HPM 通訊

第七卷 第五期 目錄（2004 年 5 月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

為教師而寫的溫柔數學史篇

台師大學數學系 洪萬生教授

・閱讀畢氏定理的歐氏證明（見《幾何原本》第一冊命題 47）。然後，針對此一論證，撰寫一個『溫柔的』說明，其難易層次適合中學生（9-12 年級）。

・常見的度量角之方法有兩種：度 (degree) 度量與弳 (radian) 度量。圓周率π在後者而非前者中扮演了重要角色。撰寫一篇短文比較並對照這兩種方法，其中包括何以π明顯地出現在其一，但在另一則否。

・為了以代數方法解方程式，我們需要運用很多抽象想法：一個代表未知數的符號、0（零）、負數，以及在方程式兩邊進行『補足運算』(compensating operations)。撰寫一篇文章，解釋『虛設法』(method(s) of false positions) 如何『如影隨形地需求』這些概念。請問如此一來，學生在學習與記憶如何解一次方程式時，究竟變得簡單一些或困難一些？

以上三則『申論題』，都出自 *Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others*，作者 Berlinghoff 與 Gouvea 將它們列爲『教案』(project) 書寫或設計的問題。無論容易回答與否，這些題目連同本書的其他問題，都期待數學教師針對教材單元如『畢氏定理』、『角度量』與『一元一次方程式解法』等等，進行反思 (reflection) 或歷史面向的『後設認知』(meta-cognition)。事實上，本書被美國數學協會 (Mathematical Association of America, 簡稱 MAA) 納入他們所出版的『教室資源』(Classroom Resource Materials) 叢書，顯然就是爲中小學教師提供補充教材之用。

根據兩位作者的夫子自道，本書的構想來自他們兩人兩年前（美國緬因州）Colby 學院數學系走廊的閒聊，但是，更深刻的關懷，則是呼應他們對於數學史的一往情深，以及此一學門對於數學教學（無論是中小學或大學）的可能助益。然而，鑒於教師難以自行研發 HPM 相關教材，所以，他們遂決定撰寫本書，以便提供給教師垂手可得的『歷史素描』(historical sketch)，供他們自行採擷運用。

基於此，作者先描述數學史的一個簡要輪廓（篇幅共有 64 頁），其內容依序分別如下：『起源』、『希臘數學』、『印度數學』、『阿拉伯數學』、『中世紀歐洲』、『15 與 16 世紀』、『代數現身』、『微積分與應用數學』、『嚴密與專業主義』、『抽象、電算機與新應用』、以及『今日數學』。這樣的敘事順序，令人想起了 Carl Boyer 的 *A History of Mathematics* 與 Morris Kline 的 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*。只不過，由於作者志不在史學敘事，所以，相形之下內容就簡要多了。

儘管如此，本書的重心卻是 25 篇『歷史素描』，它們佔了全書總頁數 286 中的 180 頁（約 62%）。這些素描都是針對基礎數學中的普通理念而作，其中尤其著重在『一個理念、一個程序、一個單元等起源之闡釋，常常連結表面上相異的事物、但分享了共有的歷史根源。』爲此，作者的策略如下：

> 它們先是來一段簡略的數學史萬花筒，從最早期到現在！這對於形塑現代數學的人物與事件，提出一個輪廓式的架構，並且為那些分散、自足的素描，供應一個統一的脈絡。

這樣的處理當然反映了作者的主觀認知，然而，只要我們有機會瀏覽一下這 25 篇素描的內容，就可以理解作者處心積慮爲數學教學謀的苦心造詣了：

1. 書寫（正）整數
2. （數學）符號來自何處
3. 0 的故事
4. 書寫分數
5. 負數
6. 度量衡
7. π 的故事
8. 以符號書寫代數
9. 求解一次方程式
10. 二次方程式
11. 求解三次方程式
12. 畢氏定理
13. 費瑪最後定理
14. 歐幾里得平面幾何
15. 柏拉圖多面體
16. 座標幾何
17. 複數
18. 正弦與餘弦
19. 非歐幾何學
20. 射影幾何學
21. 機率論的起點
22. 統計成爲一門科學
23. 電子計算機
24. 邏輯與布氏代數
25. 無窮與集合論

誠然，這些素描幾乎不涉及二十世紀數學知識重大發展面貌，主要指向中小數學教師應有的統整初等數學之能力或素養，而這當然是作者念茲在茲的教育關懷之所在了。事實上，爲了『服務』中小學數學教師，他還特別在這一本加強版中，爲每一篇素描補寫了問題與（教案）申論，鼓勵讀者延伸閱讀或設計教案，本文一開始索引的三則，只不過是其中一小部分而已。

這種書寫風格，也曾出現在前述 Carl Boyer 的 *A History of Mathematics* 與 Bunt 等人所寫的 *Historical Roots of Elementary Mathematics* 之中。由於前書比較像是一部數學史的教科書，因此，Boyer 在他的每章之後所設計的問題，就少了數學教育方面的關懷。對比之下，Bunt 等人的著作中的問題（幾乎每一節後都有佈置），內容就顯得多樣多了，也是除了數學史本身的問題之外，也納入了與數學教學有關的問題了。這樣看來，*Math through Ages* 一書應該是基於類似 Bunt 等人的考量吧，只是作者 Berlinghoff 與 Gouvea 似乎未曾察覺吧！

儘管如此，本書作者還是引述了多達 141 筆文獻，其中所涵蓋的範圍，除了古代數學文本、數學史的專業著述之外，還有 HPM 的論述以及數學科普作品。這些文獻雖然內容多元，訴求不一，但都充分發揮了數學知識的人文價值與意義，而這想必可以透過教師容易親近的『歷史素描』發揮一點啓蒙的效果吧。其實，本書第三部分的『延伸閱讀』(What to Read Next)，也針對書末的參考文獻或網頁甚至其他媒體資訊，提供了簡要的說明與推薦。無論如何，本書內容完全『貼近』第一線教師的主要考量，的確是我們 HPM 專業工作者應當努力效法的目標吧。

最後，介紹本書的出版資料如下：

書名：Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others (Expanded edition)

作者：William P. Berlingholl, Fernando Q. Gouvea

頁數：xii+275 pp

國際書碼：ISBN 0-88385-736-7

出版社：A Joint Publication of Oxton House Publishers (at Farmington, ME) and The Mathematical Association of America (at Washington, DC)

出版年：2004

用向量來看圓系

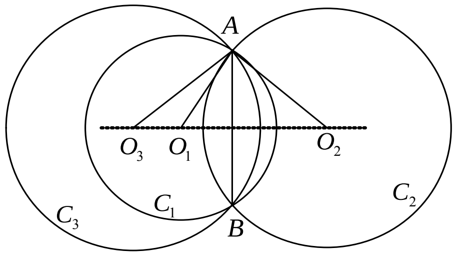
中山女高 蘇俊鴻老師

什麼是「圓系」呢？簡單地說，就是過兩圓交點的圓方程式，可以寫成已知兩圓方程式的線性組合。如圖一，給定兩圓 $C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ 與 $C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$，且兩圓交於 A 、 B 兩點。則過兩交點 A 、 B 的圓 C_3 的方程式可以寫成

$\alpha(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+\beta(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ ，$\alpha^2+\beta^2\neq 0$。更進一步，若 $\alpha\neq 0$，則圓 C_3 方程式可以改寫成

$$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+\frac{\beta}{\alpha}(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$$

即 $(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$



圖一

然而，圓系的觀念是從那兒得到的靈感的呢？

除了利用平面族定理的結果與形式「類推」圓系外，能不能有其他的說法可以讓人清楚地看到線性組合的由來？！此處我們想透過向量中三點共線的性質來幫助我們達成這個目的。先複習一下，什麼是三點共線性質：

若 A 、 B 、 P 三點共線 $\Leftrightarrow$ 存在 $t\in R$，且 $t\neq 0$，使得 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ 存在兩實數 α 、 β，且 $\alpha+\beta=1$，使得 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

好了，開始我們的討論吧！在圖一，不難看到一個簡單的幾何性質：

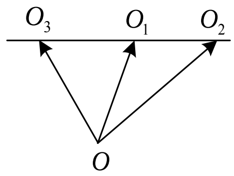
凡過交點 A 、 B 的圓 C_3，它的圓心 O_3 一定會與已知圓 C_1 、 C_2 的圓心 O_1 與 O_2 共線。

由 $\overline{AB}$ 為各圓的公共弦來看，這個性質顯然是成立的。如此一來，若我們設 O 為原點，則

$$C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \Rightarrow O_1(-\frac{d_1}{2},-\frac{e_1}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{OO_1}=(-\frac{d_1}{2},-\frac{e_1}{2})\text{，}$$

且

$$C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \Rightarrow O_2(-\frac{d_2}{2},-\frac{e_2}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{OO_2}=(-\frac{d_2}{2},-\frac{e_2}{2})$$



又 O_1，O_2 及 O_3 三點共線，故 $\overrightarrow{OO_3}=\alpha\overrightarrow{OO_1}+\beta\overrightarrow{OO_2}$，其中 $\alpha+\beta=1$。

因此，$\overrightarrow{OO_3}=\alpha(-\frac{d_1}{2},-\frac{e_1}{2})+\beta(-\frac{d_2}{2},-\frac{e_2}{2})=(-\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{2},-\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{2})$

$$=(-\frac{\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{\alpha+\beta}}{2},-\frac{\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{\alpha+\beta}}{2}) \qquad (\text{因為 }\alpha+\beta=1)$$

所以，C_3 的圓心 O_3 坐標為 $(-\frac{\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{\alpha+\beta}}{2},-\frac{\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{\alpha+\beta}}{2})$

再逆推，C_3 的圓方程式可知為 $x^2+y^2+(\frac{\alpha d_1+\beta d_2}{\alpha+\beta})x+(\frac{\alpha e_1+\beta e_2}{\alpha+\beta})y+(\text{常數項})=0$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta)y^2+(\alpha d_1+\beta d_2)x+(\alpha e_1+\beta e_2)y+(\text{常數項})=0$

$\Rightarrow \alpha(x^2+y^2+d_1x+e_1y)+\beta(x^2+y^2+d_2x+e_2y)+(\text{常數項})=0$ （＊）

接著我們要求出常數項的部份，由於交點 $A(x_1,y_1)$ 在圓 C_1 與 C_2 上，必須滿足方程式 $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+d_1x_1+e_1y_1+f_1=0$ 與 $x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+d_2x_1+e_2y_1+f_2=0$。

又 A 點在圓 C_3 上，滿足(∗)式為

$\alpha({x_1}^2+{y_1}^2+d_1x_1+e_1y_1)+\beta({x_1}^2+{y_1}^2+d_2x_1+e_2y_1)+(\text{常數項})=0$ ，

$\Rightarrow \alpha(-f_1)+\beta(-f_2)+(\text{常數項})=0 \Rightarrow \text{常數項}=\alpha f_1+\beta f_2$ ，(由 B 點也會得出相同的結果)

進一步整理(∗)式，

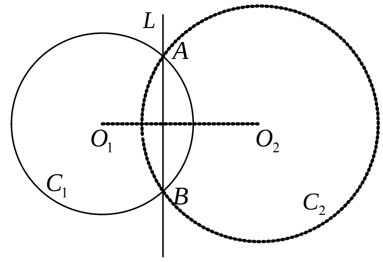
$\alpha(x^2+y^2+d_1x+e_1y)+\beta(x^2+y^2+d_2x+e_2y)+(\alpha f_1+\beta f_2)=0$

$\Rightarrow \alpha(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+\beta(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$

因此，給定兩圓 $C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ 與 $C_2: x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$ ，且兩圓交於 A 、 B 兩點。我們不難發現：過兩交點 A 、 B 的圓 C_3 的方程式可以寫成兩圓方程式的線性組合 $\alpha(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+\beta(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ ，並且於 $\alpha\neq 0$ 時，能進一步改寫成 $(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$ 呢。

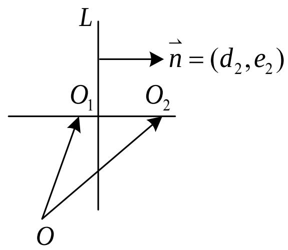
事實上，若我們再進一步推想：兩圓相交於兩點時，過兩交點的圓都可以表示成兩圓方程式的線性組合。那麼，若考慮一圓與一線相交於兩點時，則過兩交點的圓可以表示成圓方程式與直線方程式的線性組合嗎？

如右圖，給定 $C_1: x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$ 及直線 $L: d_2x+e_2y+f_2=0$ ，則過 C_1 與 L 之交點 A 、 B 的圓 C_2 該如何描述呢？



仔細想想，我們說直線 L 可以看成圓心在無限遠處，半徑為無限大的圓，由上述對圓系的說明，不難了解圓 C_2 也可寫成 $(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(d_2x+e_2y+f_2)=0$ 此外，我們也可由向量的觀點加以說明。

因為 L 的法向量 $\vec{n}=(d_2,e_2)$ ，加上 O_1 、 O_2 二點共線，所以



$$\overrightarrow{OO_2}=\overrightarrow{OO_1}+t\vec{n}=(-\frac{d_1}{2},-\frac{e_1}{2})+t(d_2,e_2)=(-\frac{d_1+(-2t)d_2}{2},-\frac{e_1+(-2t)e_2}{2})$$

$$=(-\frac{d_1+kd_2}{2},-\frac{e_1+ke_2}{2}) \qquad (\text{令 } k=-2t\ )$$

$$\Rightarrow O_2(-\frac{d_1+kd_2}{2},-\frac{e_1+ke_2}{2})$$

所以，圓 C_2 的方程式可表為

$x^2+y^2+(d_1+kd_2)x+(e_1+ke_2)y+(\text{常數項})=0$

$\Rightarrow (x^2+y^2+d_1x+e_1y)+k(d_2x+e_2y)+(\text{常數項})=0 \qquad$ (∗∗)

接下來求取常數項，

由於點 $A(x_1,y_1)$ 在圓 C_1 與直線 L 上，滿足 ${x_1}^2+{y_1}^2+d_1x_1+e_1y_1+f_1=0$ 與 $d_2x_1+e_2y_1+f_2=0$ 。又點 A 也在圓 C_2 上，所以滿足(∗∗)式，

$({x_1}^2+{y_1}^2+d_1x_1+e_1y_1)+k(d_2x_1+e_2y_1)+(\text{常數項})=0 \Rightarrow \text{常數項}=f_1+kf_2$

整理(∗∗)式，便可得到 $(x^2+y^2+d_1x+e_1y)+k(d_2x+e_2y)+(f_1+kf_2)=0$

$\Rightarrow (x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(d_2x+e_2y+f_2)=0$

由於過兩圓交點的直線正是這兩圓的根軸，而根軸的方程式的求法為何？由上述關係推敲，不難發現 $C_2=C_1+kL \Rightarrow kL=(C_1-C_2)$ ，所以根軸的方程式正是由這兩圓方程式相減即可得。實際上利用一圓及一直線來表示「圓系」，對於解題會更加便利。不妨比較接下來【例題一】中的解法二與解法三！

【例題一】過兩圓 $C_1: x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 與 $C_2: x^2+y^2-2x+2y-18=0$ 的交點，且圓心在 $x+y+1=0$ 上的圓方程式。

（解法一）先找出 C_1 與 C_2 的交點，再設法求出所找之圓的圓心坐標及半徑。

解聯立方程組 $\begin{cases} x^2+y^2+4x-6y-12=0 \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2x+2y-18=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$

，由①−②可得兩圓的根軸為 $3x-4y+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{4y-3}{3}$，代入②式，

$(\dfrac{4y-3}{3})^2+y^2-2(\dfrac{4y-3}{3})+2y-18=0$

$\Rightarrow 5y^2-6y-27=0 \Rightarrow y=3$ 或 $y=-\dfrac{9}{5}$

當 $y=3$ 時，則 $x=3$；當 $y=-\dfrac{9}{5}$，則 $x=-\dfrac{17}{5}$

$\therefore$ 交點坐標為 $A(3,3)$ 及 $B(-\dfrac{17}{5},-\dfrac{9}{5})$，且弦 $\overline{AB}$ 的中點為 $(-\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5})$

$\therefore$ 弦 $\overline{AB}$ 的中垂線方程式為 $4x+3y-1=0$

而所求之圓的圓心為 $x+y+1=0$ 及弦 $\overline{AB}$ 的中垂線之交點，故解聯立方程組

$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$，所求之圓的圓心為 $O(4,-5)$，半徑 $r=\overline{OA}=\sqrt{65}$

所求之圓的方程式為 $(x-4)^2+(y+5)^2=65$

（解法二） 利用圓系，設所求之圓的方程式為

$(x^2+y^2+4x-6y-12)+k(x^2+y^2-2x+2y-18)=0$

$\Rightarrow (k+1)x^2+(k+1)y^2+(-2k+4)x+(2k-6)y+(-18k-12)=0 \cdots\cdots ①$

圓心為 $(-\dfrac{-2k+4}{2(k+1)},-\dfrac{2k-6}{2(k+1)})=(\dfrac{k-2}{k+1},\dfrac{-k+3}{k+1})$，依題意，圓心在 $x+y+1=0$ 上，

$\Rightarrow \dfrac{k-2}{k+1}+\dfrac{-k+3}{k+1}+1=0 \Rightarrow k+2=0 \Rightarrow k=-2$，代入①得

所求之圓的方程式為 $x^2+y^2-8x+10y-24=0$

（解法三） 由於兩圓的根軸為兩式相減得 $3x-4y+3=0$，故所求之圓的方程式可設為 $(x^2+y^2+4x-6y-12)+k(3x-4y+3)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(3k+4)x+(-4k-6)y+(3k-12)=0 \cdots\cdots ①$

所以圓心為 $(-\dfrac{3k+4}{2},\dfrac{4k+6}{2})=(-\dfrac{3k+4}{2},2k+3)$，依題意，圓心在 $x+y+1=0$ 上，

$\Rightarrow -\dfrac{3k+4}{2}+2k+3+1=0 \Rightarrow k+4=0 \Rightarrow k=-4$，代入①得

所求之圓的方程式為 $x^2+y^2-8x+10y-24=0$

與解法二相較之下，是否發現解法三的運算上顯得簡潔多了？再來看幾個例子。

【例題二】設 $k\in R$，若圓 $(x^2+y^2+8x-9)+k(x^2+y^2-4x-5)=0$ 的圓心恒在某一直線上，求此直線方程式？

（解法一） 由前述圓系的說明知道，此線可由兩圓 $x^2+y^2+8x-9=0$ 及 $x^2+y^2-4x-5=0$ 的圓心所決定！而兩圓的圓心分別為 $(-4,0)$ 及 $(2,0)$，故此直線為 $y=0$

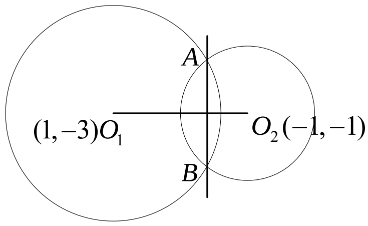
（解法二） 既然 $k\in R$ 的情形下均成立，由於二點決定一線，不妨直接求二個圓的圓心即可！

當 $k=0$ 時，得圓 $x^2+y^2+8x-9=0$，得圓心 $(-4,0)$

當 $k=1$ 時，得圓 $x^2+y^2+2x-7=0$，得圓心 $(-1,0)$

故此直線為 $y=0$

【例題三】若 $C_1: x^2+y^2-2x+6y-10=0$ 與 $C_2: x^2+y^2+2x+2y-6=0$ 交於 A、B 兩點，求以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓之方程式為何？



（解法一） ∵

$C_1: x^2+y^2-2x+6y-10=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=20$，

得圓 C_1 的圓心 $O_1(1,-3)$，半徑 $r_1=2\sqrt{5}$。又

$C_2: x^2+y^2+2x+2y-6=0$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=8$，得圓 C_2 的圓心 $O_2(-1,-1)$，半徑 $r_2=2\sqrt{2}$。

∴直線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的方程式為 $x+y+2=0$，而直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 為兩圓的根軸，

其方程式為 $C_2-C_1: 4x-4y+4=0 \Rightarrow x-y+1=0$。

如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓之圓心為兩直線的交點，

解聯立方程組 $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$，圓心 $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$

再來求半徑，∵ $d(O_1,\overleftrightarrow{AB})=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$，所求之圓的半徑為 $\sqrt{{r_1}^2-(\frac{5}{\sqrt{2}})^2}=\sqrt{20-\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{15}{2}}$

所求之圓的方程式為 $(x+\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{15}{2} \Rightarrow x^2+y^2+3x+y-5=0$

（解法二） 依題意，已知 $C_1: x^2+y^2-2x+6y-10=0 \cdots\cdots$ ①

$C_2: x^2+y^2+2x+2y-6=0 \cdots\cdots$ ②

$\overleftrightarrow{AB}: x-y+1=0 \cdots\cdots$ ③

令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，則

由③可知 $y=x+1$，代入②得 $x^2+3x-\frac{3}{2}=0 \cdots\cdots$ ④

而 x_1，x_2 為④式的二根，故 $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+3x-\frac{3}{2}$

又由③可知 $x=y-1$，代入②得 $y^2+y-\frac{7}{2}=0 \cdots\cdots$ ⑤

而 y_1 ，y_2 為⑤式的兩根，故 $(y-y_1)(y-y_2)=y^2+y-\frac{7}{2}$

故以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓方程式為 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+3x+y-5=0$

（解法三） 由於過 A 、B 兩點，以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓，恰為所有過 A 、B 兩點的圓中半徑最小的情形。故可設過 A 、B 兩點的圓為 $x^2+y^2-2x+6y-10+k(x-y+1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(k-2)x+(6-k)y+(k-10)=0$

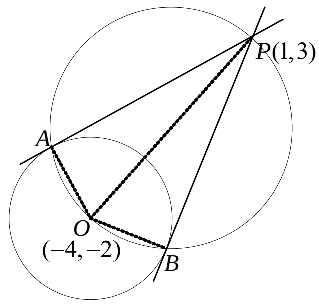
$\Rightarrow (x+\frac{k-2}{2})^2+(y+\frac{6-k}{2})^2=10-k+(\frac{k-2}{2})^2+(\frac{6-k}{2})^2=\frac{k^2-10k+40}{2}$

得半徑為 $\sqrt{\frac{k^2-10k+40}{2}}=\sqrt{\frac{(k-5)^2+15}{2}}$ ，$\therefore$ 當 $k=5$ 時，半徑有最小值。

故以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓之方程式為 $x^2+y^2-2x+6y-10+5(x-y+1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+3x+y-5=0$

【例題四】圓 $C:x^2+y^2+8x+4y+10=0$ ，點 $P(1,3)$ ，自 P 作圓 C 的兩條切線，切點為 A ，B ，求 ΔPAB 之外接圓方程式為何？



(解法一) $C:x^2+y^2+8x+4y+10=0\Rightarrow (x+4)^2+(y+2)^2=10$ ，得圓心 $O(-4,-2)$

如右圖，依題意 $\because \overline{OA}\perp\overline{AP}$ ，$\overline{OB}\perp\overline{BP}$

故 O ，A ，P ，B 四點共圓，故 ΔPAB 之外接圓為以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓，所求圓的方程式為

$(x+4)(x-1)+(y+2)(y-3)=0\Rightarrow x^2+y^2+3x-y-10=0$

(解法二) $\because$ 直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 為以切點 A 、B 所成的切點弦，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為

$x+3y+4(1+x)+2(3+y)+10=0\Rightarrow 5x+5y+20=0\Rightarrow x+y+4=0$

因此，過點 A 、B 所有的圓方程式可設為 $x^2+y^2+8x+4y+10+k(x+y+4)=0$

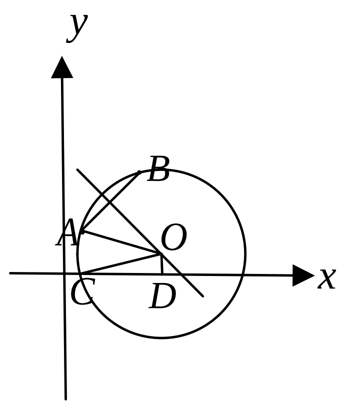
點 $P(1,3)$ 代入得 $40+8k=0\Rightarrow k=-5$

故 ΔPAB 之外接圓為 $x^2+y^2+8x+4y+10+(-5)(x+y+4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+3x-y-10=0$

【例題五】一圓過點 $A(1,2)$ 與點 $B(3,4)$ ，且與 x 軸截出的弦長為 6 ，試求此圓的方程式。

(解法一) 線段 $\overline{AB}$ 的中垂線方程式為 $y=5-x$ ，又知圓心在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，因此，可設圓心 O 的坐標為 $(t,5-t)$ 。依題意，



$\overline{OA}=\overline{OC}\Rightarrow \overline{OA}^2=\overline{OC}^2=\overline{OD}^2+\overline{CD}^2$

$\Rightarrow (t-1)^2+(5-t-2)^2=(5-t)^2+9\Rightarrow t^2+2t-24=0$

$\Rightarrow t=4$ 或 $t=-6$

(1)當 $t=4$ 時，圓心為 $(4,1)$ ，半徑 $r=\overline{OC}=\sqrt{10}$ ，

所求圓方程式為 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

(2)當 $t=-6$ 時，圓心為 $(-6,11)$ ，半徑為 $r=\overline{OC}=\sqrt{130}$ ，

所求圓方程式為$(x+6)^2+(y-11)^2=130$

(解法二)　以$\overline{AB}$為直徑的圓C方程式為$(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+11=0$，而$\overleftrightarrow{AB}$的方程式為$x-y+1=0$

由於所求的圓過圓C與$\overleftrightarrow{AB}$的交點A、B，可設所求之圓的方程式為

$x^2+y^2-4x-6y+11+k(x-y+1)=0$

令$y=0 \Rightarrow x^2-4x+11+k(x+1)=0 \Rightarrow x^2+(k-4)x+11+k=0$

設上式之兩根為α、β，且$\alpha<\beta$，

依題意，$\beta-\alpha=6 \cdots\cdots$①

又依根與係數的關係得$\alpha+\beta=4-k \cdots\cdots$②

$\alpha\beta=11+k \cdots\cdots$③

②$^2-$①^2，$(4-k)^2-36=4\alpha\beta=4(11+k) \Rightarrow k^2-12k-64=0 \Rightarrow k=16$ 或 $k=-4$

(1)當$k=16$時，所求之圓方程式為$x^2+y^2-4x-6y+11+16(x-y+1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+12x-22y+27=0$

(2)當$k=-4$時，所求之圓方程式為$x^2+y^2-4x-6y+11-4(x-y+1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-2y+7=0$

(解法三)　設所求之圓的方程式為$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

由圓過點A與B，得$5+d+2e+f=0 \cdots\cdots$①

$25+3d+4e+f=0 \cdots\cdots$②

令$y=0 \Rightarrow x^2+dx+f=0 \cdots\cdots$(甲)

設(甲)式之兩根為α、β，依題意$|\alpha-\beta|=6$

由根與係數的關係，得$\alpha+\beta=-d$，$\alpha\beta=f$

$\because (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2 \Rightarrow d^2-4f=36 \cdots\cdots$③

又②$-$①$\times 2 \Rightarrow d-f+15=0 \Rightarrow f=d+15$代入③

$d^2-4(d+15)=36 \Rightarrow d^2-4d-96=0 \Rightarrow (d-12)(d+8)=0 \Rightarrow d=12$ 或 $d=-8$

(1)當$d=12$時，$f=27$，由①，得$e=-22$，

所求之圓的方程式為$x^2+y^2+12x-22y+27=0$

(2)當$d=-8$時，$f=7$，由①，得$e=-2$

所求之圓的方程式為$x^2+y^2-8x-2y+7=0$

好了，看了這些例子的演示，是否感受到圓系的威力呢？也對它更爲熟悉了吧！本文中我們利用向量的性質來幫助了解圓系線性組合形式的由來，希望讀者藉此能夠體會數學中基本觀念的延伸與推廣的重要性。如此一來，才能夠將許多學習過的主題連結起來，讓數學知識得以流動，激發生命力，而非零碎地理解它。事實上，我們在平面上討論圓，到了空間中則是延拓到球面，所以圓系的形式，自然而然地可被延伸到球面系呢！有興趣的讀者也不妨自己推敲看看。

曲線下面積學習單的設計

西松高中 蘇惠玉老師

一、前言

在現行高三數學課程中，下學期為微積分的部分；分成兩章，一章為極限的概念，另一章為極限的應用。其中有關於積分的部分，只在最後一小節中利用「分割與逼近」的方法，求曲線下的面積，以利學生大學後進一步學習定積分。由於在此節之前，都是有關於微分的應用，所以，在此節開始前，在引起動機方面，教師必須舉一些「例子」，說明此節的基本觀念，即利用分割與逼近的方法，可以求出曲線下的面積。

在龍騰版教科書中，書上舉出的例子為折線形下的面積，利用「分割」算出總面積；在此只點出「求面積利用分割的方式」，而忽略的了直線形與曲線形的最大不同點，就在誤差的處理。而南一版的教科書中，利用葉子來估計面積，引出分割與逼近的概念。在南一版的教師手冊中，此節的「教學活動策略」中的「布題活動」，是教師將紙撕成不規則形狀，再將圖形描繪於黑板上，讓學生思考如何算出面積。這些活動雖然切合主題，但是感覺像國中生的「教學活動」，可能高三的學生會覺得有點小幼稚。

在這一節的教學活動中，我希望能有些例子，讓學生看出不同分割的方法，逼近的重要性及困難之處，以及數學家在面對困難時採取的策略，進而加強學生對「分割與逼近」基本概念的瞭解。

二、教學省思

這個單元放在三年級下學期最後一個單元，為「極限的應用」中的一節，用意在於讓學生知道如何利用「分割與逼近」的極限應用，得到曲線下的面積。教科書的教材的重點，或是目標，在於讓學生「了解」利用極限的方式，就可以得到曲線下的面積。雖然「分割與逼近」在現在的學生看來，似乎理所當然，但是，數學家幾百年來面對同樣問題時的困境、苦思的解決之道，學生似乎完全不能體會！所以，我想要設計一份學習單，讓學生對分割的方法，有較為寬廣的視野，同時了解分割完後，數學家面對的困境，以及不同的文化、時空背景之下，採取的解決路徑的不同。讓學生在學習積分的啓蒙觀念時，同時學會「欣賞」與分析不同的數學證明方式。

三、史料分析

這份學習單，我選擇的史料有劉徽的割圓術、阿基米德圓面積的證明、克卜勒對阿基米德圓面積公式的證明、以及阿基米德拋物線弓形面積的證明。劉徽與阿基米德的圓面積公式都是「半周半徑相乘」，證明過程中，也都有提到利用圓內接與外切多邊形，但是證明策略卻是大異其趣。

我們以時空背景來看，劉徽是魏晉時候人。魏陳留王景元四年（公元 263 年）撰《九章算術注》，當時劉徽約 30 歲左右。劉徽受到什麼學說、什麼人的影響，而提出如「割圓術」的想法不得而知，但是，我們卻可在中國史上哲學思潮最興盛的春秋戰國時期，在墨子的《墨

子》卷十的《經上》、《經下》、《經說上》、《經說下》中，發現劉徽爲何作如是想的蛛絲馬跡。

就無窮大而言，《經上》寫道：「**窮，域有前不容尺也**」，《經說上》：「**窮，不容尺有窮，莫不容尺無窮也**」，亦即用尺來度量路程，如果量到前面只剩下不到一尺的剩餘，則這段路程是有窮的；如果繼續量下去，前面總有超過一尺，那麼，此路程是「無窮的」。[1]鄒大海認爲，這是用一個度量單位來界定有窮與無窮，在承認「無窮大」存在的前提下探討其本質，這點與希臘傳統下對「無窮」採取迴避的態度截然不同。

就無窮小與分割的部分，

《經上》：	《經說上》：
「**端，體之無厚而最前者也。**」	「**端，無間也**」
「**久，彌異時也。宇，彌異所也**」	「**久，古今旦莫。宇，東西家南北**」
「**始，當時也**」	「**始，時或有久，或無久。始當無久**」

此處的「厚」，可作「厚度」或是「量的多少」來解釋。[2]同樣的，「時」有「期間」和「瞬間」二義。「始」爲久之最初的瞬息，所以當無久之時。「端」和「始」都是度量爲零，但不是「無」。由此再來看《經下》與《經說下》的分割概念，《經下》：「非半弗斱，則不動，說在端。」《經說下》：「**非，斱半進前取也，前則中無為半，猶端也。前後取則端中也。斱必半，毋與非半，不可斱也。**」斱，破也，有分割的意思。意即每次中分一體，最後必有一不可分割的「端」。劉徽在其注中所言：「**割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。**」由此似乎可以看出墨子學說對其影響。

但是阿基米德還在當時的希臘文化傳統的影響之下，深受季諾悖論之苦（請參考筆者另一篇文章，〈從一個問題說起：無窮〉，刊登在《HPM 通訊》第五卷第一期）。所以他只好採取迂迴戰術，以兩次歸謬的方法，間接證明圓面積公式。但是，到克卜勒在寫《測量酒桶的新立體幾何》(1615)時，他似乎不受這樣的傳統所影響，大膽的說「圓的周長可以分成如同點一樣多的部分，亦即無窮多個(infinite number)部分」。或許克卜勒只是覺得這樣方便行事吧！

四、學習單的設計理念

我的目標是找一些例子讓學生有學習動機，並且作爲從直線形轉換到曲線的引子，同時讓學生了解分割的方法與求面積所面臨的困境，及不同的解決方法。由於這份學習單預計在三年級下學期四月時實施，此時學生的心理上，較不希望老師在課程已經上不完的情況下，再作些與課本教材內容無關的教學活動，所以我在選擇史料與問題設計上，盡量與學生所學與將學的「數學知識」有關。學習單中將涉及的證明過程列出，爲學生了解、學習的重點；再以問題引導的方式，讓學生進一步反思在證明過程中所透露出的數學知識邏輯上的意涵、文化背景上的意義。希望學生透過此份學習單，能引起學習動機，對「積分」的概念有進一步的理解與體會。以下爲學習單的完整內容：

Card 1：劉徽之割圓術

《九章算術》卷一 方田

又有圓田，周一百八十一步，徑六時步三分步之一。問爲田幾何？

術曰：半周半徑相乘得積步。按：半周爲從，半徑爲廣，故廣從相乘爲積步也。假令圓徑二尺，圓中容六觚之一面，與圓徑之半，其數均等，合徑率一而弧周率三也。

(C=6・r, r=1)[3]

又按：爲圖。以六觚之一面乘一弧半徑，三之，得十二觚之冪。

$(A_2 = 3a_1 \times r)$

若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半徑，六之，則得二十四觚之冪。

$(A_3 = 6a_2 \times r)$

割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。

觚面之外，猶有餘徑，以面乘餘徑，則冪出弧表。

$(A_n + r_n \times a_n \times 6 \times 2^n >$圓面積$)$

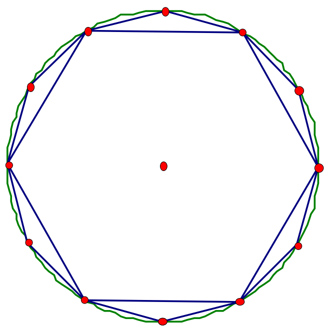
若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。

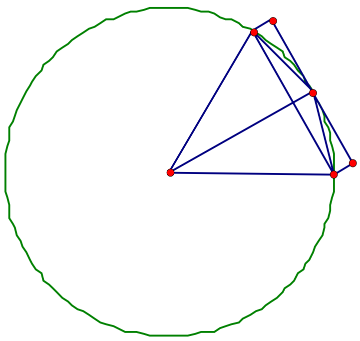
$(\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$，$A_n<$圓面積$< A_n + r_n \times a_n \times 6 \times 2^n$，$\lim_{n\to\infty} A_n =$圓面積$)$

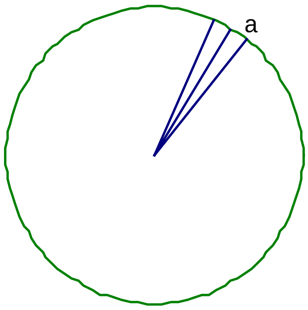
以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍。故以半周乘半徑而爲圓冪。

$($圓面積$=\sum^{\infty} A$，axr=2A，圓面積$=\sum^{\infty} A = \frac{1}{2}\sum^{\infty} a \cdot r = \frac{1}{2} C \cdot r)$

此以周、徑，謂至然之數，非周三徑一之率也。







設a_n=6x2^n邊形的邊長，A_n=6x2^n邊形的面積，S_n==6x2^n邊形的周長。

問題：

1. 試證明：$A_2 = 3a_1 \times r$ 。
2. 試證明：$A_3 = 6a_2 \times r$ 。
3. 在上述的文字中，你覺得哪段話具有「極限」的概念？

4. 你覺得在劉徽證明圓面積公式的過程中，有哪些邏輯上或是「感覺上」不嚴密，或有問題的地方？

5. 為何此時的圓面積公式為 $\frac{1}{2}C\cdot r$ ，而不是 $\pi\cdot r^2$ 之形式？這兩形式的寫法，有何差別？

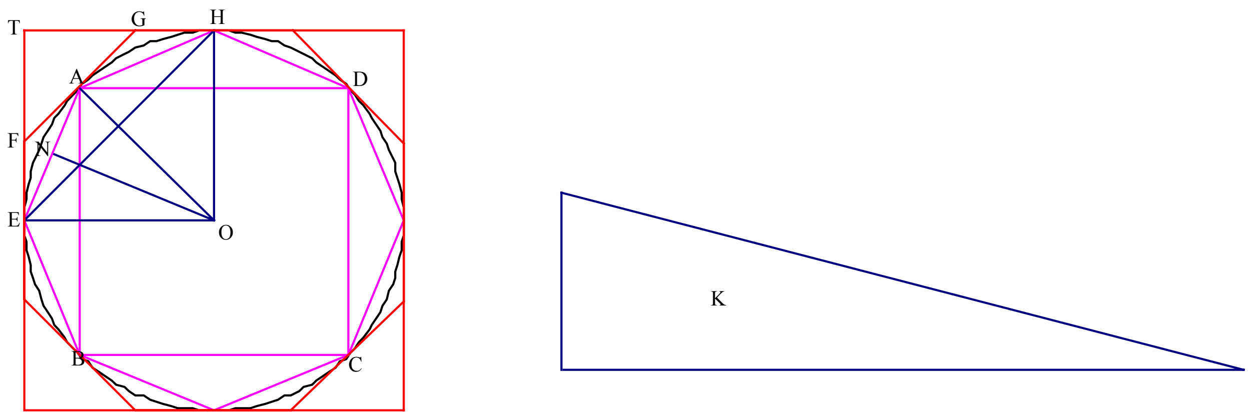
Card 2：阿基米德圓面積公式之證明

《圓的度量(Measurement of a Circle)》

命題 1：任一圓的面積等於以該圓的半徑和周長為兩直角邊的直角三角形的面積。

設 ABCD 是給定的圓，K 是所述的三角形。

如果圓面積不等於 K，那麼它一定大於或小於 K。



I. 如果可能，設圓面積大於 K。

作圓的內接正方形 ABCD，平分弧 AB、BC、CD、DA，然後等分其半（如有必要），繼續分下去，直到以分點為頂點的內接多邊形各邊所對弓形面積之和小於圓面積與 K 之差。

弓形和＝圓－內接多邊形<圓－K

這樣，多邊形面積大於 K。

設 AE 為多邊形的任一邊，ON 為引自圓 O 垂直於 AE 的垂線。

那麼 ON 小於圓的半徑，因而小於 K 的一直角邊。又多邊形的周長小於圓周長，即小於 K 的另一直角邊。

$$多邊形＝\frac{1}{2}ON\cdot AE\cdot n=\frac{1}{2}ON\cdot S_n<K$$

所以多邊形面積小於 K，這與前面假設矛盾。

故圓面積不大於 K。

II. 設圓面積小於 K。

作圓的外切正方形，設該正方形與圓切於 E、H 的兩鄰邊交於 T。平分相鄰兩切點間的弧，並在分點處作切線。設 A 為弧 EH 的中點，FAG 為 A 的切線。

那麼角 TAG 為直角。因而有

TG >GA

>GH，

由此可得，三角形 FTG 的面積大於 TEAH 面積之半。

類似地，如果平分弧 AH，並作分點處的切線，那麼，在 GAH 內，該切線將截出一個三角形，其面積大於 GAH 的一半。

如果繼續這種作法，最後可得到一外切多邊形，使得該多邊形與圓所夾圖形的面積小於 K 與圓面積之差。

(1/2)弧形＝外切多邊形－圓<K－圓

由此之，多邊形的面積小於 K。

因爲引自 O 垂直於多邊形任一邊的垂線等於圓的半徑，而多邊形的周長大於圓周長，由此可得，多邊形的面積大於三角形面積 K，這是不可能的。

$$\text{外切多邊形}=\frac{1}{2}r\cdot a_n\cdot n>\frac{1}{2}r\cdot C=\text{K}$$

因此圓面積不小於 K。

由於圓面積既不大於 K，也不小於 K，所以二者相等。

問題：

1. 在 I.的證明中，哪些文字有「極限」(或無窮)的概念？
2. 在 II.的證明中，哪些文字有「極限」(或無窮)的概念？
3. 在阿基米德的證明過程中，你覺得有無邏輯不嚴密的地方？若有，是哪一部份？
4. 比較劉徽與阿基米德的證法，你覺得有何差異？爲何會有這樣的差異？
5. 你覺得劉徽與阿基米德的證法哪一種較好？爲什麼？

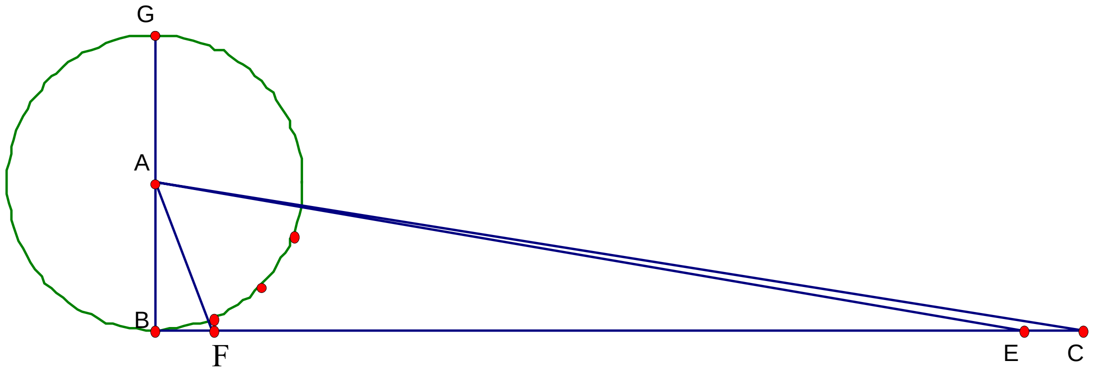
Card 3：克卜勒爲阿基米德圓面積公式的證明

《測量酒桶的新立體幾何》

第一部份：規則圖形的體積

定理二：圓面積和以其直徑爲邊的正方形面積之比爲 11: 14。

阿基米德用間接證明得到了如果面積超過了這個比例，那它就太大了。這就如同這個意思。見圖。



圓 BG 的周長可以分成如同點一樣多的部分，亦即無窮多個(infinite number)部分，每部分可

看作一個等腰三角形的底，該三角形有等腰 AB，所以，在圓面上有無窮多個以 A 爲公共頂點的小三角形。現將圓 BG 的圓周拉直到直線 BC，且使 BC 等於圓周長。這無窮多個三角形或扇形的底則假設會(supposed to be)一個挨一個地落在直線 BC 上。假設 BF 是這些底中的一個，CE 是等於它的另一個。接連 FA、EA、CA，則生成三角形 BAF 和 EAC。顯然，BC 上的這種三角形的數目同圓上的扇形數目一樣多。且底 BF 和 EC 相等，而所有三角形的高都是 BA（BA 也是扇形的高），所以三角形 BAF 與三角形 EAC 面積相等，且等於每一個扇形。因爲各三角形的底都在 BC 上，所以三角形 BAC，由所有這些三角形所組成，會等於圓內所有扇形，所以等於圓面積（該圓是由這些扇形所組成的）。這等價於阿基米德通過歸謬法得到的結論。

問題：

1. 你覺得克卜勒對圓面積的分割想法，與阿基米德相同嗎？若不同，不同之處在哪？
2. 你覺得克卜勒對圓面積的分割想法，較接近劉徽或是阿基米德的想法？爲什麼？
3. 你覺得哪一種證明較「嚴密」？
4. 你覺得哪一種較有課堂上所學過的「微積分」的概念？
5. 猜想一下，克卜勒如何利用圓面積的證明形式去測量酒桶的體積？

Card 4：阿基米德拋物線面積

《拋物線圖形求積法(Quadrature of the parabola)》

命題 23：給一序列的面積 A, B, , D, …, Z，其中 A 爲最大的一個， 且每個等於下一個的 4 倍，

則 $A+B+C+...+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$

取面積 b, c, d,…使得 b=$\frac{1}{3}$B, c=$\frac{1}{3}$C, d=$\frac{1}{3}$D 等等；

則因爲 b=$\frac{1}{3}$B，B＝$\frac{1}{4}$A，所以 B+b＝$\frac{1}{3}$A，同理 C+c=$\frac{1}{3}$B，…，所以

B+C+D+…+Z+b+c+d+…+z=$\frac{1}{3}$(A+B+C+…+Y)

但是 b+c+d+…+y=$\frac{1}{3}$(B+C+D+…+Y)

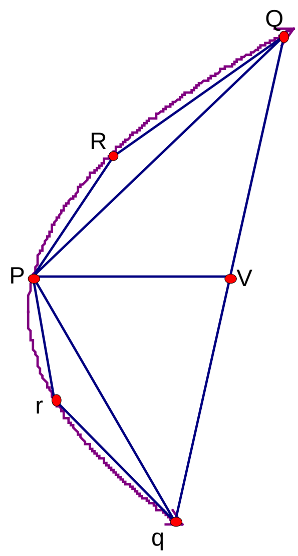
所以，藉由減法，

B+C+D+…+Z+z=$\frac{1}{3}$A，或是

A+B+C+…+Z+$\frac{1}{3}$Z=$\frac{4}{3}$A。

命題 24：每一個由拋物線和弦 Qq 所圍成的弓形(segment)等於與此弓形同底等高的三角形的 $\frac{4}{3}$。

假設 $K=\frac{4}{3}\triangle PQq$，其中P爲弓形的頂點[1]；則我們必須證明弓形的面積等於K。



因爲，如果弓形的面積不等於 K，它必須是大於或是小於。

I. 假設弓形的面積大於 K。

如果我們分別在由 PQ，Pq 所截的弓形中，作與弓形同底等高的內接三角形，亦即此兩三角形與兩弓形有相同的頂點 R, r，如果我們在剩餘的弓形中，以相同的方式內接三角形，如此一直繼續，直到剩下的弓形面積之和小於弓形面積與 K 之差。

剩下弓形＝弓形－多邊形<弓形－K

所以，如此形成的多邊形必須大於面積 K，這是不可能的，因爲[命題 23]

$A+B+C+\ldots+Z<\frac{4}{3}A$，其中，$A=\triangle PQq$

$B=\triangle PRQ+\triangle Prq=1/4\ \triangle PQq$

所以，弓形的面積不可能大於 K。

II. 假設，如果可能，弓形的面積小於 K。

則如果 $\triangle PQq=A$，$B=\frac{1}{4}A$，$C=\frac{1}{4}B$，如此下去，直到我們得到一個面積 X，使得 X 小於 K 與弓形面積的差。我們可以得到，

$$A+B+C+\ldots+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}A=K$$

現在，因爲 K 超過 A+B+C+…+X 一個小於 X 的面積，且超過弓形的面積一個大於 X 的面積，

$K-(A+B+C+\ldots+X)<X$，

$K-$弓形面積$>X$

所以，$A+B+C+\ldots+X>$（弓形面積）

因爲命題 22[2]，這是不可能的。因此，弓形的面積不小於K。

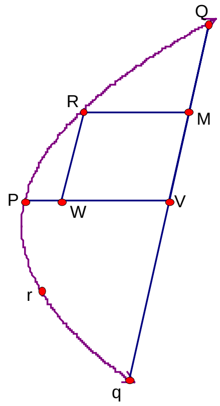
所以，因爲弓形的面積不大於也不小於 K，所以

(弓形 PQq 的面積)$=K=\frac{4}{3}\triangle PQq$

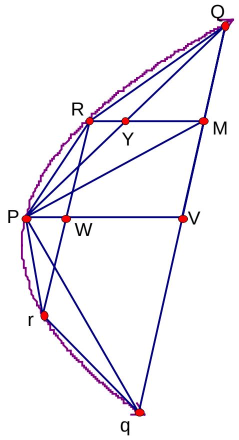
註：

1. 若 Qq 爲拋物線弓形的一底，且 V 爲 Qq 的中點，如果過 V 的直徑交曲線於 P，則 P 稱爲此弓形的頂點。
2. 命題 22 爲如果有一序列的面積 A, B, C, D,…，每一個是下一個的 4 倍，且如果最大的那一個，A，等於內接於拋物線弓形 PQq 的三角形 PQq，且與弓形同底等高，則 (A+B+C+D+…)<(弓形 PQq 的面積)。

問題：



1. 將命題 23 的 $A+B+C+...+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$ 寫成等比級數公式的形式。
2. 如右圖，如果 Qq 是被直徑 PV 平分於 V 的拋物線的弦，直徑 RM 於 M 點平分 QV，RM 是從 R 到 PV 的縱（坐）標，證明：PV＝$\frac{4}{3}$RM。（命題 19）
3. 證明：如果任一拋物線弓形的底為 Qq，頂點為 P，R 是由 PQ 所截得的弓形的頂點，則 $\triangle PQq=8\triangle PRQ$ 。(命題 21)



五、實施與建議

此份學習單重點在於證明過程，所以以講述的方式實施，讓學生覺得跟平時上課的內容較為接近，再以提問的方式，讓學生回答學習單中的問題。在「曲線下的面積」這一單元上課之前實施，時間為兩節課。然後再完整上完「曲線下的面積」這一單元後，讓學生作一回饋問卷，以評估學生在此份學習單的學習成效。回饋問卷的問題如下：

「曲線面積學習單」回饋問卷

1. 你覺得這幾張「曲線面積學習單」對你學習「2-5 曲線下的面積」單元時，有沒有幫助？
   □ 有（請續達第二題）　　□ 沒有（請寫上原因）
2. 你覺得是在哪一方面對你的學習有幫助？（可以複選）
   □ 學習動機　□「如何求曲線下面積」的觀念更清楚　□「積分」的觀念更清楚
   □ 證明方法的了解　□ 中西文化的差異　□ 歷史故事、趣聞
   □ 考試成績的提升　□ 數學能力的提升

回收問卷 63 份，只有 3 份填上沒有幫助，原因為聽不懂、考試不會考。其餘皆認為有幫助，其中「學習動機」佔 35%，「「如何求曲線下面積」的觀念更清楚」佔 49%，「「積分」的觀念更清楚」佔 35%，「證明方法的了解」佔 58%，「中西文化的差異」佔 60%，「歷史故事、趣聞」佔 67%，「數學能力的提升」佔 25%，其中只有一位同學填「考試能力提升」。

或許這次回饋問卷的設計並不理想，畢竟是以「引導」的方式，讓學生選擇選項。因為我覺得以前開放式的讓學生回答覺得有哪些幫助時，學生的回答通常只有一點，但是學生「學習」、獲得的部分卻應該是多元的，所以我才以選擇的方式讓學生自己勾選，或許以後會有更好的問卷設計方式吧。在學生的回饋中，可以發現「歷史故事、趣聞」仍佔多數，想要以有趣的方式，將人類文化中的數學創作融入到數學教材中，這似乎是不可避免的。總之，此份學習單內容雖然不多，但從學生的回饋來看，似乎已經達到當初設計的目標了。

註解：

1. 參考錢寶琮《中國數學史》。
2. 參考鄒大海，〈《墨經》中的無限思想〉。
3. 此張學習單括號中的式子爲解釋劉徽文字的內容。

參考文獻

Calinger, R. ed. (1995). *Classics of Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Heath, T.L. ed. (2002). *The Works of Archimedes*. N. Y: Dover Publications.

李文林主編 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。

錢寶琮 (1932/1998).《中國算學史》(上篇)，收錄於《李儼錢寶琮科學史全集》第一冊。瀋陽：遼寧教育出版社。

錢寶琮主編 (1992).《中國數學史》，北京：科學出版社。

郭書春 (1995).《中國古代數學泰斗劉徽》，台北：明文書局。

鄒大海 (1992).〈《墨經》中的無限思想〉。

蘇俊鴻 (1999).〈兩個證明的比較〉，《HPM 通訊》第二卷第十二期。

HPM 網站大公開：*convergence*

http://convergence.mathdl.org/convergence/

台師大數學系碩士班研究生　張復凱

不論是教數學的老師或是學數學的學生，常常環繞腦中而困擾不已的問題，就是「爲什麼要學數學？」及「學數學有什麼用？」面對這類的問題，數學史的價值與意義便自然地浮現—從歷史觀點看這些數學知識的來由、發展經過及未來展望。

這種利用數學史貼近脈絡、還原「真相」來協助教學的趨勢，不僅在國內逐漸受到重視，在國外也有同樣的情況。像是美國數學協會(The Mathematical Association of America, MAA)及美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)便時常舉辦相關活動。最近，這兩個協會在考慮了數學史於教學上使用的便利需求後，合作創刊 *convergence* 這個線上雜誌。

convergence 的編輯爲 Victor Katz 和 Frank Swetz，他們對此網站的預設讀者爲美國 9~14

年級的數學教師，而收錄的文章則主要涵蓋下列幾類：

- 有教學價值的數學史評論。
- 課堂經驗分享。
- 可供課堂上使用的數學論證。
- 有益於數學探索及理解的數學成果之翻譯或評論。
- 歷史脈絡下的問題探討。
- 書籍、網站及其他相關素材的介紹及評論。

綜觀整個網站，大致上有幾個部分：

1. 新書介紹及評論(critics corner)：目前共介紹了 11 本書供讀者參考。
2. 古代數學問題(problem from another time…)：提供了 48 個古代數學問題，讓教師們可以從中挑選適合的問題於課堂上使用。
3. 文章收錄(featured articles)：這應該是此網站的主軸。目前刊出了四篇文章，分別是：Frank Swetz 所寫的”Using Problems from the History of Mathematics”、Robert E. Bradley 所寫的”Euler’s Analysis of the Genoese Lottery”、Florence Fasanelli, Graham Jagger 和 Bea Lumpkin 所寫的”Benjamin Banneker’s Trigonometry Puzzle”以及 C. Edward Sandifer 所寫的”Van Schooten’s Rule Constructions”。在每篇文章（包括上述第 1 點的 11 篇評論）的結尾處，編者特別設立了一個給予讀者回饋的空間，讓大家看完文章後可以藉由這個回饋天地一方面看看其他人的心得及感想，一方面發表自己的想法。
4. 歷史上的今天(on this day)：除了提供數學界在歷史上今天所發生的 事情外，也可藉由網頁上的搜尋引擎來看看其他日子裡的「大代誌」。不過或許是因為這還是個新網站，所以，還有很多日子的數學界大事尚未被收錄。
5. 行事曆(calendar)：介紹最近數學界的重大活動。
6. 今日名言(today’s quotation)：除了網頁上隨機出現的名言外，還可進一步利用數學家姓名的頭一個字母索引出曾說過的名言。在長時間閱讀網頁而感到疲憊的時候，瞄一下「今日名言」，就好像和古代數學家閒聊人生般，趣味十足！

另外，首頁附有搜尋引擎(show me)一欄，可從種類、科目及關鍵字來查詢想要的資訊。而種類分為全部（all categories）、文章（article, 即上述第 3 點）、評論（review, 即上述第 1 點）、問題（problem, 即上述第 2 點）及課堂教學建議（classroom suggestion）。其中，「課堂教學建議」看來是對第一線的數學老師最有助益的部分。不過，可惜的是，目前尚未收錄任何文章。大家若著想到這裡挖寶，看來可要再等一陣子囉！

整體看來，這個網站的線上雜誌架構應已俱全，但內容則因時間因素而尚有不足。不過，以 Katz 過去在 HPM Newsletter 擔任主編的經驗，我想未來應會很有發展，值得大家拭目以待。

最後，要提醒大家，網站目前因為有美國科學基金會(National Science Foundation)的資助，所以是免費的。一旦資助停止，就可能要使用者付費。所以，大家可要快來「撿便宜」哦！

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、蘇意雯、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻、陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 葉吉海（內壢國中） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪（竹北高中） 洪正川（新竹高商）
苗栗縣：陳冠良（致民國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（大里高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
台南縣：謝三寶（新化高中） 李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中） 楊瓊茹（三民高中實習）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）