成長方形最終得到圓面積的過程提出改進，由於對國中生來說由半周乘半徑，進而得到圓面積公式在學習上是有問題的。

### (3) 高中階段：

此一階段的學生，數學能力發展的重點之一，在於邏輯推理能力與抽象化能力的培養。以圓面積公式的介紹與使用為例，這是國小、國中階段就預定完成的教學目標。因此，對高中學生而言，這是他（她）們已經具有的先備知識。然而，圓周率  $\pi$  值的特性，『迫使』國小、國中階段的教學，對於  $\pi$  的介紹只能直接告知。而圓面積公式，就透過具有極限觀念（但隱而不談，也無法談）的圓之分割，（如〈圓周率與圓面積〉學習單活動），採取直觀認知的教學方式。但隨著學習階段的提昇，對於數學能力的要求隨著提高。高中階段開始要求嚴密論證的初步要求與培養。因此，反思圓面積公式的證明的需求性與確定性，用以引動教師在數學證明（間接證法）的教學活動，也可讓學生了解到數學證明要求是有其必要性。

由上述設計想法的說明可知，我們所發展出 HPM 學習單模組緊扣著國小、國中及高中課程各自的教育目標，每份學習單各自能在其適當的學習階段中使用，滲入相關的數學史文本或材料。不過，我們考慮了「縱深」與「統整」的因素後，設計學習單時會考慮前一階段學生所具備的數學能力與數學知識。這使得學習單之間具有連結性。這也是我們與 Katz 與 Dee Michalowicz 所發展出的 Historical Modules 不同之處。

## 結論與反思

在最近一次的例行會議討論中，我們曾將「圓周率與圓面積」這個主題，在現行九年一貫的教材單元安排的狀況好好地回顧一遍，或許容筆者花些篇幅報導目前教材編寫的現況，讓大家能更適當地評價這份學習單模組。

現行九年一貫的課程中，小學階段的教學重點，主要是透過直接觀察與動手操作，介紹「圓形」的圖形概念及性質，並將圓周長公式與圓面積公式導引出來。常見的教學設計，是藉由測量直徑及圓周長的學習活動，感受不論圓形物體的大小為何，圓周長與直徑的比值似乎總是某個區間變動（約 2.5~3.5 之間），最後再告知圓周率為一定值（由於學生測量技術精準的不同，這裏總是教學的難點所在），再依需要取值 3.14，因此，圓周長公式  $= 2 \times 3.14 \times \text{半徑} = 3.14 \times \text{直徑}$ 。至於圓面積公式的教學活動，則是仿照劉徽的圓面積公式的證明，透過具有極限觀念（但隱而不談，也無法談）的圓的分割，採取直觀認知的教學方式。推導出圓面積公式  $= \text{半周} \times \text{半徑}$ ，再利用圓周長的公式，將之改寫成圓面積公式  $= 3.14 \times (\text{半徑的平方})$ 。

到了國中時，由於已將圓面積公式與圓周長視為學生所擁有的知識，只在圓柱體積的教學中隨手一提，做為複習之用。至於其內容則與國小相同，也是使用劉徽的割圓術，推導出圓面積公式  $= \text{半周} \times \text{半徑}$ ，再利用圓周長公式  $= 2\pi r$ ，將之寫成圓面積公式  $= \pi r^2$ 。不同於國小教材，國中的教科書編者將 3.14 換成  $\pi$ 。為何 3.14 換成  $\pi$ ？ $\pi$  是什麼？ $\pi$  有什麼性質？教師卻都未有實質的解說。除了給學生告知的資訊片段，並不能帶給學生認知上任何的改變。至於高中階段的課程，就不再討論圓面積公式與圓周長公式，而是視為學

生的先備知識了。在這樣現行教學的實況回顧中，我們可以看到「圓周率與圓面積」這個主題在教學的歷程中有兩個重點：第一、教學的順序由『圓周長公式』到『圓面積公式』；其次，都由劉徽的所謂『割圓術』，推導出圓面積公式 $=\text{半周}\times\text{半徑}$ ，再利用圓周長公式 $=2\pi r$ ，將之寫成圓面積公式 $=\pi r^2$ （國小用 3.14 取代  $\pi$ ）。

反觀「圓周率與圓面積」的歷史發展，古代的數學家似乎採取不同的順序進行著。像被各家編者所青睞的劉徽來說，他對《九章算術》卷一〈方田章〉的註解，是先論證了圓面積公式 $=\text{半周}\times\text{半徑}$ 。緊接著，他使用割圓術，逐步計算圓內接正 192 邊形的面積，作為圓面積的近似值，並反求出圓周長，進而求出圓周率的近似值  $\frac{157}{50}$ 。阿基米德則是在《圓之測量》(Measurement of a Circle) 一書中，先用歸繆證法論證了圓面積=一個以圓半徑為高、圓周長為底的直角三角形的面積（這實質與劉徽的圓面積公式相同）。接著，他求出圓周率的範圍介於  $3\frac{10}{70}$  與  $3\frac{10}{71}$  之間。由劉徽與阿基米德的作法看來，他們都清楚知道圓周率是個定值，但卻都是由圓面積公式出發，才進一步求出圓周長與圓周率。

將教學現況的認知安排與歷史的發展作一對比，讓我們反思現行的教學安排所可能出現的認知困擾點上，提供了教師另一個觀照的角度。舉例來說，在國小階段由劉徽的割圓術出發，學生很容易直觀地看出圓面積 $=\text{半周}\times\text{半徑}$ ，而且這樣的表示法不僅符合實際測量的情境，也與學生的面積概念相脛合。因此，如再透過圓周長的公式，將之改寫成圓面積公式 $=3.14\times(\text{半徑的平方})$ ，是否有其認知發展上安排的必要性？或許等到國中階段，學生的能力更加成熟之後，再來介紹彼此關係的推演，會更加適當。

這份學習單模組為了能便於教師使用之故，在設計上未脫現行教學安排的框架，而非依照歷史發展的順序安排。但在 HPM 的觀照及縱深統整的要求下，我們在需要補強的地方作了嘗試（國中部份），並使之能延伸至高中課程。當然，這份學習單模組仍然相當簡約，有頗多待補充的地方。同時我們也會嘗試在課堂教學中實施，以為修正之參考。

### 附註：

- 1、傅聖國（萬福國小）負責國小階段學習單的設計；黃清揚（福和國中）負責國中階段學習單的設計。
- 2、學習單模組目次：〈探索生活中的圓周率—圓周率在哪裡？〉學習單（國小）；〈圓周率及圓面積〉學習單（國中）；〈阿基米德與圓面積公式〉學習單（高中）。

【HPM 新期刊徵稿公告】

## Prospectus and Call for Papers

This is to launch a new journal, the first journal devoted to the history of mathematics teaching:

### INTERNATIONAL JOURNAL FOR THE HISTORY OF MATHEMATICS TEACHING.

The rousing success of the Topic Study Group 29, *The History of Learning and Teaching Mathematics*, at International Congress on Mathematics Education in Copenhagen in 2004, demonstrated the need for a permanent and stable international forum for scholarly research in history of mathematics teaching. TSG 29's impact as the first international forum with a focus on mathematics education history continues to reverberate; and thus we feel confident that an international journal devoted to the history of mathematics teaching, complementary to journals in mathematics education, mathematics, and the history of mathematics, will be of substantial interest to educators, policymakers, researchers, historians, and mathematicians.

The major aim of the *International Journal for the History of Mathematics Teaching* is to provide mathematics teaching and mathematics education with its *memory*, in order to reveal the insights achieved in earlier periods (ranging from Ancient time to the late 20<sup>th</sup> century) and to unravel the fallacies of past events (e.g., reform euphoria). This journal will inform mathematics educators and others about political, social, and cultural constraints (as evidenced by historical events, processes, and periods) in order to improve mathematics instruction. In doing so, the journal aims to overcome disconnected national, cultural, and social histories and to contribute to establishing common themes and characteristic of the development of mathematics instruction in many cultures, differentiating between what constitutes national specificities or particularities and what may be indicative of global trends. Moreover, given the intimate relationship between dissemination and production of new and/or enhanced mathematical knowledge, theoretical reflections on the function of teaching will contribute greatly to understanding concrete and practical forms of the relationships.

The *Journal* welcomes approaches which extend beyond a descriptive seriation of administrative decrees, curricula, etc, and rather situate the development of mathematics teaching within the history of mathematics and the educational, social, and political history of a region, country, or countries. Topics to be published in the *Journal* may range from the transmission of theory and practice from other countries and the impact of modernization on teaching practices within a particular country to the aspects of teaching practice, use of textbooks, teachers' associations, and journals, and the cultural role of mathematics and teacher education policy.

**The primary focus of the journal will be the learning and teaching of mathematics in schools (primary and secondary grades as well as their functional equivalents), and hence the training of teachers for this instruction. Moreover, the institutional history of mathematics in higher education may be considered. All historical time periods and all cultures and nations are considered.**

The journal will publish three types of papers:

- research articles (in general up to 15-20 pages), as refereed publications,
- notes (up to 5 pages), and
- **book reviews (2 to 3 pages).**

Initially, we are planning to have two issues per year. The first issue should appear by Spring 2006. The Journal is planned to be published at Teachers College, Columbia University (New York/USA).

BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO  
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBERI.

Bild 41 zu III. 29.

Titelblatt der griechischen editio princeps des Simon GRYNÆUS. Basel 1533. - (Drucker-Signet von HERWAGEN). - (Exemplar der U. B. Basel.)

## CALL FOR PAPERS

For an initial submission to the journal one hard copy and a diskette with the manuscript saved in rich text format should be mailed to Alexander Karp, IJHMT, Program in Mathematics, Box 210, Teachers College, Columbia University, 525 West 120<sup>th</sup> Street, New York, NY, 10027, USA. Another copy of the manuscript (with all figures and tables) saved as a Microsoft Word document should be e-mailed as an attachment to [ijhmtteaching@yahoo.com](mailto:ijhmtteaching@yahoo.com)

Authors intending to publish a paper in the first issue should submit it by October, 15<sup>th</sup>. All papers should be written in English, typed double-spaced, and must conform to the style specified in the Publication Manual of the American Psychological Association (5<sup>th</sup> ed). Research articles should be submitted with the author's name, affiliation, address, and e-mail address on a separate page to ensure anonymity in the reviewing process and should begin with an abstract of about 100 words on a separate page. Figures should be submitted in a camera-ready form.

## EDITORIAL BOARD

<b>Abraham Arcavi (Israel)</b>	<b>Wann-Sheng Horng (Taiwan)</b>
<b>Elena Ausejo (Spain)</b>	<b>Jeremy Kilpatrick (USA)</b>
<b>Ahmed Djebbar (France/Algeria)</b>	<b>João Bosco Pitombeira (Brazil)</b>
<b>Eileen Donoghue (USA)</b>	<b>Leo Rogers (Great Britain)</b>
<b>Fulvia Furinghetti (Italy)</b>	<b>Yasuhiro Sekiguchi (Japan)</b>
<b>Paulus Gerdes (Moçambique)</b>	<b>Harm Jan Smid (Netherlands)</b>
<b>Hélène Gispert (France)</b>	

Chief Editor: **Gert Schubring** (Bielefeld University, Germany)

Managing Editor: **Alexander Karp** (Teachers College, Columbia University, USA/Russia)

## COMMENTS FROM COLLEAGUES :

Les mathématiques ont un rapport à leur enseignement plus étroit qu'aucune autre science, et aussi un rapport à leur histoire qu'il est bon de réactiver sans cesse. Il y a de la matière pour l'histoire de leur enseignement, et cette histoire peut intéresser beaucoup de monde. Donc, bonne chance pour la revue !

(Mathematics has a closer relationship to its instruction than any other science, as well as a relationship to its history, which it is good to renew constantly. There are materials on the history of mathematics education, and this history can interest a lot of people. So good luck for the new journal!)

Jean-Pierre Kahane

(Former President of the *Société Mathématique de France* and ICMI President)

The history of mathematics teaching goes back to the dawn of civilization and early efforts to provide education. Some educators would argue that as a social phenomenon, mathematics originates in teaching: It comes into existence when and only when its developer tries to teach it to someone else. The scholarly study of the history of mathematics teaching across societies and over time, however, is a relatively recent phenomenon. The new journal offers mathematics educators an attractive, convenient venue in which to recognize that scholarship.

Jeremy Kilpatrick

(Member of the U.S. Mathematical Sciences Education Board)



It is always a pleasure to offer congratulations and wish a new journal well, especially one that promises to add considerably to the growing circle of those with a serious interest in history of mathematics. If it is to thrive it deserves the support of mathematicians, historians of mathematics, and educators alike. The history of mathematics teaching is as old as mathematics itself, and whether self-taught or learned at the feet of a master, from books, in a classroom, at a college or university, mathematics and teaching have always had an intimate and symbiotic relationship. This new journal, for the first time, will serve to investigate this subject in a serious and professional way. As a former editor of *Historia Mathematica*, I know full-well the challenges in store for any new journal and its editors. In the years ahead, may the *International Journal for the History of Mathematics Teaching* soon establish itself as an essential resource for everyone interested in the teaching of mathematics and the broad historical spectrum of cultures and disciplines within which it has been studied and advanced, from antiquity to the present.

Joseph W. Dauben

(Former Chair of the International Commission on the History of Mathematics)

### 2005 年暑期『數學史』研讀班

主持人：洪萬生教授

地點：M310

時間：PM 2:00

日期	主題	導讀人	導讀人	備註
7/15(五)	巴比倫、埃及	英家銘		
7/20(三)	<i>Euclid's Elements</i>	林倉億		
7/20(三)-	Archimedes、 Apollonius、 Ptolemy、與 Diophantus	蘇惠玉		
7/29(五)	《算數書》	蘇俊鴻	林倉億	以下時間均為暫定
	《九章算術》劉徽注	黃清揚		
8/05(五)	劉徽 v.s. Euclid	蘇俊鴻	英家銘	
8/12(五)	阿拉伯數學 (The Arabs)	蘇惠玉		補充印度、 Fibonacci、Pacioli
8/19(五)	宋、金、元四大家	王文珮	黃清揚	
8/26(五)	十六、七世紀的西方數學	英家銘	蘇俊鴻	

附記：1. 提供講義，歡迎參加！

2. 7 月 20 日之地點為 M211。

## 數學科普書寫的新嘗試

台師大數學系 洪萬生教授

1994年，懷爾斯成功地實現了三百多年來數學家的夢想，完成了『費瑪最後定理』的證明，為二十世紀數學史完結篇，寫下最優美的一章。不過，看了本書《刻卜勒的猜想》（George G. Szpiro 原著，葉偉文中譯，台北：天下文化出版，2005）之後，我們才知道1990年代的動人數學故事尚未終篇。

所謂『刻卜勒的猜想』，是指刻卜勒在1611年所提出來的猜想：「一堆圓球最緊密的堆積方法，就是市場裡堆疊橘子或番茄的方式。」不過，在1998年之後，此一猜想也因為年輕數學家黑爾斯的成功證明，而成為一個定理！儘管黑爾斯在證明過程中大量地依賴了電腦，然而，此一猜想正如同『費瑪最後定理』一樣，都有300年以上的『昭彰惡名』。難怪早在此一『猜想』之證明廣被數學家社群認可之前，動見觀瞻的《科學》(Science) 在1991年3月1日出刊的那一期中，就迫不及待的發布消息說：一位柏克萊加大的教授（按即美籍華人項武義）「揀起了這個最古老、最困難、尚未解決的問題，把它證明出來。」

可惜，到目前為止，項武義還是不願意承認失敗，然而，他所做的全部努力卻始終無法說服數學社群中相關的主要數學家。因此，除非他能夠修補一些看起來是致命的論證缺陷，否則項武義的『攻堅』不成，將注定是他一世英名的永恆缺憾！

以上是本書作者史皮婁的『歷史』反思片斷。雖然目前他的春秋秉筆是否定論，還言之過早，但是，他在本書中簡述數學家的生平事蹟時，總是努力地分享有關數學社會史的研究成果，為數學知識活動的多重面向，提供了有趣的註腳。顯然，他並不偏愛科普最愛的一些題材如黃金分割、七橋問題乃至於性別意識等等。這種拒絕媚俗的科普書寫樹立了一個範例，那就是：即使在有關高等數學的科普著作中，深刻知識的傳遞與趣味的書寫，仍然可以兼顧，至於其平衡點的選擇，當然就看歷史敘事如何介入了。

另一方面，數學科普的敘事，由於必須貼近數學知識的某種『確定性』，從而我們總是可以利用『後見之明』，去重新敘說從前的數學故事，因此，可供寫作的題材應當不至於枯竭才是。本書的問世，就是最好的見證。（編者案：.本文原載《中國時報》2005年8月14日開卷版。）茲附本書目錄如下：

- 前言：橫跨四百年的數學接力
- 第1章：堆砲彈恰如堆甜瓜
- 第2章：刻卜勒這麼猜想
- 第3章：消防栓怎麼擺，足球員怎麼守？
- 第4章：二維問題接力解答
- 第5章：12個恰恰好，13個擺不了
- 第6章：從二維到高維
- 第7章：高斯也出手
- 第8章：希爾伯特的十八號問題
- 第9章：爭相位低上界
- 第10章：項武義的球面座標
- 第11章：黑爾斯嶄露頭角
- 第12章：用電腦來搞定
- 第13章：真的證明出來了嗎？
- 第14章：又見蜂房
- 第15章：這不是結尾

## 《打開魔數箱》書評

台師大數學系 洪萬生教授

原書英文題名：A Gardner's Workout

原作者：Martin Gardner

譯者：胡守仁

台北：遠流出版社，2004

數學知識通常被認為有兩個面向，那就是：有趣與有用。一般數學科普著作如果出自專業數學家，大都強調數學如何有用，而較少長篇累牘說明數學如何有趣。究其原因，或許『有趣』對於他（她）們來說，根本就像呼吸一樣自然，一旦必須舉例說明，好像又顯得矯情。因此，數學家除非頗有寫作天分或經驗，否則他（她）們對於數學的有趣面向，就經常過度訴諸專業（『自戀』？）而無法自拔！

本書作者葛登能大學主修哲學，畢業之後，一直都在新聞界與出版圈中工作，其背景迥異於數學家，所以，當他運用日常語言訴說數學的魔幻趣味時，其敘事手法自然比較平易近人。這可以解釋何以他在《科學美國人》(Scientific American) 開闢『數學遊戲』專欄時，會那麼受到廣大讀者的歡迎。事實上，此一專欄延續了 30 年之久（1956-1986），恐怕也是科普雜誌難得一見的盛況。

不過，該專欄的文字都已經先後結集出版。本書是葛登能從該專欄『退休』之後，另外在他處發表的文章，共計有 41 篇之多。這些文章絕大部分還是維持他那原有的風格，題材多樣而豐富。然而，在本書中也有八篇文章，主要是作者通過書評，用以抒發他對於美國數學教育改革的憂心。平心而論，他的觀點並非無的放矢，可惜，他始終關注數學的有趣面向，無從欣賞數學比較多元的知識活動對於教學的不可或缺。這種侷限，當然呼應了他對於數學的益智怡情取向之鍾情。

一般來說，數學益智問題近於遊戲，同時，也由於它們都未曾預設專業門檻，的確可以讓很多人滿足知識獵奇之雅好。其中當然也不乏十分有意義的數學問題，並因而吸引專業數學家的注意。儘管如此，這些問題大都歸屬於組合數學、離散數學或圖論，取材無法全面照顧到數學的各個領域，因而論及數學的有用時，不免有一點空泛。這些不足，也多少反映在葛登能對於所謂『新新數學』改革的評論，譬如他似乎很難體會數學問題的多元情境，而總是認為益智遊戲可以提升學生的學習興趣與成效。不過，這是他們那一代的知識精英之看法，我們也不必過分求全了。

本書中譯忠實可靠，尤其加上譯注，更是畫龍點睛之筆。惟『悖論』與『詭論』之譯名並未統一，值得再版修訂時注意。

編者案：本文原載《中國時報開卷版》2005 年 1 月 9 日

## 【日本出版市場科普書籍介紹】

東京工業大學社會理工學研究科 經營工學博士班 陳昭蓉

延續上次介紹的紀伊國屋 2003 年數學普及讀物銷售冠軍「不可不美麗」，這次介紹的書是 2003 年數學普及讀物第三名「懂數學的人這麼想」。您也許會問：為什麼跳過第二名？主要是因為第二名是偏向學習統計的人寫的書，而且本次介紹的作者在台灣也很受歡迎，主要作品已經翻譯為「數學是啥玩意」共三冊、「幹麻學數學？」、「阿基米德幹了什麼好事」〔均由天下出版〕，同樣擁有不少忠實讀者。這本書在日本也很受歡迎，表示台灣和日本讀者的科普閱讀還算有相似之處。下面的介紹參考了日本網站與其他報章雜誌的相關介紹。懂數學的人這麼想—實踐＝數學的思考法



[原書名：HOW THE OTHER HALF THINKS : Adventures in Mathematical Reasoning (Stein, Sherman) ISBN:4826901135]

244 頁 B6 白揚社 (2003-04-15 出版) 冨永星【譯】價格：2625 日圓

第 1 章 針和麵條

第 2 章 靠著 2 分獲勝

第 3 章 完整的三角形

第 4 章 連敗與連勝

第 5 章 永不重複的數列

第 6 章 計算票數

第 7 章 計算無限

第 8 章 雙胞胎

後記 重新回顧

附錄A 三角形 附錄B 雙胞胎

本書如同數學普及讀物一般，旨在說明數學的有趣之處，主要特徵是以簡單的例子讓讀者稍微計算或畫圖，親自體會數學家思考的過程，不知不覺中再延伸到更深入的問題，讓讀者產生一種恍然大悟的快感。讀者可以透過本書了解，不要受到數學問題看來複雜的樣子影響，而是應該善用簡單的計算和圖，將內容推廣、一般化，找出真正的問題本質。書中的例子看起來簡單有趣，即使是原本不喜歡數學的人，也可以當成生活遊戲書閱讀。

第 1 章介紹的是著名的浦豐的針(Buffon's needle)，這個例子現在經常被科普書籍引用，也有網站讓大家上網進行電腦模擬，所以，有些讀者看到這個主題可能會覺得沒什麼特別的，但是作者斯坦提出自己獨特的觀點和解釋，展現了他純熟獨特的解說技巧。第 2 章和第 4 章是關於運動比賽的連勝和連敗問題，後來分別連結到隨機漫步與無限級數的總和問題。第 3 章是從點和線開始，並且討論斯伯納引理(Sperner's Lemma)。第 5 章的話題也是有關連接點和線的圖，不過應用的例子延伸到行動電話。第 6 章是從計算票數開始，一直延伸到光線的最短距離問題。第 7 章討論集合論和無限，第 8 章同樣是從看來簡單的話題延伸到讀者意想不到的應用問題。

本書的主要觀念是希望讀者明白，所謂數學家的思考方式，就是透過運用常識、深思遠慮和靈活思考，想辦法導出合理結論的能力。近來數學教育的趨勢同樣越來越重視解決問題的能力，以及掌握問題本質的洞察力。作者說故事的技巧很好，因此即使是小學高年級的學生，應該也可以看懂書中大部分的內容，而且覺得有趣。如同斯坦的其他數學普及著作一樣，讀者同樣會因為閱讀此書而感覺到，數學家合理的思考方式在日常生活中同樣

妙用無窮。

這本書的主要優點在於提出各種代數、幾何學的問題，從各種不同的觀點解析問題，而且文章寫得很平易近人，適合一般人閱讀。個人認為日文書名翻譯得相當好，網站上很多讀者都覺得日文書名貼切的表達這本書的內容重點，也讓自以為不懂數學的人想要看看懂數學的人怎麼想。雖然不是屬於可以立刻提昇數學成績的實用教科書，但是有讀者表示「可以讓平時不常用的腦細胞接受新的刺激」。

光是看斯坦的著作譯為不同語言也能在各國出版市場受到歡迎，就能感覺到他高明的不只是本身的數學能力，在對於數學的解釋和對讀者表達自己的想法的功力上，也值得國內的科普作家學習。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：陳昭蓉（東京工業大學）

英國劍橋：李佳燁（李約瑟研究所）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中）  
蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）  
郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文  
（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工）  
林裕意（開平中學）

台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中）  
林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中）  
王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）  
鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 鍾秀瓏（東安國中）  
程和欽（永豐高中）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）  
洪正川（新竹高商） 陳春廷（寶山國中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）

台南縣：李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）

金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中）

馬祖：王連發（馬祖高中）

## 【研究報告摘要】

### 《中小學數學科課程綱要評估與發展研究》

研究主持人：陳宜良（台大數學系）

研究員：單維彰（中央數學系）、洪萬生（台師大數學系）、

袁媛（花蓮教育大學數教系）

研究助理：魏士傑、舒宇宸、姜志遠、翁婉珣、黃子倩、洪雅齡

本研究依據 92 年頒布之國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要，以及預定 95 學年實施的高中與高職數學課程暫行綱要，為教育部之「建置中小學一貫體系計畫」探討檢視 12 年數學課程設計之一貫性、銜接性、適切性與政策呼應性，並將彙整之資料、結論與建議寫成此報告書。

為撰寫此報告所執行之研究方法為文獻分析、跨國比較與專家晤談。據以分析之文本，取美國加州、新加坡、中國、南韓、日本與英國等六個國家或地區之相對數學課程綱要或標準，分別與上述兩套本國數學課程綱要做兩兩比對而列出異同，再由研究團隊探究分析。過程當中亦需查明各國之教育體制與課程結構，以為整體判斷之依據。而針對各階段綱要制訂者、教師代表、教科書編者分別舉辦之座談，也事先由研究團隊根據文獻分析的初步發現而擬定題綱，徵詢多方意見以匯聚共識。

本報告以前兩章概述此研究之背景與研究方法；第參章比較本國與上述六個國家或地區之數學課程設計與相關實施方法；第肆、伍章依施政呼應性、綱要設計之一貫與銜接性與課程內容之合宜性，詳述研究結果，並論及資訊與通訊科技工具的角色，與時數分配和選修制度等實施方面的議題。在第肆、伍、陸章的論述當中，已經分別就特定的課題提出建議。第柒章彙整了主要的結論與建議。附錄則詳列我國與各國之數學課綱並列比較表格。

在課程的實施策略與設計理念上，本研究之結論呼籲重視語文和數學在基礎教育中的核心地位，並如實反應於授課時數的分配；期望 12 年整體觀點的數學課程規劃，能夠更有效率地發展主軸知識與技能，並正視科技工具對於學習本質造成的影響；還建議以更寬宏的眼光和胸懷，來落實適性的教學與後期中等教育的選修制度。對於目前數學綱要之安排與內容，本研究也做出明確的調適建議。我們冀望這些結論與建議，能對未來的政策擬定，以及數學綱要之修訂，做出實質貢獻。

## 【台師大研究群碩士論文摘要】(2005年6月)

《從南秉吉 (1820-1869)《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之『對話』》

金門高中 張復凱老師

天元術與借根方是兩種利用設未知數來解題的方式，前者早在李朝世宗時便隨著《算學啓蒙》而傳入韓國；後者則是在《數理精蘊》的傳入下為韓國所習得。由於天元術傳入的時間較早，剛開始接受「借根方即天元術」或「天元術即借根方」的觀點時，採取的方式是「以天元術解借根方」。然而，到了南秉吉、南秉哲與李尙嫻的時代，即便依舊視借根方等同於天元術，但在先掌握了借根方的情況下，從南秉吉的《緝古演段》、《無異解》到南秉哲的《海鏡細艸解》，不斷地出現「以借根方解天元術」的相反情形。後來，在了解了天元術後，借根方等同於天元術的信念逐漸動搖，最終更徹底將兩者區分開來，並在比較優缺下，視天元術為較佳的解題選擇。這段借根方與天元術的「對話」，在知識論的面向，展現了豐富的面貌。

另外，中韓間的交流在這段「對話」中亦扮演著相當重要的角色。除了借根方與天元術的知識本身外，中國面對借根方與天元術的觀點亦深受韓國算家的注意。或是先入為主地接受《赤水遺珍》的「天元一即借根方解」，或是對李銳「相消法與借根方兩邊加減則有異」的論述大肆踏伐。最後，更是在《數書九章》與《四元玉鑑》的影響下，最終確立了天元術優於借根方的觀點。在這段中韓的交流當中，韓國雖明顯處於文化入超國的地位，但絕非單純地接受。因此，在整個借根方與天元術的發展裡，仍可不斷地發現其自主發展 (autonomous development) 而產生轉化 (transformation) 的情形。

本論文將從南秉吉的《緝古演段》出發，延伸至整個南秉吉時代的相關著作，並在中國算學書籍的配合下，勾勒出此時借根方與天元術的發展全貌。

### **Oystein Ore (1899-1968) in the Preface to his**

#### ***Number Theory and Its History:***

Most texts on number theory contain inserted historical notes but in this course I have attempted to obtain a presentation of the results on the theory integrated more fully in the historical and cultural framework. Number theory seems particularly suited to this form of exposition, and in my experience it has contributed much to making the subject more informative as well as more palatable to the students. (New York: Dover Publications, INC, 1988)

## 《從算學試題看晚清自強運動期間數學教育與數學傳播》

台中市五權國中 歐士福老師

晚清的自強運動期間，推動了各項學習西方科學技術的新政，並展開了大規模的西學東漸。由於「算學」作為代表自強運動的符號，在此期間，清政府展開的各項教育改革政策中，數學教育成為各種新式學堂(如京師同文館)與傳統書院(如龍城書院)的關注焦點，從它們所遺留下來的各類試題中，可以清楚地看出當時社會上重視的數學知識類型。而隨著數學知識愈來愈受到重視，各種數學傳播事業也逐漸展開，《格致彙編》、《湘學報》、《算學報》等刊物，都曾經在傳播數學知識上，扮演關鍵性的角色。

整體而言，自強運動期間的數學知識活動，呈現地是一個由中法過渡到西法的重要歷程。在李善蘭接手京師同文館的算學教習之後，便從事「合中西為一法」的教學模式，日後隨著西法逐漸輸入，中國傳統算學慢慢退出晚清的數學知識活動之中。最具體呈現當時數學知識活動的，便是各書院與學堂的課藝內容，以及當時廣為流傳的各種科學、數學刊物刊登的數學內容，於是，本文便以此二者為論述主體，探討晚清數學知識普及化的過程中，數學教育與數學傳播所注重的實質內容。

理查·菲立普 (Richard Phillips)

《數字邏輯 101》(Numbers: Facts, Figures and Fiction)：

如果你真的想數星星，那麼，你就會永遠數下去。我們都知道要怎麼數，但我們也都知道那是不可能完成的事。數目對我們來說既熟悉平凡，同時卻又深刻有力，這是因為它們無窮無盡，而且也因為它們讓生活中很多事成為可能。