HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台師大數學系）
助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（新竹高中）陳彥宏（成功高中） 陳啟文（中山女高）王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南師院附中）英家銘（台師大數學系）謝佳叡（台師大數學系）蔡寶桂 (新竹縣網路資源中心)
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第七卷 第九期　目錄(2004年9月)

- HPM 2004 瑞典之旅
- 《數學：確定性的失落》譯序
- 『克萊因』與我
- 數學雜談（三）--從邏輯談起

HPM 2004 瑞典之旅

國立勤益技術學院　劉柏宏教授

對數學教育的研究者來說，位處寒帶的北歐在今年夏天可是『熱』得不得了。重頭戲是第十屆國際數學教育會議 (ICME-10) 今年七月於丹麥的哥本哈根舉辦，而一連串的衛星會議也在其他北歐國家展開。例如芬蘭搶先 ICME-10 之前籌辦一項有關「問題解決」的數學教育會議 (The International Congress on the Problem Solving in Mathematics Education)；第二十九屆數學教育心理學年會(PME-29) 緊接 ICME-10 之後在挪威舉行；而同時間瑞典的 Uppsala 大學，則於七月十二至十七日舉辦了 2004 年的 HPM 會議。由於時間的重疊，筆者只能捨 PME 而就 HPM。

Uppsala 大學創設於西元 1477 年，是北歐最古老的大學。它總共蘊育出六位諾貝爾獎得主，而「美麗境界」的男主角 John Nash 於領取諾貝爾經濟學獎後亦受邀到 Uppsala 大學發表演說，其教學品質與學術聲望由此可見一般。筆者自兩千年加入 HPM 這個大家庭後，便與 HPM 結下不解之緣，而得知此次 HPM 會議在這歷史悠久的大學城舉辦，當然得不辭迢迢千里之苦與會。初到 Uppsala 便迫不及待逛逛這古老城市。在市中心便可一眼望見位於山丘上巨大的城堡和高聳的教堂，可說是 Uppsala 最醒目的地標。開會的地點位於一新校區，離市中心約二十分鐘徒步的路程，稍嫌遠了一點，不過，也趁機減了一點肥肉。與會的人員許多都是 HPM 的老面孔，不少人四年前來過台灣，與他們聊起在台北的故舊往事，不覺莞爾。例如挪威的 Bjorn Smestad 就談到住進師大分部後，第一天晚上到校門口的簡餐店，跟店員比手畫腳點餐的趣事。四年前是他生平第一次離開歐陸，也是第一次在語言完全不通的情況下點餐。聽他的故事我也有同感，我一向不習慣也不熟悉西方餐飲，每次到國外開會第一件事情就是找麥當勞。因爲在麥當勞點餐完全不必比手畫腳，口味也熟悉。此次在 Uppsala 不僅找到麥當勞，還有漢堡王，帶去的泡麵自然就派不上用場了。

此次，瑞典 HPM 會議與四年前相較在形式上並無多大差別（只是後勤支援方面就比不上我們台灣的效率高了，投影機經常出問題），在主題內容上倒是較爲多元。不僅談數學史與教學上之應用，也談數學與藝術、數學與文學、數學與音樂等跨領域的關聯，不過，在論述

深度上似乎可以再加強。除了會場內有所收穫外，會場外與洪萬生老師的散步閒談，也啓發了不少想法（這使我想起陳之藩的<散步>這本書）。洪老師對推廣 HPM 的奉獻與熱忱是有目共睹，不過，不諱言 HPM 的研究在國內外數學教育界都並非顯學，主要是數學教育研究方法有其典範，凡未能或未經其方法典範檢驗之研究成果自難登大堂。而 PME 方面的研究是目前數學教育的主流，吸引了最多的研究能量，洪老師與我都有結合 HPM 與 PME 的想法，而洪老師與蘇意雯老師這次在瑞典發表的文章，也是往這方向努力的一個實踐。只是，從這次 HPM 所討論的議題看來，似乎並無這方面的共識。依我個人參加 PME 會議的初淺經驗看來，PME 研究講究『看得見』或者是『能探測』的實驗證據。但數學史對教師或學生的影響，經常是長期性甚至是隱藏性的，因此，HPM 的研究未必能符合上述的條件。不過，我們也不必太過悲觀，目前已有不少 HPM 方面的學者，指出數學史料對學生數學認知與數學思考有相當程度之助益，其所提出的理論在直覺上是合理的，只是欠缺一些實驗證據支持。所以，只要細心設計實驗，要突顯出 HPM 的教育效益並非不可能。到目前爲止許多教育上的實驗，指出引入數學史對學生學習態度有顯著提昇，不過，對學習成就的影響卻不明顯。因此，一些數學教育學者認爲數學史的效益恐僅止於此，雖然對學習有些許幫助卻不値得深入研究，尤其當對數學態度的研究已從 70、80 年代時的高峰往下滑時，數學史的角色更難吸引眾人目光。所以，如何結合 PME 的研究，來探討數學史在「認知」與「思考」兩方面的成效應該是 HPM 可以走的一個方向。

目前在科學教育方面，已有不少文獻指出科學史與科學本質在學生學習上的幫助，相信只要能吸引足夠的研究能量進行長期觀察，HPM 的效益終究會顯現出來。再者，洪老師與蘇意雯老師所談到 HPM 模式與教師的行動研究，在師資培育上更是一個相當具有價値的研究面向。只不過在提出 HPM 的教育效益的同時，也須提出配合的條件，不能只是爲讀史而讀史，而悖離 HPM 的宗旨，而且也必須認識到 HPM 的侷限性。如蕭文強教授在這次 HPM 會議演講中所指出的，數學史不是數學教育的阿斯匹林，不能寄望它能迅速解決數學學習上的一些問題。

在從瑞典回程的路上，筆者一直想著參與此次 HPM 會議的收穫是什麼，也就不免拿它和去年所參加夏威夷的 PME 會議做比較。在 PME 談的大都是現實的教育問題，講究教學技巧，強調學習認知，關心的焦點在「人」的身上，討論如何讓人接近數學，其議題通常具有地域性與時間性。相對地，HPM 將焦點放在「數學」，剖析其發展脈絡，探查在教學上的價値，討論如何讓數學接近人。歷史告訴我們人與數學本爲一體，以教育觀點來說 PME 與 HPM 兩種進路均不可偏廢。筆者在瑞典參與的最後一場演講，是 Monica Neagoy 所談的 “The mathematics of beauty and the beauty of mathematics”，她以多媒體的方式展現了數學概念與大自然事物間所具備的同質性之美。所以，若問我爲何今年捨 PME 而就 HPM，有一個很重要的因素，就是 HPM 所傳達的是人類歷史上思想與文化的一種永恆價値，而我想這是 PME 所無法取代的。

《數學：確定性的失落》譯序

台灣大學數學系　翁秉仁教授

一、述說『數學』這一本大書

台灣一般人心目中的數學，可能只是極爲重要的考試科目，除了帶來無止盡的求學痛苦，以及拿來證明誰比較聰明外，有興趣知道數學到底爲什麼重要的人並不多。面對神祕的奇異符號、公式、方程式，大部分人對數學大概多半敬而遠之。

另一方面，愛好科學的人，多半知道從牛頓以降，數學與（物理）科學之間密切的關係，今日許多科技成果追本溯源，處處都可以見到數學的足跡。讀哲學愛思考的人，則多半知道數學在人類思想史中的樞紐地位，自柏拉圖與亞里士多德之後，任何西方思想家若想要對人類知識成一家之言，無不需要對數學的知識位置有獨出機杼的見解。二十世紀學數學的人，對數學的理解則可能是一個合理而嚴密的邏輯思考系統，是層層累積而上的公設、定義、定理、系理、新定義……，是抽象又華麗的玄思遊戲，過關斬將克服一個個未解的問題。

不同時代的數學家、哲學家、科學家，以自己特有的關注方式，配合數學的演進、時代的氛圍，來詮釋數學作爲真理的意義。而數學的思想豐富性，似乎注定各花入各眼，只能以特定的角度，以管窺天。顯然，我們需要一位懂數學的說書人，能整合數學的諸多面向，在它們的背後讀出一條活生生的數學生命史。這裡「活生生」的意思不僅是一般科普書的有趣多樣而已，而是有著迷惑、掙扎、成功、失敗的奮鬥過程。換句話說，數學固然一直有著神的面貌，我們希望領會的卻是其中人的尊嚴。

本書或許是一個成功的嘗試，說書人是著名的數學史家莫理斯・克萊因。

二、克萊因的學術生涯

克萊因（Morris Kline, 1908~1992）生於紐約布魯克林，學士、碩士、博士都在紐約大學取得。1952 年任教於紐約大學庫朗數學研究學院，專長爲電磁學及其他應用數學，後來轉往數學史工作。除了數學專業的著作之外，他最重要的數學史著作爲《數學史：數學思想的發展》（1972），另外還有《數學與物理世界》（1959）、《西方文化中的數學》（1953）等。另外，克萊因對各級數學教育曾有批評，除了以他的觀點所撰的微積分教科書之外，這方面他最知名的兩本書是，抗拒新數學教育觀點的《爲什麼強尼不會作加法：新數學的失敗》（1973），以及對數學數學教育的批評《爲什麼教授不會教書：大學教育的兩難與數學》（1977）。

先回頭說一下庫朗學院的創立者。原籍德國的庫朗是希爾伯特的學生、同僚與共同作者（合著有《數學物理的方法》），一生前半期的研究生涯是在當時數學界的世界之都擱廷根渡過。後來因爲猶太血統，在納粹掌權後被迫出走，1934 年從德國赴美，庫朗延續他在哥廷根大學所創立之數學研究學院，從當時一無所有的紐約大學數學系，建立了這個後來（1964 年）以他爲名的學院，成爲世界應用數學的重鎮。克萊因從大學之後幾乎都一直待在紐約大學，浸淫在這個「真正」的數學傳統中甚深。他從一位應用數學家，後來轉入數學史研究，並且對數學教育迭有發言。初看起來，在以應用爲宗的數學研究機構裡，從事歷史研究，似乎頗爲奇特，但其實自有他一以貫之的考慮。

三、二十世紀的數學潮流

二十世紀的數學潮流從根本來說，有兩個重要的方向，第一是與科學傳統的分離，純數學研究不但抬頭，甚至幾乎壟斷了數學的解釋權；第二是貫徹形式、邏輯的嚴格化取向，整個融入研究的呈現方式和數學教育的標準。這兩者雖然不完全等同，但後者的實踐結果，對於純數學潮流卻著實有推波助瀾之功。簡而言之，二十世紀初期的四大基礎學派之爭，本身只是一個數學最高層的內部反省運動，邏輯主義、形式主義、集合論學派的所有論旨，都加強純數學研究任意操弄公設、定義、符號的傾向，就連反形式傾向的直覺主義，他們心靈爲數學根源的觀點，也無疑加強純數學恣意想像的一面。幸好，當時數學基礎論戰的旗手都是頂尖的數學家，他們扎實的科學訓練與數學理性的要求融而爲一，展示了非凡的品味，爲二十世紀的（純）數學發展奠定了重要的基礎。但是純數學那種一味以自己的喜好，只能以品味和困難度爲方向的「現代」氣味，以自己的邏輯複製發展，到了克萊因的年代卻已瀰漫數學界。

正如克萊因在書中所言，純數學的重要特徵，如抽象、推廣、專業化、公設化，都有其必要性，但這些面向卻只是指著月亮的手指。克萊因所質疑的正是這種把手指視爲重點，反而冷落了月亮的觀點。因此，純數學面臨的尷尬外部問題之一，就是爲什麼社會大眾要「供養」一批人從事這樣的玄思。[1]能夠辯護的策略不管如何曲折，幾乎都必須跟數學的某種應用性相結合：社會需要科技、科技需要科學、科學需要數學、而與應用較相關的數學又需要純數學；今日的純數學就是未來的應用數學；不要管純數學家到底在做什麼，社會就是需要足夠多的數學家、數學社群、數學環境，才足以撐起可能有益的數學進展；數學家不只是做研究，他們的教學提供了學生日後從事應用時必要的邏輯訓練和數學基礎。

稍微深思，就知道除了最後一點的確有其說服力之外，其他的說詞都幾近詭辯。在人類社會，以創意或思考這些勞心工作爲「職業」的人如文學人、藝術人、廣告人，從來都面臨嚴苛的市場壓力問題，成王敗寇，自負成敗。在歷史上曾經大規模地用社會力量來支持玄思者的情況，恐怕只有宗教的神職人員可堪比擬。而如果今日的數學工作者真的是消極或積極的神職人員，那他們所應許於大眾的又是什麼呢？除了訴諸缺乏公眾基礎、隱含知識菁英意識的數學結構美感，以及數學問題挑戰的困難度之外，有責任感的「純」數學家恐怕還是得寄託於與自己的研究其實頗有距離的兩個典型又悠遠的「大論述」來安身立命：也就是數學是真理，或數學是自然的語言。

比較奇怪的是，純數學家不只是在心理上援引這個說法來安頓自己，許多時候還慢慢從自欺轉成自傲，這個集體想像落實了整個二十世紀的純數學轉向，其徵候就是與世無關、對科學無興趣或避之唯恐不及、鄙視應用學科或應用數學，甚至誤導數學教育。不管數學基礎的論爭是不是有結果，二十世紀的數學教育的一個特色是集合論、邏輯、公設法的進場，並表現在許多有名的教科書上，這些教科書聯合起來的影響，是讓下一代的數學學生以爲這是數學的唯一面貌，是學習數學的唯一方法，甚至以邏輯的順序感取代了數學的時間感、歷史感。明智的數學研究者或許能免於這份影響，但是相當多的數學學子，日後成了國家教育系統裡的各級數學老師、轉而從事數學教育研究、或者進入政策體系，在教育現場、師資培訓、教育政策上一再複製這個數學觀的影響。

只有從這一點，我們才能理解身處形式或純數學氣候逐漸籠罩的二十世紀中期，克萊因爲何會從一個數學家轉入數學史研究，並理解他這些著作的核心與綱領。他的數學史著作是

爲了還原數學科學的活水源頭，證明數學與科學、技藝、文化間的密切關係。而數學教育著作則是爲了對抗形式數學教育所產生的嚴重後果。

四、歷史敘事與反思

本書在克萊因的著作中，特別顯得突出，是因爲這不只是一本單純的數學史，而是一本反省深思之書，也是一本「危險」的書，尤其是現在。

大部分的人開始對數學有興趣，並且能持續進行似乎枯燥無味的「符號研究」，幾乎都有段類似神啓的經驗，也就是突然感受到似乎窺見真理之姿的悸動，這個理性之人的非理性時刻，自有其魔力拉著數學家走入自己的「天職」。數學家克萊因無疑也是這樣走入他的職業生涯，因此看著克萊因在書中，慢慢剖析數學在思想史裡的地位、角色、功能，從聖潔崇高，到針對可疑的掙扎、奮鬥、勝利，一直到最後從二十世紀初，人類理性最有可能證成自己的那一刻，突然潰敗下來之後，必須另尋出路以保證這份人類遺產的尊嚴。克萊因等於用這本書，記錄下自己追尋數學意義的心理起伏。當數學不再如神祇般高高在上，不再只是一個冷酷獨斷的系統，克萊因反而讓我們意識到數學的確是屬於人類的功業，既受制於時空與人類狀況，也因此讓這門一般人視爲無人性的學科，真切顯露了它的人性深度。就這點而言，實在值得任何好思考、對智識領域有興趣的人，讀上一讀。

說這本書危險，是因爲他揉合了許多歷史上對數學的思考角度與爭辯，因此需要讀者配合，避免斷章取義。例如，若將數學的境遇當作悲劇，甚至把今日的數學狀況想成一無是處，因此可以用來支持某些後現代哲學家的論證，這顯然背離事實。因爲跨過這整個二十世紀，數學在科學裡的應用只有愈來愈成功、愈不可或缺，因此我們面臨的是長久的數學哲學之謎：「數學爲何能應用到自然」。至於，數學家無法滿意地內在說明自己思考的系統沒有矛盾，其實不能算嚴重。我們可以合理地說，這只是在某段時間，數學家對自己的要求太高、信心太強的結果。數學仍然持續成長，新一代的數學學習者，甚至根本不在意這段歷史。

五、純數 vs. 應數

另一個斷章取義的可能，是將這本書想成在散佈灰色思想，讓後學覺得數學不值一顧，甚至有讀者曾經跳出來衛護形式邏輯的數學觀。但是如果我們讀過克萊因其他的數學史書，就知道他對數學的看法一向穩健正面。仔細閱覽本書可以發現，克萊因所在意的是把形式化、純粹化數學視爲唯一的觀點，他所權衡調節的是要讓邏輯、公設、形式符號，這些近年來數學家特別看重的結構材料，和數學得以成長的直覺、經驗、大自然的因素取得平衡。

另一個會引起爭論的，其實也是數學界動不動就有人會爭辯的問題，就是純數學和應用數學的地位之爭。二十世紀中期，自認身爲數學道統傳人的（應用）數學家，眼見整個數學界的品味、風尚、政治在自己眼前整個轉變，很難不有義憤之言，克萊因在本書的最後幾章對這個問題多有著墨，也看得出他的火氣。不過持平而言，他的引證申論都頗有見地，只要是憂心數學教育裡形式訓練弊病的人，一定可以在他的說法裡，找到恰當的印證。就如前述，要社會供養純粹數學家頗有缺乏正當性的嫌疑，當今日的歐拉、高斯可能出現在非數學系之時，數學系的定位就會面臨挑戰，事實上在廿一世紀之交的這段時間裡，預算的刪減、數學系的存廢、數理科學的轉型、應提供更多基礎數學教學責任等等議題都紛紛搬上檯面，一葉知秋，已經可以看出端倪。

二十世紀的純數學轉向其實相當程度依賴於兩次大戰後的冷戰結構，爲了謀求戰略戰術優勢，各國的物理以及數學研究獲得相當多國家預算的挹注，造成純數學的一片榮景。對於像哈第這樣因爲與戰爭無關而頌讚純數學的人，這可能是歷史開的最大玩笑。冷戰退潮後，現在純數學和應用數學到底如何共生共榮的問題，已經跨入有識者的思考視域之內（不管是老師或學生，中心或邊陲國家），也因此克萊因這本二十多年前出的書，就其最根本的議題而言，現在仍然具有極大的啓發性。

當然經過二十多年來，許多克萊因探討的種種課題，都因爲整個數學的新發展，而有了新的微妙變奏，值得另文再討論。舉例來說，純數學和應用數學的邊界正受到挑戰。弦論物理學家維騰（Edward Witten）近年提出各種令人咋舌的「數學」猜測與陸續驗證，[2]他因此獲得數學界的最高榮譽費爾茲獎，但是卻也引發數學界對何謂數學和數學證明的爭論。事實顯示，在最高階的數學家裡，形式證明的意義和百年前一樣，受到直覺論證和合理說明的挑戰。而維騰之所以能做出數學猜測所根據的原理，卻又是物理詮釋取向下的某種「後設」原理，這相當程度逆轉了「應用」的方向，模糊了應數和純數的界線，而這又因弦論到底算不算一門物理學而更惹思辯。

計算機技術的成熟，也帶來相當多的挑戰課題，首先是利用計算機輔助的證明，算不算證明的問題，第一個挑戰證明概念的事件是「四色定理」的證明，最近一次則是刻卜勒裝球問題的證明。其次，計算機近年來符號運算（而不只是傳統數值運算）能力大增，計算速度也愈來愈快，這讓數學家和「業餘」數學家能利用這個新工具，進行歸納實驗、檢驗假設，近年乃有「實驗數學」觀的興起，這些研究要如何和正統數學研究區分是一個新的課題。同樣的計算機能力，也促使科學家利用模擬的方法，對付本來十分困難的數學問題，在解題時已經有許多人是先用電腦程式模擬問題，而不是像傳統先透過建立模型，再使用數學知識與推理進行解題。這個方法論傾向的影響，頗值得深思。最後，計算機的強大計算能力讓最「純潔」的數論和最商業的應用產生了奇妙的結合，造成目前密碼學的新一代風潮，這對純數學是否有應用價值，又產生了一個新的強大論點。

以上只是簡短談到兩個例子，事實上這些年來，科學的應用對數學研究的影響也新增或推動了許多課題：可總其名爲弦論數學的數學領域、基於計算機科學的算法複雜性、傳統數學的離散觀點和隨機觀點、在非線性科學影響下的動力系統新問題等等，影響所及讓許多傳統的純數學期刊也跟著更動其編輯方向。另外，數學哲學的爭辯在脫出二十世紀初期四大基礎學派之爭，仍然有許多實質的新觀點，許多都與數理邏輯的新發展、計算機技術的擴展，大腦認知科學的進步有密切的關係。在數學史方面，克萊因的數學史研究基本上是所謂內部的、思想史的研究理路，近年來有許多新的數學史研究，在理路上與克萊因的觀點有所差異，在資料、內容的深度幅度上，也都有很大的進展。

六、結論：轉向『實用』

總而言之，在在慢慢遠離廿世紀初期的理性和純粹傾向後，我們也許可以說，數學在廿一世紀之交已經實質在做「實用」（pragmatic）的轉向。不管這二十幾年間，有多少有意思的數學議題變化，而「實用」這個詞又容或有多大的解釋空間，克萊因此書中的基調，似乎正應和著這股轉變。數學依然是盡量要求嚴格的學科，但是它前進的方向和手段，遵循的將是更

實用的考量，既不是再背負著真理的必然性，也不是毫無節制的盲動奇想。這是悲劇，還是福音，克萊因最後所鍾情的歷史，將會給我們答案。

附註：

1. 就這個問題而言，數學和哲學可以說是難兄難弟。
2. 關於維騰在弦論上的一些貢獻，可參看布萊恩‧格林恩《優雅的宇宙》，台灣商務，2003 年。

編者按：編者為了方便讀者閱讀，特別加上小標題，希望無損作者原味。另外，若讀者對於本書之翻譯細節有興趣，請逕自參考翁教授所提供的網頁：**http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_kline.**

〔讀書摘記〕

數學不是完美的寶石，就算不斷琢磨也不見得能去除所有的瑕疵。但是，數學是我們和感官知覺世界之間最有效的連結。雖然數學基礎不穩固令人困窘，但這仍然是人類心靈最珍貴的寶石，必須珍藏與善用。數學隸身於理性的馬車，即使在深入檢視後發現新缺點，也無疑仍是理性的。懷德海曾說：「讓我們承認，數學探索對於人類靈魂是種神聖的瘋狂。」瘋狂，也許吧，但神聖是確定的。（摘自克萊因，《數學：確定性的失落》結尾語）

『克萊因』與我

台師大數學系　洪萬生教授

本期轉載了翁秉仁教授所寫的《數學：確定性的失落》之譯序。本書是翁秉仁、趙學信合譯克萊因 (Morris Kline) 的 *Mathematics: The loss of certainty* (1980) 之中譯本，目前已由台灣商務印書館出版（參見本刊本期『新書櫥窗』）。由於翁教授深刻掌握了克萊因的數學史論述之精髓，我特別請求他允許本刊轉載，讓更多讀者得以分享他的閱讀心得！

本書是克萊因數學史著述的三部曲中的最後一部。首部是《西方文化中的數學》(Mathematics in Western Culture, 1953)，第二部是《數學史：數學思想的發展》(Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, 1972)。這兩部對於我早期自行摸索數學史時，頗有助益。事實上，我在國中實習任教一年期間，曾輾轉從唐文標教授處（經由于靖）得以研讀《數學史：數學思想的發展》。我在在服預官役時，則抽空翻譯該書第十六章有關伽利略的部分，深受克萊因論述之鼓舞。後來，回母系教書學習開授『數學史』課程，曾鼓勵選修『數學史』的大四學生，翻譯改寫了《西方文化中的數學》的大半篇幅，刊登於《科學月刊》上。大約在這同時，同窗好友林炎全開始翻譯《數學史：數學思想的發展》，便找我幫忙湊一腳。後來，我們又找來另外兩位大學同窗張靜嚳與楊康景松合作，終於完成了那一部多達 51 章的巨著之翻譯。有關該書之翻譯，炎全應居首功，他以一人之力，承擔的篇幅超過了三分之二以上，令人感佩！

由於此一因緣，我在 1984 年榮獲國科會出國進修獎學金之後，即寫信向克萊因教授請教有關赴美（尤其是紐約大學 (NYU)）修讀『數學史』之留學事宜。我很快地接到他的回信，其中說明他已經退休，但提及 NYU 還有其他同事可以指導我作論文（按即 Harold Edwards，不過，克萊因當時好像未曾點明）。我大概也在同時接到了道本周 (Joseph Dauben) 老師的回信，他熱情地歡迎我到紐約城市大學 (CUNY) 就學，於是，就再也沒有與克萊因進一步的聯繫了。

1985 年 9 月我到了紐約市之後，曾試圖打聽克萊因的聯絡方式未果，所以，就放棄了拜訪他的念頭。不過，大約在第一次逛書店時，就購買了 *Mathematics: The loss of certainty* (1980)。一直到現在，它還是我經常參考援引的一部重要數學史論著。因此，我非常高興秉仁願意花時間與力氣將它翻譯出來，充實數學史的中文資料寶庫。我謹代表我們團隊對於他與趙學信的辛勞，表示敬意與謝意。

有關這三部曲所串連編織而成的『數學史學史』之圖像，很值得研究生作爲一篇學期報告來研究與撰寫。當然，有關克萊因的傳記研究，也是一個值得嘗試的目標（按顏志成即曾在我指導下，完成碩士論文－《Felix Klein 的數學教育思想》）。最後，我特別列舉幾篇我們與克萊因有關的文章目錄，供讀者參考指教：

1. 洪萬生 (1981).〈近代世界的創造者－伽利略〉，收入洪萬生，《中國 π 的一頁滄桑》（台北：自然科學文化事業公司），頁 75-90。
2. 洪萬生 (1981).〈數學創新與近代科學革命〉，收入洪萬生，《中國 π 的一頁滄桑》（台北：自然科學文化事業公司），頁 91-102。
3. 洪萬生 (1985).〈揭開數學史的研究新頁－林炎全譯『數學史』讀後〉，收入洪萬生，《從

李約瑟出發》(台北：九章出版社, 1985/1999),頁 6-11。
4. 彭婉如譯 (1985).〈懷念卡爾·波伊爾 (Carl Boyer)－ M. Kline 原著〉,收入洪萬生,《從李約瑟出發》(台北：九章出版社, 1985/1999),頁 35-46。也收入洪萬生,《孔子與數學》(台北：明文書局,1999),頁 291-301。
5. 洪萬生、彭婉如(合譯改寫)(1999).〈希臘數學的淪亡〉,收入洪萬生,《孔子與數學》(台北：明文書局,1999),頁 103-108。
6. 洪萬生、彭婉如(合譯改寫)(1999).〈大自然的研究量化取向〉,收入洪萬生,《孔子與數學》(台北：明文書局,1999),頁 109-126。
7. 洪萬生 (1999).〈數學史的另類書寫：推介 IGG 的《數學彩虹》〉,收入洪萬生,《孔子與數學》(台北：明文書局,1999),頁 329-336。

〔都柏林布魯姆橋 (Brougham Bridge) 上的『四元數』紀念牌〕

愛爾蘭偉大數學家漢彌頓 (William Bowan Hamilton, 1805-1865) 因發明『四元數』(quaternion) 而在數學史上留下不朽的聲名。據說他在 1843 年 10 月 6 日偕同太太,漫步經過布魯姆橋時,終於豁然開朗,而創造出這一個偉大的數學理論。為了紀念他在努力 15 年之後的『苦盡甘來』,在該橋的橋石鐫上了一塊紀念牌,文字如下：

Here as he walked by
On the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$
& cut it on a stone of this bridge.

(參考網頁：
http://math.ucr.edu/home/baez/dublin/index.html)

數學雜談（三）--從邏輯談起

台師大數學系助教 謝佳叡

一、前言

雜談，說穿了就是想到什麼寫什麼，沒有固定的主題，找一個起點後就任憑思緒天馬行空的走著。為什麼這一次選邏輯這個「起點」？倒也有一個原因！

今年三月底，受邀擔任教育系辦的一個關於資源班數學教學研習活動的講者，講題為「數學教學方法的發展」，參與的教師都是在學校擔任資源班或普通班的數學教師。研習前，我先做了一個資料收集，希望瞭解這些中學數學教師在這場演講中的需求是什麼。從他們所提出目前在數學教學上所遇到的難題，可以分成底下幾類：

（一）學生語文理解能力不夠、對於應用題的題意無法了解；
（二）學生對抽象名詞不了解、無法理解抽象問題；
（三）內容過多、學生學習速度慢，跟不上進度；
（四）學生邏輯不好、推理能力差；
（五）學生興趣低落、不愛數學課，挫折感較高；
（六）懶得動手算、且無人可督促；
（七）學生缺乏家庭支援無人可以幫忙課後複習；
（八）數學基本運算如：分數、小數、百分比…能力的缺乏。

從這些教師的需求，我們不難看出「自省」仍是教師們所缺乏的，但願意參加這樣的研習來提昇自己的教學技巧，還是值得讚許。這其中，教師們特別提到了「學生邏輯不好、推理能力差」，不禁讓我想到：「這難道只有中學生如此嗎」？這種不合邏輯的「推理」，不也隨時隨地充斥在我們這個所處的環境中。在學校，我們教導學生「若 P，則 Q」與「若非 P，則非 Q」是不等價的同時，在家中，我們對著小孩說：「功課沒寫完不准看電視（非 P⇒非 Q）」，但這句話卻等同於「只要功課寫完了就可以看電視（P⇒Q）」，如此，怎麼能期望學生在邏輯上能沒有困擾。

相反的，合邏輯的推論背後，不也經常與經驗相違，而被誤解為不合邏輯。

二、福爾摩斯，你的推理有時也得靠運氣！

在 W. Salmon 所著《邏輯》一書中提到這麼一個例子，在著名的福爾摩斯探案裡，有一篇名為「藍寶石奇案（The Adventure of the Blue Carbuncle）」的案件，文中福爾摩斯撿到了一頂破舊的氈帽，他並不知道這頂帽子的主人是誰，卻能告訴華生醫生有關帽子主人的一大堆事，其中包括說「那人擁有高度的聰明」。

華生一如往常的地看不出福爾摩斯的推論有何根據，因此追問起來，要求給予證明。福爾摩斯將帽子戴在頭上，那頂帽子蓋過了前額，直落到鼻子上緣，並說：「這是一個立體容量問題。一個有這麼大腦子的人，裡頭一定有些東西。」

之前，福爾摩斯從帽子的觀察中進行推理，並下了一個斷言（Assertion）---「那人擁有高度的聰明」，但此時，他並沒有提供一個根據；之後，在華生的追問下，他為這個斷言提供了一個根據。姑且不論福爾摩斯提供的根據是否能支持這個斷言，一個「有根據」的斷言才形成一個論證（Argument），有了論證，我們才能去核證（Justify）他所進行的推論（Inference）

是否正確。（筆者在這一段所用的許多名詞，其目的只為後文溝通上的方便，無意在此將這些名詞做一嚴格界定，讀者有興趣可參閱《邏輯》一書！）

從故事中華生並未進一步提出反駁或疑問，顯然福爾摩斯的論證已經說服了華生，當然了，故事最後也安排帽子的主人正是一個受過高等教育的人，這又更顯示出福爾摩斯的神力。

但，這一切不代表福爾摩斯的這個論證可以說服所有人，至少就不能說服我。

儘管，福爾摩斯並未將他的論證細節說出來，我們仍可以將它重新組織一下，分成以下幾個細項：

1. 這是一頂舊的大帽子。
2. 這帽子一定有一個的主人。
3. 這個主人的頭很大。
4. 有大頭的人，腦容量也是大的。
5. 腦容量大的人，有高度的聰明。
6. 因此，帽子的主人是一個高度聰明的人。

這個論證其中的前五句是前提，第六句是結論。就嚴謹的觀點來看，這些項目本身，以及項目和項目之間的接續都是可被批判的，尤其是其中的第 5 點，不是有大腦袋的人就有高度的聰明這一點，在現代幾乎是普遍可被接受的常識。不過，我們必須要有一個體認，我們可以說福爾摩斯**這樣的論證有瑕疵，但我們不能說它的邏輯是謬誤的**，相反的，該邏輯推論是有效的。

「邏輯」的職務不是去發掘有大腦袋的人是不是聰明的，這是科學家或醫學家的工作，邏輯的工作是看論證的前提是否能支持它的結論。也就是說，邏輯所擔保的，是假定那些前提都是真的的情形下，那麼論證的結論也會是真的，換句話說，它管的是推論過程是否有效，而不是前提或結論的真假。

這也提醒我們，當我們在批評一個人說的話不合邏輯時，可能我們的批評才是錯了。

三、汽車對香草冰淇淋過敏？

剛剛的例子，談的是邏輯的角色，福爾摩斯說了一個結論，最後才提供根據，根據一出來後，他推論的過程就清楚了。接下來這個例子，談的是一個荒誕不經的現象，而推論卻找出了之間的合理關連性。

這是一個發生在美國通用汽車的客戶與該公司客服部之間的網路故事。（請原諒筆者無法提出這種網路故事的來源、以及真實性的考據，所幸這並非本文重點），故事是這樣的：

一日，美國通用汽車公司的龐帝雅克（Pontiac）部門收到一封客戶抱怨信，大意是說：

『這客戶家有一個傳統的習慣，就是每天晚餐後，都會投票決定某一種口味的冰淇淋來當飯後甜點。當大家決定後，這個客戶就會開一部新買的龐帝雅克去買。而問題就發生在買冰淇淋的這段路程。

每當這個客戶買的冰淇淋是香草口味時，從店理出來車子就發不動。但如果買的是其他的口味，車子發動就很順。』

這個客戶在第一次投訴給汽車公司時，並沒有得到回應，他當然也能理解，因為換成是他，他也會認為這個問題聽起來很荒誕。但他卻十分認真地看待這件事，因此再次的向公司反應。

龐帝雅克的總經理當然不會相信他們的車子對香草過敏。但他還是派了一位工程師去查看究竟。當工程師去找這位客戶時，很驚訝的發現這封信是出之於一位事業成功、樂觀、且受了高等教育的人。工程師安排與這位客戶的見面是在用完晚餐的時間，剛好那個晚上投票結果是香草口味，他們一同前往，當買好香草冰淇淋回到車上後，車子又秀逗了。

這位工程師之後又依約來了三個晚上。

第一晚，巧克力冰淇淋，車子沒事。

第二晚，草莓冰淇淋，車子也沒事。

第三晚，香草冰淇淋，車子“秀逗”。

如果故事到這裡，你會怎麼想？

這位思考有邏輯的工程師，他希望能夠將這個問題解決，因此繼續安排相同的行程。他開始記下從頭到現在所發生的種種詳細資料，如時間、車子使用油的種類、車子開出及開回的時間…，根據資料顯示他有了一個結論，這位仁兄買香草冰淇淋所花的時間比其他口味的要少。

為什麼呢？原因是出在這家冰淇淋店的內部設置的問題。因為香草冰淇淋是所有冰淇淋口味中最暢銷的口味，店家為了讓顧客每次都能很快的取拿，將香草口味特別分開陳列在單獨的冰櫃，並將冰櫃放置在店的前端；至於其他口味則放置在距離收銀檯較遠的後端。

於是，工程師將問題轉換為：為什麼這部車會從熄火到重新啟動的時間較短時就會秀逗？工程師很快地由心中浮現出，答案應該是“蒸汽鎖”。當這位客戶買其他口味時，由於時間較久，引擎有足夠的時間散熱，重新發動時就沒有太大的問題。但是買香草口味時，由於花的時間較短，引擎太熱以至於還無法讓“蒸汽鎖”有足夠的散熱時間。

這個問題的起因，只是一個看起來非常荒誕的現象，在經過細心的觀察，以及十分「漂亮」的推論後，卻得到一個十分合理的答案。

這個故事並沒有提到後來的發展，工程師有可能因此發現了汽車公司長年來從未發現的問題，當然也有可能根本跟蒸汽鎖無關。但至少工程師在當下得到一個十分合理的答案（相信許多讀者們也能認同這個答案）。

四、足夠的根據、足夠的經驗，以及邏輯的嚴謹度

在這一個故事中，個人認爲有三件事是值得進一步討論的。

第一件事，是足夠的證據。在一個論證中，如果證據不夠，是無法得到結論的。這個例子中，如果這個工程師沒有詳細的觀察資料，因而得到買香草冰淇淋的時間較短，是發現不了問題所在的，這其中也使用了邏輯學中重要的歸納法。

第二件事，是足夠的經驗，這關係到推理能否進行。如果是一般人，就算知道這部車從熄火到重新啓動的時間較短時就會秀逗，也不見得知道問題出在何處，這就是專家與非專家在面對事情上的差異。

第三件事，是推論的嚴謹度，也就推理的品質。筆者依據嚴謹的程度將之分成三個層次，並分別稱爲「合情推理」、「因果推理」以及「合法推理」。如此稱呼的原因，除了借用日常用詞以達到敘述方便的目的外，在意義上也確實有幾分類似之處，在接下來的文章中作進一步闡述。值得一提的是，這裡的「合情推理」和 G. Polya《數學與猜想》一書中所稱的「合情推理模式」並不完全相同，尙請讀者留意。

五、第一層次---合情推理

這位客戶在察覺香草冰淇淋可能跟車子發不動有關時，他已經做了一個推理。這個推理並非建立在嚴謹的邏輯上，只是兩個時間先後發生的事件。他不知真正的原因，但他相信這兩個事件之間一定有關，否則他也不會兩次寫信給汽車公司。這種推理的嚴謹度，個人將它稱爲「合情推理」或「表層推理」。

合情推理在推理的層級上是最低階的，這種推理建立在事情發生的情境上，推理是依據「個人」對情境表層之關係的經驗或想法，因此「人」的影響很大，例如，這位客戶認爲香草跟發不動車子這兩個事件有關，而多數其他的人卻認爲十分荒謬。

要強調的是，這樣的說法並不是對這種推理方式有貶低之意思，相反的，它卻是生活中最常被使用，且經常是「有用的」推論。試想：當一個人肚子不舒服，第一個懷疑的就是最近一次吃的食物乾不乾淨，這是合情推理；當一個人發燒了，就被認爲是感冒了，這是也合情推理。諸如此類之事，屢見不鮮，這些推理並沒有嚴格的邏輯支撐，也不見得有因果關係，甚至被當成依據的僅僅是事件發生的先後。

六、第二層次---因果推理

故事中，那位工程師可不接受這樣的合情推理方式。事出必有因，怎麼能接受汽車會對香草過敏？因此他進一步去查證，發現是汽車重新發動的間隔過短，因而推論是蒸汽鎖來不及冷卻所引起的。這個推論過程背後有一個根據支撐著，而且這個根據已經不是憑藉一個人的意見便可以支持或反駁，而是存在群眾都能接受的一個因果關係推論。這種推理的嚴謹度，個人將它稱爲「因果推理」。

雖然都是在追求兩個事件之間的關連，因果推理又比合情推理更爲嚴謹。因爲它不僅將兩個事件聯繫在一起，聯繫之間還存在著一個「理」，而這個「理」儘管未必能在嚴謹的邏輯檢驗中全身而退，達到 100%的準確度，卻達到某種程度的社會約定（也容許一些例外）。這種爲一個發生的事件找尋一個可能的原因所用的推理，在社會科學中十分的普遍，自然科學報導也經常可以看到，甚至在學術研究上，它也經常無往不利，諸如：推理小說裡的推論、醫生病例的分析、市場調查分析、各類的社會現象研究、評論…，大都屬於此類。

舉例來說，日前，剛滿兩歲的女兒在沒有絆到任何物件的情形下突然跌坐在地，並她痛得大哭。當時我心中的想法是：「小孩子的骨頭軟，不會在這樣的情形就斷了，因此應該是某種扭傷或肌肉的疼痛吧！」，這是一個合情推理。卻沒想到這一跌，竟讓她左小腿骨斷成三截。一到醫院看到斷骨的 X 光片後，心中仍疑惑：「怎麼可能？她是撞到了什麼？那附近只有地板啊！」---又是一個認爲要撞到某硬物才會斷腿的合情推理。

醫生根據 X 光片，從骨頭斷掉的裂痕狀態、位置及方向加以分析，判斷是「扭轉」的力量所造成的斷裂（這已進入了「因果推理」），因此推測她可能是突然改變奔跑方向產生的加速度力量集中所造成的。換句話說，她是先斷後跌，而不是先跌後斷----這又是另一個因果推理。

儘管，因果推理的有效性大於合情推理，但仍是可批判的。而且，一旦推論的結論與最後的事實不符合，就算推論再漂亮也會被遺棄。例如：那位工程師推斷車子的問題在「蒸汽鎖」，但如果最後檢查不是「蒸汽鎖」的問題（沒人保證這絕不會發生），則儘管它的推論看來是這麼的合理，但是無效就是無效！又例如：我女兒的斷骨，是不是真如醫生所說是突然

改變奔跑方向所造成的，看來除了我女兒之外，誰也沒辦法確定。

七、第三層次---合法推理

在這合情推理、因果推理之上，有另一個嚴謹度要求最高的，個人將之稱為「合法推理」或「形式演繹推理」(在 G. Polya《數學與猜想》一書中，將此種推理模式稱為「論證推理」)。這裡的「合法」指的不是法律，而是「形式演繹法」，或者個人更喜歡直接稱為「數學方法」。之前的兩種推理的品質，其有效性都決定於或然率的高低，「合法推理」則不然，它是建立在嚴密的邏輯演繹上，不管它所推理的內容是什麼，一旦在「合法推理」的推論下，就要求百分之百的有效，絲毫不得妥協。

數學的推理形式便是如此，它要求的嚴謹度已達到「吹毛求疵」的地步，甚至可以說是一種「邏輯潔癖」。不是在「合法推理」之下所得到的結論，就算舉出了成千上萬符合的例子，最多也僅能當成「猜想」，誰也不敢放心地使用它。而若是在「合法推理」下得到非真的結論，那只能有一個可能，就是前提非真。

儘管，合法推理（形式化的演繹推理）的發展從歷史的角度看是很晚才完備的，但它的開端卻可以往前推到二千多年前的古希臘時代。早在亞理斯多德時代，人們就進行了推理和批判別人的推理（W. Kneale and M. Kneale,1984），同時亞理斯多德也整理出許多推理所要遵循的某些模式，三段論法就是其中之一。他從哲學、政治、法律或日常生活的爭論觀察中，認出這些模式並加以公式化，成了現代邏輯學的重要奠基，在後人的努力下以及符號系統的引入後，才能有如今形式化的面貌。

八、合情推理、因果推理和合法推理之間的界線

「合情推理」和「因果推理」中間的界線並不十分清楚，因為兩者之間有許多的共同點，例如：它們都加入了「人的經驗、判準」，以及「有效性的判定取決於或然率（儘管有些因果推理的或然率幾乎可達百分之百）」，因此有時區分兩者並不容易。相對的，在「合法推理」中，推理的過程與「人的經驗、判準、喜好」是無關的，不但具普遍性與自身獨立性，有效性也不取決於或然率。也因為如此，它不太容易受時代的影響，二千年前被證明為真的數學定理，二千年後的今天，還是為真。

也因為數學如此地要求合法推理，也使得一些十六、十七世紀的哲學家不將數學視為「完全的科學（perfect science）」(Harel, 2004)。他們認為數學的蘊涵（implication）只不過是一種邏輯結論（logical consequence），而不是一個結論成因的演示（a demonstration of the *cause* of the conclusion）」，而科學探討的是後者。這個說法，表面上指出了的是數學和科學之間的分野，實際上也為「因果式證明（causality proof）」和「形式化的邏輯演繹」提供了一個界線。

到目前為止，如果讓各位讀者以為本文有尊「合法推理」而貶「合情、因果推理」之意，那完全歸咎於筆者失當的文筆。儘管「合法推理」是數學論證的主要形式，將一個猜想「合法化」也是數學重要的工作之一，然而，數學發展的精髓，卻是一個猜想如何被提出，這還得靠著直觀、類比、關係、臆測等方法，而這些方法所支持的即是「合情、因果」的推理。

九、以不合法的手段傳遞一個數學事實

本文的最後，想提供一個值得思考的問題：「在教學時，用一個不合法的方式傳遞一個數學事實是否恰當？」不合法，當然指的是邏輯上不嚴謹的方法。例如，筆者在參與一些準教師課堂中的教學演示時，發現教師並不排斥利用「過三角形一點作對邊的平行線」來證明三

角形內角和為 180 度，認為如此淺顯易懂；又如教師在複數教學時，告訴學生 $\sqrt{ab}$ 要在 a 、b 要非負數時才可以拆開成 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ，但是教學中卻出現 $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$ 的式子。

在洪萬生老師的數學史課堂中，曾經對下面這個命題的教科書上證明的方式提出質疑。

試證：等腰三角形，兩底角相等。

無論證明的方式是利用畫頂角平分線，或是畫過頂點的中線，或是畫過頂點的垂直線，目的都是要製造兩個三角形全等，證明並不難。問題在於，在《幾何原本》的公理系統中，畫角平分線、畫中線（平分線段求中點），或是畫過線外一點作垂線的三種方式，都必須用到「等腰三角形兩底角相等」這個事實（註 1），這在邏輯上造成循環論證，是不被允許的。

如果你也這樣教學生，除非你有一套異於《幾何原本》的公理系統，否則，證明將無效。

如果你不這麼教學生，可能得重新建構，將造成困難度大增，學生未必能學、肯學。

你怎麼辦？

註 1：《幾何原本》前幾個命題的結構表如下：

命題內容	在《幾何原本》上之命題序	利用到前命題結果之順序
等腰三角形，兩底角相等	I.5	
平分已知角	I.9	I.9 →I.8→I.7→I.5
平分已知線段	I.10	I.10→I.9→I.8→I.7→I.5
過線外一點作垂線	I.12	I.12→I.8→I.7→I.5
I.5：代表第 I 卷命題 5 ，以此類推 →：代表利用到前命題結果，如 I.9→I.8 表示：第 I 卷命題 9 證明需用到第 I 卷命題 8。		

參考資料

G. Harel (2004). “The causality proof scheme”, In *Proceedings of the HPM 2004: History and Pedagogy of Mathematics*. July 12-17, Uppsala, Sweden.

W. Kneale and M. Kneale (1984). *The Development of Logic*. New York: Oxford University Press.

G. 波利亞（G. Polya）(1996).《數學與猜想》(李心燦、王日爽、李智堯譯)， 台北：九章出版社。

洪萬生 (2003).〈評《高中數學》第一冊第一章的「邏輯概念」內容〉，《中等教育》54 卷第 5 期。

歐幾里得 (1992).《幾何原本》(藍紀正，朱恩寬譯)，台北市：九章出版社。

塞蒙 (W. Salmon) (1968).《邏輯》（何秀煌譯），台北市：三民出版社，

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：
   http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中）郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中） 洪正川（新竹高商）陳春廷（寶山國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
台南縣：李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）