

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台師大數學系）
 助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）黃清揚（北縣福和國中）
 葉吉海（新竹高中）陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）
 王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南師院附中）
 英家銘（台師大數學系）陳昭蓉 蔡寶桂

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

第七卷第七、八期合刊目錄(2004年8月)

- HPM 2004 Uppsala 記事
- 數學與人文社會的對話：一個 HPM 的進路
- 參加「歷史、文化與資訊時代的數學教育」研討會的論文摘要與心得
- 在 HPM 中與大師們相遇
- 摘要：
 HPM 在課堂上的應用：以「三角函數」教學活動為例
 數學史融入無窮等比級數的教學
 從 HPM 角度談高中數學人才培育計劃
 一個 HPM 行動研究者的反思
- 大學憶往之一
- Information：『《算數書》與《九章算術》及其劉徽注』研究團隊招募

HPM 2004 Uppsala 記事

台師大學數學系 洪萬生教授

這一次四年一度的 HPM 盛會選在瑞典的 Uppsala 大學舉行，大約有一兩百人參加(比起 HPM 2000 Taipei 稍多)，這是歐洲學者地利的優勢，以其旅費便宜故也。然而，這種『便宜』，有時候顯然無法提升參加者的鬥志，有一些二、三十年以上的老面孔學者，始終在談 HPM 老調，玩不出新的把戲，令人不無遺憾！這樣的評論，當然不能否認肇建者的擘劃之功，可是，老是搞得像俱樂部一樣，恐怕無法『實質地』引導資淺學者，尤其是數學教育界跨領域的年輕人，實在相當可惜！

我所以這樣『求全』，正是因為這種會議，很可能是國際間比較『正規』的學術盛會。儘管如此，像澳洲的 Gail FitzSimons（四年前曾來台北，也是那一次的 IPC 成員）就能夠針對四年來可以關聯到教學活動的 HPM 論文 (FitzSimons, 2004)，作了一個很有前瞻性的綜合性報告，令人耳目一新！還有，在有關『歷史上與教室中的證明』的 panel discussion 中，Guershon Harel—他曾來本系參加 2002 年的數學論證國際研討會—參考 P. Mancosu 的 *Philosophy of Mathematical Practice in the 17th Century* (New York: Oxford University Press, 1996)，而提出了『因果式證明基模』(causality proof scheme) 的考察，非常值得我們注意與深思。¹

在亞太地區學者中，曾應邀來台中參加 HPM 亞太營的 Masami Isoda 也欣然與會，他的日本同行還有另外兩位學者。此外，香港也有蕭文強，與其他兩位任教於香港教育學院的教授。至於我們國內，則除了筆者之外，還有蘇意雯與劉柏宏同行。再有，我們當然也會見了 Bob Stein（他也曾應邀參加台中研討會），以及他的美國同行 Victor Katz、Frank Swetz 與 Florence Fasanelli（她曾參加 2000 年的盛會）等人。Katz 與 Fasanelli 帶來了他們美國團隊所研發的『數學史模組』(Historical Modules)，²可以看到他們一起努力的軌跡。

在團隊方面，比較特別的是義大利，他們在 Fulvia Furinghetti（2000-2004 年主席，她也應邀參加台中研討會）的領軍下，交出了略顯生嫩、但卻頗有新意的研究成績。法國團隊依然由 Evelyn Barbin 領軍，其中包括了年輕一輩的 Frederic Metin（2000 年 HPM 曾來台，與

我們的研究生打成一片)，還是維持一貫的水準，不過，Metin 提及他們並沒有教學碩士班的設計，所以，教學研發人才顯然略有不足。這種情況是國際 HPM 社群的普遍現象，我們國內倒是不缺研究生，只是各個師範院校之 HPM 專家人力稍嫌不足。基於此，我們國內台中 HPM 亞太營的規劃，就是希望在這一方面，起一點帶頭作用。

不過，我們亞太地區的學者，對於參與這次 HPM 2004 Uppsala 國際盛會的規劃，畢竟不夠積極（或許我們都太忙了！）。這是我們將來打算在國際學術舞台爭取更重要位置時，必須深思熟慮的一件大事，絕對不可以輕忽怠之。為此，展望 2008 年的 HPM 或者其他的區域性國際學術活動，我們有必要及早進行更積極的設計與規劃才是。Masami 對於亞洲學者的參與人數不多一事頗有感慨，但這卻是我們的『現實』，我們還必須更加努力！

回顧我參加這次研討會，雖然應邀擔任 IPC，但是，始終沒有打算組織 Panel 或 workshop，這的確影響了我們整個亞太地區的『曝光』效果，我自己必須深刻自我反省。以撰寫這次研討會論文為例，我在忙完了五月底的 HPM 台中亞太營之後，才著手撰寫論文。由於時間實在匆忙了些，所以，我的論文不及收錄在此次研討會的論文彙編之中。好在，到了會場之後，我央請大會工作同仁協助印製，大概散發了 30 份左右。不過，由於事先的準備功夫不夠，所以，儘管我與意雯發表時，Jan van Maanen 與 Bob Stein 等人都來了，但是，我們比較有創意的研究成果，卻得不到立即的回響，如今想來總是不無遺憾！

最後，我必須藉此感謝 Sten Kaijser（Uppsala 大學數學系教授）的接待！Uppsala 大學創於 1477 年，是斯堪地那維亞半島地區所出現的最早大學，擁有頗高的學術地位（譬如與該校有關的學者，就有七位榮獲諾貝爾獎）。只是 Uppsala 人煙稀少（約十幾萬之譜），又正值放暑假期間（Uppsala 大學有三萬多名學生），所以，除了少數觀光客之外，馬路上幾乎看不到幾個人。不過，這是偉大的植物學家林奈的故鄉，是值得造訪的北歐城市之一。





註解：

1. 2002 年我趁著參加 Abel-Fauvel 研討會之便，在阿姆斯特丹待了一晚，借宿荷蘭數學史家安國風 (Peter Engelfriet) 家裡，承他贈送本書，但是，我一直無暇仔細閱讀，實在有一點遺憾！
2. 我帶回了一個光碟版，有意參閱者可以來函洽取。

參考文獻

- Fitzsimons, Gail E. (2004). "Activity Theory: Its Possible Contribution as a Theoretical Framework for HPM", presented to the HPM 2004 Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004.
- Hong, Wann-Sheng (2004). "Teacher's Professional Development in Terms of the HPM: A Story of Yu", presented to the HPM 2004 Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004.
- Liu, Pou-Hung (2004). "The Historical Development of the Fundamental Theorem of Calculus and Its Implication in Teaching", presented to the HPM 2004 Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004.
- Man, Yiu-Kwong & Hing-Keung Leung (2004). "A Study of the Area Formula found in *Jiuzhang Suanshu* and Its Inspiration to Mathematics Teaching", presented to the HPM 2004 Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004.
- Man, Yiu-Kwong & Hing-Keung Leung (2004). "The Ancient Chinese Tangram Problems and Its Application to Mathematics Teaching", presented to the HPM 2004 Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004.
- Su, Yi-Wen (2004). "An Action Research of School-centred Professional Development in the HPM Context", presented to the HPM 2004 Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004.

數學與人文社會的對話：一個 HPM 的進路

台師大數學系 洪萬生教授

一、何謂 HPM？

大家可能不知道什麼是 HPM，這是《HPM 通訊》的一個索引，從 1998 年 10 月開始創辦，出版第一卷第一期，一直到現在，其中每年二、三月合刊，七、八月合刊，全年出版十期。所謂 H 是指歷史 (History)，P 是指教學法 (Pedagogy)，M 當然是指數學 (Mathematics)，所以，《HPM 通訊》是指數學教學法與數學史結合的一種刊物。

說到數學教學，很多老師（我以前的學生）告訴我，因為常常要趕進度，課沒有辦法教完，所以，除了上正課之外，沒有辦法教授其他的東西，數學史的一些有趣材料，當然也不例外。我告訴他們千萬不要這樣想。回憶我自己年輕的時候，也有很多東西沒有學到，這在一方面，我覺得沒有什麼好遺憾的；另一方面，我覺得有一些東西等需要使用的時候，再學習就好了。教師教得完所有的課程內容，其實並不一定有意義，例如：函數是一個很困難的概念，今天為了趕進度，把函數教完了，明天馬上考試，學生晚上跑去補習，第二天考得不錯，而兩個禮拜之後，可能忘得一乾二淨，試問這種教學有多大意義呢？¹

因此，在每天趕進度的情況下，教師在正課中要跟學生講一點數學史是很困難的，家長的期望也會給老師帶來壓力，尤其是當所教的班級成績不好的時候，更是沒有多餘的時間，那麼，如果想要附庸風雅介紹一點數學史，應該怎麼辦呢？我想，在每次段考之後，大家總應該可以輕鬆一下吧！所以，段考之後可以挪出一、兩節的時間出來，講一些比較風雅像數學史這樣的東西，也許是不錯的選擇，各位不妨試試看！

二、數學知識的多元面向

在生活中有許多事情是需要用到數學的，「數學能力」與「數學知識」是不一樣的兩件事，有數學能力的人不一定有數學知識；同理，有數學知識的人也不一定有數學能力。例如：賣水果的老伯將水果堆成長方垛，他一定有自己的方法算出水果總數，但是，他一定不知道在數學知識裡，這是二階等差級數的問題，所以說他是有數學能力，但是卻沒有數學知識。相對地，數學老師可能知道長方垛的計算方式，但是，卻不一定會利用它來解決生活上的問題，所以說他是有數學知識，但是，可能沒有這一方面的數學能力。我們目前的九年一貫就是在訴求這個：不一定每個學生都要有數學知識，但是，要培養基本的數學能力，以便學生將來有能力解決生活上的問題。

因此，數學能力顯然會在此一知識活動的各個面向表現出來。在數學的哲學面向方面，柏拉圖認為數學概念是存在理想世界 (ideal world) 之中，而非在現實世界 (physical world) 上。譬如，對於柏拉圖來說，三角形的蛋糕之中並未存在有三角形的概念。相反地，亞里斯多德則顯然認為多吃三角形蛋糕，有助於吾人認識三角形的概念。這也就是說，亞里斯多德比較重視理想世界與現實世界的聯繫。這是兩個不同的數學哲學基本立場。說得更明確一些，在《米諾篇》(Meno) 中，柏拉圖以蘇格拉底教小男孩做兩倍面積正方形的例子，說明了數學知識就像是嬰兒被產婆接生一樣地被引導出來，所以，說數學知識是『被發現的』(discovered)，

而不是『被發明的』(invented)。此外，柏拉圖也認為軍事領袖與國家領導人必須要懂數學。然則要懂到什麼程度呢？不可只與沿街叫賣的小販一樣，而是必須要學習到使自己的心靈可以與理想世界對話。同時，他也認為數學訓練可以幫助吾人從混亂中抓住本質，例如：面前有一塊三角形的慕斯蛋糕，只能看到它的（概念）形式 (form)，三角形完美的本質，而不是它的物質 (matter)，好吃的慕斯蛋糕—後者顯然存在於現實世界！

現在，我們或許可以將數學拿來類比於繪畫藝術—這可以視為數學與藝術的『連結』。畫家在作畫的時候，也是在抓本質，素描構圖時是看到形式，而不是物質（料）。這種看法對希臘人而言，一點也不陌生，這是因為他們認為數學是無所不在的，從而他們認為「美」是一種好的數學比例 (well-proportioned)，也就是以數學來定義「美」。文藝復興時期的畫家所使用的透視 (perspective)，後來發展成數學中的投影幾何 (projective geometry)，所以，此一數學分支裡的部分知識，早期是由藝術家發展出來的，他們既是偉大的藝術家也是數學大師。

本節最後，我們打算考慮數學與文化之關係。中國古代沒有「零」的概念，中文的「零」是「零頭」的意思，並不是指「沒有」，例如：108，中國古代讀作「一百八」而不是「一百零八」，這是一個日常語彙可能干擾學習的例子。另外，中國古代也沒有數學「角」的概念，「角」與「平行線」是一體兩面的，大家可以想想，如果把國中幾何學裡的「角」與「平行線」的概念拿掉，則整個幾何學的知識到底可以走多遠？你可以發現「角」與「平行線」的概念，在幾何學裡的認知結構中是很重要的，當老師的人，要常常做這種後設性的思考，以多元文化的觀點來看數學，相信這對於教學，將會有很大的幫助！

以上是中國傳統數學之簡略文化考察。我們再舉阿拉伯數學為例，說明數學與文化之密切關聯。阿拉伯帝國在巴格達時期是一個世界性的帝國，他們不分黨派、種族、背景，招募世界的英才從事研究工作，並且成立科學院、天文台等等研究機構。阿拉伯的數學史裡有一個很重要的特徵，是其他民族所沒有的，那就是回教經典《古蘭經》中，有一個章節專門在處理遺產問題。其中有關遺產的規定，不論男女皆可以分得遺產，如果有遠親、孤兒在場，也要分一部份給他們，並且對他們說好話。在阿拉伯回教國家裡，《古蘭經》的規定視同法律，社會學家發現全世界的民族、宗教裡，只有《古蘭經》的教義裡有社會主義的關懷，有非常濃厚的人道主義色彩。當然，分遺產時會產生意見不合的時候，有的人不主張分，為此，他們乃發展出一套非常繁複的數學算法，這也促成了算術與代數在阿拉伯國家裡的大力發展。

三、數學教育(工作者)如何計設或佈置(教學)活動？

我們剛才約略談到了數學哲學的面向、數學知識演化的面向，及數學與社會之間的互動。我相信惟有將數學拉到這樣的發展脈絡裡面時，才能發現數學與人文社會之間是可以對話的，而且也必須要對話。因為當你要佈置一個比較有趣的，讓所有學生願意參與教學活動時，顯然有必要建立一個比較溫柔的教學情境，讓他（她）們得到尊重。例如：利用摺紙讓小朋友瞭解到三角形面積求法，可能有一位平時考試很差的小朋友赫然發現：三角形面積求法與長方形面積求法有關。此時，如果你願意告訴他說：「你的想法與中國古代偉大的數學家劉徽一樣。」那麼，以後他上數學課時，保證一定會很認真投入。我們對於小朋友要有正面的肯定，而正面教學的前提是要佈置一個可以讓他可參與的活動。

這當然牽涉到教師對於所謂的『教學活動』的看法了。我們誠摯地希望教師可以利用每

次段考結束後的一、兩節課時間內，教授學生一些比較輕鬆的東西。例如：介紹幾種不同的畢氏定理證法，然後要求學生說明自己喜歡的是哪一種方法。這是將數學的學習由『作數學』(do mathematics) 提昇至『反思數學』(reflect on mathematics) 的層次上，讓學生從解題的繁瑣中跳脫出來，嚐試由方法論的角度來體會數學，這對於數學的學習也有很大的幫助！

既然鼓勵學生反思，那麼，評量的策略或許就必須跟著調整了。教師對於學生給出非預期的答案時，是否可以容忍呢？例如：原本教師要求學生利用畢氏定理來解題，而學生使用其了他方法算出答案，甚至衍生出更深刻的問題出來時，老師敢把這個多元解題活動這個『潘朵拉的盒子』打開嗎？對於學生答題時的個別差異，評量的平衡點又是在哪裡呢？評量方式如按照每一次考試成績計算，而有些學生則是在學期結束後才開竅，成績該如何計算呢？如何補救這種學生呢？有的學校成績的計算，老師可彈性利用的成績不到百分之三十，如果老師連調整自己學生成績的自主權力都沒有的話，那麼，老師就很難當了！

四、 結語：HPM 如何介入？

今天所講的，是希望大家思考如何運用 HPM 的精神，從數學知識多元的風貌，去佈置一個比較適當的教學活動，讓每一個人都可以參與，至少讓多數的小朋友可以參與。從這個角度切入，教學是比較吸引人的，說不定你不但可以因而成爲一個名牌的老師，也是一位成功的，受到所有人愛戴的好老師！

修訂後記：本文之初版，是筆者應邀爲台灣大學教育學程中心之邀請，爲該校九十二學年度第九次返校座談（民國 93 年 4 月 30 日）之實習教師演講之錄音稿。感謝數學科實習教師李志萍小姐之紀錄。

註解：

1. 若是大家有機會到美國接受教育，一定會發現教師在每堂課的前二十分鐘都是在複習。他們是假設學生什麼都不懂，完全沒有準備就來上課的。反觀國內的一般情況，我們基本上假設是學生準備好才來上課，而且是準備得比老師即將準備的內容還要充分。這兩種教學法是顯然基於完全不同的思考方向。這種對比也反映在評量方式上。在美國那一邊的教學，比較正面的評量目標，是放在學生學會了多少東西，所以，評量的內容多半是學生已經學過的，應該會解的題目；而我們的評量目標，則是放在學生不會的東西有多少，所以，評量的內容都是些大部分學生不會解的題目。

參加「歷史、文化與資訊時代的數學教育」研討會的論文摘要與心得

北一女中 蘇俊鴻老師

一、前言

今年五月 24-28 日，由台中師院主辦了一場名為「歷史、文化與資訊時代的數學教育」研討會，不難看出這一次研討論所希望「聚焦」的主題。筆者很榮幸在會中發表自己參與洪萬生老師國科會計劃時，在「數學歸納法」的教學上運用 HPM 的經歷與心得，以下是此報告的內容摘要。

二、論文內容摘要

在高中數學的課程中，希望學生學習的證明技巧有二種，一是反証法；另一為數學歸納法，這兩種證明的概念與形式均與直接証法有著頗大的差異。無獨有偶地，這兩種證明技巧均出現在高一上的課程中，學生剛脫離國中階段(尤其這幾年教改的大力簡化教材內容)，馬上面臨嚴苛的證明訓練，心中的不解與苦惱，可想見一般。

一般說來，高中學生在數學歸納法的學習中，在概念上較易出現的學習困難的地方有幾個部份：

- 對「歸納法」與「數學歸納法」的差異不夠了解；
- 忽略「數學歸納法」中的奠基步驟的重要性；
- 對「數學歸納法」中的遞推步驟的邏輯性無法掌握。

面對這些學習上的障礙，多數的數學教育研究者認為只要找尋適當的啓蒙例(像一連串經由碰撞而一個接著一個倒下的骨牌)，讓學生能對「數學歸納法」的概念更加了解，以便解決上述困難。

然而，隨著教改的政策執行，國中數學教材內容大幅精簡的影響下，筆者在教學實務上觀察發現：目前學生所面臨「數學歸納法」概念學習的困難層次，遠比上述的研究結論來得更為基本。事實上，當學生在國中失去歐氏幾何證明的教學與演練的機會後，已經對數學上所謂的「證明」毫無認識與體會。證明是什麼？為何觀察現象歸納所得出的性質需要證明為真？歸納法與數學歸納法有何不同？這些問題都是教師們在「數學歸納法」的教學上應需留意的部份。現有教材或研究論文所提的啓蒙例，都只著重在「歸納法與數學歸納法」的異同，或是對「數學歸納法中的遞推步驟」的強調。但例子的設計上卻多半太過牽強與做作，自然無法引起學生對「數學歸納法」學習的興趣。本文的目的，便是希望藉由數學史上對比的實際例子，讓學生感受到學習「數學歸納法」的必要性。期能彌補以往的不足，為「數學歸納法」的教學，提供另一種可能的實施方案。

因此，筆者選擇 John Wallis(1616-1703)與 Pascal(1623~1662)作為對照的例子，並利用學習工作單(共 3 張)來安排整個教學活動的進行。Wallis 在 1655 年牛津大學所出版的《Arithmetica infinitorum》(無窮算術)中，為了推出著名的 π 的無窮乘積公式，必須使用以下的這個極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

這個極限值是正確的，然而 Wallis 找到這個極限值的作法，卻引起其他數學家的批評，這正是 Workcard 1 的內容。此外，在 Workcard 1 的問題討論中，包含尤拉曾提出有關質數的公式，

正是希望學生思考與討論歸納法的意涵及不足之處。

Pascal(1623~1662)的著作《論算術三角》大約完成於 1654 年。因為他成功地解決的賭博中賭金分配的問題 (Promble of Points)，引發他對組合學的興趣。在《論算術三角》書中，Pascal 以組合規則中的加法公式 $f_k^l = f_k^{l-1} + f_{k-1}^l$ ，定義所謂的「算術三角」。然後給出了從算術三角中可以看出的性質公式，並加以證明。其中，在推論 12 的證明中，很多人認為，Pascal 清楚地使用了現代「數學歸納法」形式，這正是 Workcard 2 所提的內容。為了讓同學能了解 Pascal 的證明過程，特別將全文收錄，作為同學的回家作業；並進一步將 Wallis 與 Pascal 兩人(幾乎同時期)的做法作一比較。進而讓同學思考「歸納法」與「數學歸納法」的異同，為何「歸納法」不足以保證命題為真？從而顯現「數學歸納法」的價值所在。

雖然「歸納法」與「數學歸納法」兩者的邏輯屬性不同(「數學歸納法」是屬於演繹層次，但不需對學生強調)，但從方法論的角度來看，「數學歸納法」可視為「歸納法」的「再補強」。由 Wallis 與 Pascal 的做法來比較，兩人最大的差異就在 Pascal 點出了從 n 遞推到 $n+1$ 的這個推論，這也正是我們在「數學歸納法」的教學上最強調的遞推步驟。所以說，「數學歸納法」並非事後諸葛亮(許多學生都作如是想)，知道了結果或公式，才去驗證它的正確性。更重要的是先經由「歸納法」推測歸結出結果及公式，再利用「數學歸納法」補強「歸納法」無法處理的部份。

Workcard 1 與 Workcard 2 就是整個教學活動的開端，希望能引發學生學習「數學歸納法」的動機，但想要理解與掌握「數學歸納法」整個的概念，這時便可利用課本的例子加以練習，根據 Ernest 對「數學歸納法」概念連結網絡的分析，其實使用及涵蓋的數學知識相當廣博，應當給學生有足夠的時間琢磨才是。

等到同學對「數學歸納法」有幾分的了解後，再來便可進行 Workcard 3 的活動。Workcard 3 所談的是皮亞諾公設(Peano axioms)，在十九世紀中所興起的分析算術化運動中，義大利數學家 Peano 在 1891 年提出的。他從不加定義的“集合”、“自然數”、“後繼元素”和“屬於”等概念出發，給出了關於自然數的五條公設，其中的第五條公設：

若一個由自然數所組成的集合 S 包含 1，並且當 S 包含某一自然數 a 時，它也一定含有 a 的後繼元素，則 S 就包含有全體自然數。

顯然的，這正是「數學歸納法」原理(邏輯上的正當性)。主要是希望學生能在學習「數學歸納法」的概念及相關例題後，做後設性的思考，深化對此一主題的理解。進而情形允許的話，也讓學生討論「數學歸納法」的等價形式，當然老師需介入引導的部份就較多。最後用 Poincare 在《科學與假說》的話，為「數學歸納法」這個活動作一結束(社會面向的正當性)：

對我們來說，為什麼此項判斷(數學歸納法原理)必須作為無法爭辯的自明之理，而強制我們服從呢？那只是對一個作用只要一次承認其可能，據此便可以使該作用作無窮次反覆思考，對此理智能力的肯定罷了。……它不外乎是對理智本身一種性質的肯定。

三、心得

或許是搭上奧運的熱潮，近來常在廣播上聽到一則廣告，常讓我一聽心頭為之一驚，大

意是「孩子數學不好不是他的錯，只是缺乏良好邏輯方法的訓練，快來參加數學奧林匹亞競賽訓練課程，…」雖然不知其課程內容為何，但以筆者對數學奧林匹亞競賽的了解，想要達成它所宣稱的成效，實乃緣木求魚才是。在數學教學上，真正能對邏輯推理訓練的養成，莫過於證明了。談起數學證明，許多人馬上浮現就是一連串的「因為…，所以…」的印象，導致常見的情景是學生興趣缺缺，老師快快教過。然而證明的功能，並非僅此。那麼證明的作用何在？關於這點，K. Weber(2002)認為：

- (1)證明是爲了讓人信服 (A proof that convinces)
- (2)證明是爲了說明 (A proof that explains)
- (3)證明是爲了正當化結構 (A proof that justifies structure)
- (4)證明是爲了闡明技術 (A proof that illustrates technique)

其中(3)(4)兩項作用是 Weber 在「證明」的教學上所強調的重點。換言之，數學證明主要的積極意義，在於讓學習者能透過它去理解命題，及學習其中必要的技巧。另一方面，(1)(2)兩項作用則是傳達「證明」這個數學活動的社會面向的意涵。

以數學歸納法爲例，據 Ernest 對數學歸納法提出的有關概念的連結網絡圖。我們可以看出數學歸納法的概念與其他概念的有著緊密的關聯性。其中最重要的便是「自然數的性質」及「遞迴」這兩個核心概念。「自然數的性質」是讓我們認知到是否運用「數學歸納法」證明的決定性因素，而「遞迴」則是「數學歸納法」證明正當化的基礎。這個本質上的體認與了解，正是教師必須具備且在教學上需留意的地方，方能知道學生學習的困難之所在。因此，當我們在教學活動的設計上，該如何引發學生的興趣或動機？我想，數學史正是提供多一個思索活動安排或是尋找素材的方向。而此次在數學歸納法的嘗試上，對筆者來說最大的意義，在於試圖將數學史材料「融合」於教學的內容之中，也讓自己在教學進度的掌握上，能更加餘裕。

此外，此次研討會唯一有些美中不足的，就是活動日期訂在 5 月 24(週一)至 28(週五)日舉行，對於有心參加的在職的教師，在差假的申請上，其實是會遇上麻煩，以致於參加的意願會降低不少，豈不讓研討會的美意打了折扣！

在 HPM 中與大師們相遇

桃園青溪國中 王文珮老師

在洪萬生老師的鼓勵之下，我於今年五月底參加了由台中師範學院數學教育系主辦的「歷史、文化與資訊時代的數學教育」國際研討會。感謝甯自強主任及林炎全教授的安排，使本人也能在研討會中有發表論文的難得機會。不只能在 HPM 的盛會中聆聽大師們的演說，還可以受到他們熱情的指導，實在是令人既興奮又緊張。

我在會中以「何以算書重乘除而輕加減？」爲題，發表了個人的一些淺見。以下是本文

的摘要內容：

算書中關於基礎數學的著述，繁不勝數。綜觀其中，在數的四則運算部分，多數的算書皆未談及數的加減運算，反而是以「九九合數」為算學的基石，多所著墨於乘除法的運算，並發展出各式捷算法則；有關乘除法的實用例題，亦是樣多題繁。此一現象，與現今的基礎數學教育，為先加減而後乘除的教學順序，是有所不同。以上的差異性，引發本文探討算書對於數的運算，其重乘除而輕加減的原因。

本文將從古代算書文本出發，藉由算學家的序文及其算學論述內容，使我們能夠更深刻地感受到，當時的算學是如何地重視乘除法的計算技巧。本文試圖以計數工具的角度，更深一層地來探討這個議題。從算籌是籌算中重要工具的時代，到珠算中算盤的加入與取而代之，無論算學家手中的計算利器如何演進，算書中在加減運算部分的內容，仍舊沒有加重其比例。另一方面，將古代算書中複製於算籌形式寫成的數碼，與西方羅馬、希臘及印度—阿拉伯數碼作一比較，說明算籌因視覺上的優勢，是較他者更有利於加減運算的學習。

回到數學史的脈絡之下，單純的數字計算，亦有其奧秘之所在。計數方式在時代中的演進，形成算書中的一大特色，也造就了學習上的差異。這樣的討論，或許有助於教師對於學習者的困境，有更深刻地體認，進而在他們的學習路上多一些協助。

由於我在學校任教的班級都是國中三年級的學生，正值參加國中基本學力測驗的階段，在課程上較為忙碌，故無法全程參與研討會的所有議程，實在是一大憾事。本人論文發表的時間安排於會議首日的下午，所以於當天上完在學校的前二節課後，才從桃園驅車前往台中師範學院。到達時，仍有一些時間稍作準備。下午議程如大會安排的時間開始進行，在發表過程中，我只能以英文在文字上呈現論文內容，至於語言上就有些力不從心了。當時多虧有香港教育學院鄭振初老師的協助，才能使這一缺憾得以彌補，真是由衷地感謝他伸出援手，但我仍對與會學者們感到十分抱歉，這也是未來該努力改進的目標之一。

在討論的過程中，我也獲得許多學者們的指導和建議。美國 HPM 學者 Robert Stein 教授好奇地問道，是否曾以中國籌算所具有的優勢，以其為教材實際應用在數學教學上。而我只能誠實地告訴他，至目前為止並沒有實際進行過。這也提醒我在數學教育中實證的重要性。來自印度的學者認為，在中算加法和乘法的運算部份應該要解說得更加清晰，才是讓聽者明白其中的源由。這也更督促我在細節部分要更加用心研讀才是。

接著，我於原議場繼續聆聽 Robert Stein 教授以「The Binomial Theorem and How It Grew」為題的論文發表。在演說中，見識到身為數學界的大師，仍不忘將複雜的數學原理予以簡易化和視覺化，使中等程度的學生們也能理解其中的奧妙，在趣味與清晰兼具的教學過程中，讓數學知識以另一張面孔出場，實在令人感佩。這其實也是自己在教學理念上本來就很願意去做的部分，見到 Robert Stein 教授的解說，要慚愧的是在教學理念與實際教學兩者結合上的不足，是吾人在教學上期望能夠進步的空間所在。在當天議程結束後，為了自己在學校的課程不得不顧慮的考量下，只能有些捨不得地匆匆踏上歸途，期待下次的相會。

最後，要感謝台中師範學院數學教育系所的全體工作人員的辛勞，有各位的悉心安排，才能使我們有機會參與這一場數學界的盛會。也謝謝各位前輩及同好們的指導與陪伴，我們才能在這塊園地中一同為伍、一起成長。

HPM 在課堂上的應用：以「三角函數」教學活動為例

台中市西苑高中 阮錫琦老師

摘要

如何創造一個有意義的教學活動，應該是每一個數學教育者追求的目標。本文是透過學習工作單的設計，以數學史的典故為主軸，利用數學史為場景來佈置教學情境，再結合 HPM 的三個維度（邏輯、認知心理、歷史），來具體呈現「三角函數」教學單元的知識結構，其中，教學策略為「啟發」取代「操練」以及「圖解」置換「算式」，主要目的是希望培養學生「數形結合」的概念。同時，也期待能夠從數學史的脈絡中提供給中學教師，當面對「三角函數」單元時，一種另類的數學教材教法。

關鍵詞：三角函數、HPM、托勒密

數學史融入無窮等比級數的教學

中山女高 陳啟文老師

摘要

無窮等比數列的學習，是現行的高中數學課程中重要一項主題。在教科書的編寫上，編者習慣上多關注於形式化的定義及證明，如此策略恐易讓學生感到困擾，誤以為大部分的數學家並不是花太多時間在深思他們自己的概念及方法，而是使用定義及證明去解題。一般而言，學生並無法區別教科書上出現的「極限」、「無窮」這兩個字，與他們真實的生活用語有何不同，因此，如果我們立刻採用一個他們正在尚在建構成形的「極限」概念，去證明「無窮」等比級數的總和公式多少有點風險。就筆者個人觀點，要改進上述的教學情況，將數學史融入教學工作中不失為一種好方法，而數學家研究、努力或曾經失敗的故事、軼事，也許是教學素材取得的好資源。本文主要陳述筆者曾在課堂上採用過教學程序，目的在提供給學生不同的方法來證明

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ ，同時，提醒他們數學知識的各種面向。

關鍵詞：無窮等比級數、數學史、極限、數學教學

從 HPM 角度談高中數學人才培育計劃

蘭陽女中 陳敏皓老師

摘要

數學是科學之母，人才培育是科學發展的動力，因此，數學人才的培育計畫是針對高中學生的基礎數學做深入研究，目的是為將來國家科學發展做準備。本計畫案是一項新的嘗試，從 HPM 的角度出發，首重學生的數學科普閱讀能力，輔以加強學生的解題策略，從討論中學習數學知識內容，從閱讀數學史中獲得數學概念啟發，希望藉此計畫案的研究可對高中數學領域和 HPM 兩領域均提供一個深具潛力的發展空間。

關鍵詞：HPM、高中數學人才培育計畫、數學史

一個 HPM 行動研究者的反思

台師大數學系所博士班 成功中學 蘇意雯老師

摘要

本研究是以學校為中心，探討運用數學史教學的數學教師專業發展訓練。讓學校不只是學生們的學習環境，同時也成為教師們在職教育的場所。本文所針對的是在此 HPM 計畫之下研究者本身之專業成長及對此研究之反思。本研究由 T1、T2、T3 及研究者本人共四位同校之台北市高中數學教師共同參與。T1 有十八年之教學經驗，T2 獲有數學博士學位，有十五年的教學經驗。T3 是一位生手教師，只有兩年的教學經驗。至於研究者本身除了是一位擁有九年教學經驗的數學教師外，也就讀於師大數學研究所博士班，主修 HPM。每週二下午四位教師在數學科研究室聚會，討論時間為二至三小時，以行動研究的方式共同蒐集相關資訊，閱讀文章，並用批判性的態度研究東西方的數學文本以設計學習工作單，也溝通實作時所遇到的問題及共商解決之道。為了讓參與者對於課堂上數學史的運用，在行動之餘也能有反思的機會，參與教師們也寫出自己的經驗，把心得發表於《HPM 通訊》（一本通行於華人地區的 HPM 刊物）之中，以供更多的中學數學教師參考。由於，寫作是額外的反思，能因此豐富自身的知識；其次，作品供他人讀用，有助於教師專業知識的締造，相信經由如此的實作研究，不但有助於個人知識增長，專業知識增長，對於研究社群所需資料的聚積也能有所幫助，使培養具有 HPM 之關懷的教師，成為教師在職進修、專業成長的另一進路。

關鍵詞：數學史、HPM、教師專業發展、學校為中心、反思

大學憶往之一

台南二中 劉天祥老師

緣起

去歲 10 月 16 日，與同系畢業之黃玉琴、楊惠椀、李榮昌師餐敘，席間自惠椀學妹日前就讀成大中文所之甘苦談起，連及大學時代之種種。余與玉琴學姊、榮昌學長相隔兩屆，若不計因轉系留級，則為前後屆矣。年相若，憶相近，談來興味盎然。榮昌學長謂余曰：「向時《教與學》既已刊布記研究所生涯之〈清華瑣憶〉，何不更為〈大學憶往〉，以志吾系？」玉琴學姊然其言道：「果爾，精彩可期矣！」聆二人言，不禁躍躍欲試。蓋自余草成〈清華瑣憶〉以來，久蓄此志，但乏推力耳。得此鼓勵，敢不勉焉！因翻檢大學時日記、信件、成績單、讀書記錄，草擬題目，暫得十餘。日後當擇較具可讀性者，次第寫就。

或曰：白頭宮女何需話天寶遺事？余曰：寫作爲用之一，在省視昨日之我。人近中年，華髮早生，青春將逝，諸事無成，轉多思曩昔，或亦爲人情之常！況家有敝帚，享之千金，既得《教與學》供余補白之所，何不欣然落筆？苟一鱗半爪之記，得資吾系友一時片刻之談助，即爲不枉！

台師國文系 77 級系友劉天祥 93 年 4 月 7 日記

為何讀師大？

這個問題，20 歲時的答案和 19 年後現在的答案並不完全一致，可能就像有的歷史學家所主張的：一切歷史都是現代史——過往的事蹟都有待當下現在的人不斷重新詮釋。說不定再過幾年，對這個生命中的重大轉折，我又會有不同的思考！

我在民國 72 年進大學，那是「先填志願後考試」、「不能跨組考試」、「各類組（分甲、乙、丙、丁四組）所有的系加重計分都統一」的最後一年。約在四月底五月初，我們就填好了影響一生方向的志願卡。填志願卡通常有所謂的「選校不選系」、「選系不選校」兩種主要的填法，我採用的是以前者爲主，搭配後者。印象中我們可以填 180 個系，不過我只填了 8、9 個，大致的順序還記得是：台師數學、物理、地科，高師數學、物理，彰師數學、物理，文化印刷，台大電機。我的目標是高師數學，但後來成績超出預期，上了台師數學。填文化印刷是爲了預防萬一，台大電機則是爲了開玩笑。

爲何幾乎都選師大？這和我不擅交際又缺乏冒險進取精神、物質欲望淡薄的個性有很大的關係。那時的師大有公費又分發，只要進得去又能畢業，日後就保證可在公立學校任教，正適合我這種不喜歡競爭的人（這裡並未暗示那時讀師大的人都是如此，請讀者注意）。上大學之前，姊姊已在文化美術系就讀，讀公費學校正好減輕家裡的負擔，也是原因之一。何況我在高中就已自覺到以後一定要找個「和讀書有關，而且有時間讀書」的職業，老師備課需要讀書，寒暑假可以讀書，正是這樣的行業。當然，那時也自以爲日後要當一位好老師並不困難，所以才會做這樣的選擇。

但是這個選擇背後的深層因素也許是爲了「替母親完成未竟的志願」。母親讀舊制三年制師範學校，嫁給父親後不久，祖母認爲當國小老師薪資微薄，一個月的薪水抵不上當時家中經營電影院一、兩天的收入，不如回家帶孩子，母親因此辭去了工作。但風水輪流轉，三家無線電視臺相繼出現，加上軍方電影院以極低廉的票價違法讓一般百姓看電影，我國小還沒畢

業，家中的電影院就已虧損纍纍，難以爲繼，關門歇業了；反而老師的薪水逐年調升。母親爲了操持家務、照顧生意、扶養四個小孩，難得帶我們出門玩一趟，也沒有什麼時間指導我們功課。以前她常感歎地說，如果她當老師就不會這樣！幾年前她參加同學會之後，也曾告訴我，她的同學不少人已經退休，正用月退俸過著無事一身輕的生活，語氣中透著豔羨之意。不過她也自我解嘲說：「她們看起來都比我老，想必是讓學生煩得加速老化吧！」母親已經用她成熟的智慧接受了人生的現實。

讀大學時母親曾在給我的信裡表示，她不後悔辭去教職，看到我們平安長大，就是她人生的重大成就。話雖如此，我仍不能遏抑對母親的愧疚之感，我不禁想著：母親能不能有更好的人生？她如果一直當老師，會不會覺得更幸福？人生不能重來，此事已無可驗證，但我和姊姊在她的鼓勵下都走上了教師這條路，想必也彌補了隱約存在她內心的遺憾吧！

「安定又不用找工作」是當公立學校老師的一大優點，現在許多成績優異的學生想讀軍警學校也是這個原因，可是任教十多年下來，我也慢慢體會出「禍兮福所倚，福兮禍所伏」的道理。「不用找工作」，怎知沒有別的工作更適合我？有恃無恐的「安定」豈不是讓潛力無從發揮的最大殺手？在課堂上看著打瞌睡的學生，有時不禁遐想：如果我從事別的工作，現在該會如何呢？我自認爲有不錯的洞察力和創造力，在高中國文教師這個職務上，有多少用武的餘地？內人讀高中時成績優異，大學畢業後擔任教職，未再更進一步。她功課普通、大學重考上私立大學的哥哥，以近 40 之齡，讀清大的博士班，在竹師兼課。這大概就是「安定」所產生的效果之一吧！

話雖如此，我還是有足夠的理智了解，和我同齡的人有些分數可進師大卻未填師大的，也和我此時的想法類似，他們可能也常問自己：如果當年填師大做志願，是否就不用吃那麼多苦頭？天邊的彩虹，看來總是那麼美麗，讓人恨不得身在其中，等到自己真到了彩虹的位置，也許會發現根本看不到它七彩的顏色！

這一切想法，究竟都只是得隴望蜀的遐想而已，只是有恃無恐之下講的風涼話而已，以我現在的年紀，已沒有勇氣從所獲得的既得利益抽身（其實很可能從來就不會有這樣的勇氣），我現在該做的就是用心地走完任教這條路。

但願我能！

編者注：本文發表於台南二中的刊物上。

Information

『《算數書》與《九章算術》及其劉徽注』研究團隊招募

台師大數學系 洪萬生教授

有鑒於 HPM 乃至於數學教育研究與數學史研究之交流，往往可以互蒙其利，因此，我們特別招募此一團隊，希望能對中算史乃至於一般的數學史之探索，提供一個嶄新的視野與進路，從而創造學術研究之新猷！

- 研究期間：第一期（2004 年 9 月-2006 年 6 月）；第二期（2006 年 9 月-2006 年-2008 年 6 月）
- 研討頻率與方式：至少兩週一次，採用 seminar 形式。
- 研究進路：結合數學教育研究成果（特別是有關『程序性』vs.『概念性』知識面向之研究），為這些中算史的新、舊研究主題開創新局。因此，一開始打算邀請參與者導讀數學教育之相關論文。
- 團隊成員暫訂名單：
洪萬生、左台益、林炎全、劉柏宏（後兩位待邀中）
王文珮、林倉億、英家銘、洪正川、阮錫琦、邱靜如、陳玉芬、陳彥宏、陳春廷
陳啓文、陳敏皓、黃清揚、葉吉海、張復凱、郭守德、郭志輝、歐士福、蔡寶桂
傅聖國、楊淑玲、謝三寶、蘇惠玉、蘇意雯、蘇俊鴻、蘇慧珍、李俊坤、周宗奎
（其他成員繼續物色中）
- 附帶學術活動：
 - (1) 2005 年分別到亞特蘭大（元月）、北京（七月）、東京（八月）、慕尼黑（八月）三處國際研討會提交論文。尤其是東京這一場，乃是第六屆漢字區數學史與數學教育國際研討會（8 月 4-7 日），更需要大家積極參與。此外，如第二屆 HPM 亞太營確定舉辦，當然全力以赴。
 - (2) 本團隊考慮籌辦小型國際學術研討會，並至少發表 10 篇學術論文並結集出版。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：
<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬋（東京大學）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）

台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中） 洪正川（新竹高商）

台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）

台南縣：謝三寶（新化高中） 李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中） 楊瓊茹（三民高中實習）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）

金門：楊玉星（金城中學）

馬祖：王連發（馬祖高中）