HPM通訊

第七卷 第二、三期合刊 目錄（2004年3月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台灣師大數學系所）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（成功高中） 林旻志（北縣錦和中學） 陳啓文（中山女高）彭良禎（北市麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

訪港紀要

台師大數學系 洪萬生教授

三月十一日我應香港教育學院 (Hong Kong Institute of Education) 之邀，參加由該校數學系在三月十三日所主辦的『2004 中學數學教學研討會』，並發表〈HPM 與數學教師的專業發展〉。又趁此行之便，我也一併訪問香港大學，於三月十二日上午，擔任該校數學系研究生呂嘉蕙 (Lui Ka Wai) 的副博士學位 (MPhil) 的校外口試委員 (External Examiner)。

這一次我有機會訪問香港，必須特別感謝鄭振初 (Litwin Chun Chor Cheng) 教授的邀請，他與同事林淑華 (Lam Suk Wah Louisa) 主任的熱情接待，讓我有賓至如歸之感。我在三月十一日傍晚抵港，振初來接機，並幫我安頓在學人招待所，那是面積約有五十坪大的公寓房間，依山的建築，視野非常遼闊，讓人流連忘返。當晚，我還讓振初破費，請吃了一頓非常豐盛的晚餐，兩人天南地北，閒聊得十分開心。

隔天（三月十二日）一早，振初送我到香港大學，『負責』把我交給蕭文強 (Siu Man Keung) 教授（目前擔任數學系主任），因為呂嘉蕙小姐正是他指導的研究生。口試以英文進行（港大以英文授課），由化學系一位楊教授擔任主席，數學系吳端偉 (T. W. Ng) 教授擔任校內口試委員 (External Examiner)，蕭文強也以指導教授身份列席，花了將近兩個小時，終於完成了口試。呂嘉蕙的論文題目是： “The Study on Conic Sections and on Prime Numbers in China: Cultural Influence on the Development, Application and Transmission of Mathematics”，表現頗有自信，她準備到加拿大深造。中餐由文強兄作東請客，振初與吳端偉教授作陪，席間文強兄提及他明年五月退休後的數學普及寫作計畫，令人不無感慨，蓋系主任常感受到學校當局對於同仁學術研究的高度期待，似乎是導致他提早申請退休的主要原因。其實他看來是蠻喜歡教書的，可是，類似台灣學界的『追求卓越』之呼聲，總是讓壯年數學家倍感壓力。港大數學系目前有 15 位教授，每年招收大學生 30 人，但是，研究生主要來自中國大陸，已經有一點像美國的大學數學系了。不過，吳端偉這位年輕的數學家，對於現代數學史倒是頗有興趣，他曾就其研究方法論的問題，跟我做了短暫的討論。

三月十二日下午，振初陪我回到香港教育學院之後，我到該校圖書館查閱數學教育方面

的期刊，由於品類眾多（比本系更多），花了不少時間。後來，到學院附設書店購買目前暢銷中國的《往事並不如煙》（章詒和著），描寫共黨中國反右與文革時期，民盟一些領導人物的悲歡歲月，筆觸低調，手法白描，但是，近代中國民族的悲劇性格躍然紙上，讓我這樣一位歷史的『凝視者』也無法不『感同身受』！後來，在離港赴機場的計程車上，經振初介紹，認識了一位來自深圳參加研討會的老師，她頗驚訝我如何知道該書暢銷。不過，她又緊接著推薦我閱讀另一本暢銷書《中國農民日記》。

三月十三日上午，我如期到『研討會』會場，只見到振初與他的助理忙成一團（顯然此一研討會是由他負責承辦）。過去，這種研討會通常是由港府全額補助，但是，今年預算不足，承辦的教育學院只好向學員收費（港幣 50 圓，但有中餐三明治提供），不過，報名參加的中小學教師還是擠爆了會場，而且，也看不到有人打瞌睡。可見，在香港這種類似我們台灣的教師研習活動，是頗受歡迎的。

有關此一研討會的節目，其中除了王尚志教授（中國首都師範大學數學系）與我的演講是以普通話發表之外，其餘場次都使用粵語（香港教育學院上課使用粵語，想必一般的中小學亦然）。由於這兩場之外，都是平行的場次，所以，我只能選擇賴智強老師的〈數學≠記數〉與梁子傑老師的〈《幾何原本》淺釋〉聽講。儘管我無法聽懂粵語，但是，借助于投影片或 Power-point 的說明，我也能略知一二，這無疑是因爲這兩位老師報告的內容，都洋溢著 HPM 的精神，很容易心領神會。

另一方面，王尚志教授在他的講題『數學模型和中學數學教育』中，提到很多北京中小學生的建模科展，讓香港的中小學頗感興趣。究其原因，是香港目前中小學數學教學也很鼓勵學生作 project，這是香港教育局官員對我所作的解釋。我的演講排在最後一場，振初爲我擬定的題目是：『數學史和中學數學教育』，我實際散發的文稿，正如前述，則是以『HPM 與數學教師的專業發展』爲題。在演講時，我利用投影片對於 HPM 的相關論述與資源，作了一個簡要的說明。最後，在討論時，我也特別分享了我們台灣團隊的經驗，當然也不忘強調 HPM 的目的，是爲了提升數學的學習成效，而不是學習數學史，儘管基進地 (radically) 說，『數學』與『數學史』有時很難切割！

回想我在十二年前第一次赴港，是參加中文大學創校三十週年紀念研討會。後來，也曾赴港旅遊或參與科技史研討會，但都不如這一次印象深刻！在這一次的訪問中，有機會在港見到多年未晤的老朋友如振初、文強、馮振業與黃毅英，當然十分高興。不過，由於這一次有幸『貼近』香港同行（含中小學教師），分享他們（尤其是賴智強與梁子傑兩位）的珍貴教學經驗，對於香港教育學院在中小學教師專業發展上所作的努力，更是覺得與有榮焉。我希望將來有機會促成台港兩地數學教育同行的互訪，數學教育如何在一個成熟的公民社會中操作，我想香港的『香』可真是『香』呢，值得我們效法！

十九世紀美國數學的減法演進

國北師教學碩士班研究生/北縣明德高中 陳玉芬老師

雖然美國的歷史不到 300 年，但在各方面的成就卻一直執世界之牛耳，我想其部份原因，也許可導源於當初是來自英國的殖民地，所以，其民族性大都有著較爲民主，開放且能包容接納各種不同的觀點。當然，教育也不例外。由 Susan Ross 與 Mary Pratt-Cotter 所寫的 “Subtraction in the United States: An Historical Perspective”，就是從美國殖民地時代 (1607-1774) 爲起點，來探討十九世紀美國數學在減法中的演進。首先，作者先將美國最常使用的三種方法做了一個概略的介紹，然後，再依序年代詳述每一個演算法的變遷，一直到我們最熟悉的『標記數值符號』,最後，再給職前教師在教法上的一些省思。以下內容，則是筆者依其文意，將它改寫整理如下，藉此來和大家一同分享。

一．美國的減法演進中，最常使用的三種減法運算法，如下列。

1. 分解演算法 (the decomposition method)

這是三種方法中最常使用也最佔優勢的一種，也是目前美國所使用的演算法。即一般所謂的『借位法』(the borrowing method)，事實上，『借位法』這樣的專有名詞用在這個方法中，似乎有些不恰當，因爲『借』總是有『還』的意義，而在這個方法中『還』的動作較不明顯．現在先以下面的例子說明．

表 1 分解演算法例

53-18=?
53 = 5 個 10 + 3 個 1
18 = 1 個 10 + 8 個 1
因爲 3 不夠減 8,所以從十位數中的 5 取出 1 加入個位數的 3 裡面。得下式
53 = 4 個 10 + 13 個 1
18 = 1 個 10 + 8 個 1
53 – 18 = 3 個 10+5 個 1=35

2. 等量加法演算法 (the equal additions)

等量加法演算法應追溯到 15 世紀到 16 世紀 (Johnson,1938)，又稱爲『借位及回報法』(the borrow and repay method)，其實在這個演算法中，用『借位』應該是更爲貼切，因爲當被減數因不夠減而要向前一位借 10 時，那麼就要『還』一個 10 在其所對應的減數上。以表 2 的例子來說，當 10 加到被減數 4 時，也要加 10 到減數的 7 上 (也就是加相同的量到二個數，將不會影響二數彼此的差，即等量加法公理之意)。

表 2　等量加法演算法例

6354	“14 減 8 得 6”
2978	“15 減 8 得 7”
	“13 減 10 得 3”
3376	“6 減 3 得 3”

3. 澳地利演算法 (Austrian algorithm)

也是一種熟悉的加法演算法，因爲這樣的演算法將使得對加，減法之間的連結更加清晰，因爲它的連結是透過找出所『欠缺不明』的加數，而不是著重在二數的差．以下表 3 爲例：它是在強調 7 要加多少才得到 13？9 要加多少才得到 14？

表 3 澳地利演算法例一

243	7 加 6 等於 13
-87	9 加 5 等於 14
156	1 加 1 等於 2

表 4　澳地利演算法例二

94275	2 加 3 是 5;9 加 8 是 17;將進位的 1 加
67493	到 4 使之變成 5，5 加 7 是 12；將進
26782	位的 1 加到 7 變 8，8 加 6 是 14；再
	將進位的 1 加到 6 變 7；7 加 2 是 9

在表 4 中，很明顯的也是一種澳洲演算法，只是它將底線畫於第一列的數字下，其主要目的也就是在強調加法的逆運算．而右邊文字則是從第二列開始的說明。

二．在美國的減法演進

減法的演進，對美國來說，在 1940 年後的變化就比較小。現在，先來看看 1800 年至 1900 年這期間的變化是如何？

1. 從 1819 年的教科書的說明，我們可以看出在這個時期是使用『等量加法演算法』，以下是它的使用規則：

(1) 將較小的數放在較大的數的下面，同時個位數對齊個位數，十位數對齊十位數，以此類推。

(2) 從右邊開始，而且將上面的數減去下面的數並寫下它的差。

(3) 如果在下面的數大於上面的數，則用 10 減去下面的數，並將差加到上面所對應的數，然後寫下它的和。

(4) 當下面的數被 10 減去之後，那麼必須在該數的前一位數加 1。

2. 1836 年左右，在一份私人收集的手稿中，我們也可看到教師所使用的教法仍是『等量加法演算法』，在手稿中可看出並未對學生說明爲何這方法要如此操作或爲何使用這方法就會得到這二數的差。學生只是被給予這些規則，並給予多種的題目做演練（手稿內容如下）：

將較小的數放在較大數的下方同時個位數對齊個位數，十位數對齊十位數並畫一條底線在二數下面，從右邊開始計算，而且下面的每一位數都用上面所對應的每一位數來減並寫下餘數，如果下面的數大於上面的數，那麼加 10 到上面的數，同時進 1 位到下面數的前一位數，以此類推直到所有的數都完成．證明方法就是將餘數與較小的數相加如果相

加的和等於較大的數就表示此操作正確。

3. 在這時期有二種重要的演算法

(1) 藉由誘導與分析的練習演算法 (Practical Arithmetic by Induction and Analysis Ray, 1857) 這是完全有別於之前的規則演算法，因爲它首先將每一個題目表格化，同時給予註解以說明減法的過程與原理。從表 5 中也可清楚知道這時期已演變至『分解演算法』。

表 5

73 45 28	在這裡,個位數 3 不夠給個位數的 5 來減,所以向十位數的 7 取 1 個 10 然後加至個位數的 3 中(也可視爲加入 10 個 1).變成 13 後減去 5,剩 8,並將 8 放在差的個位數的位置上
十 個 6 13 4 5 2 8	因爲 1 個 10 是從十位數的 7 中取出, 所以在十位數的位置上只剩下 6,然後將 6 減去相對應的 4,並將餘數 2 放在十位數位置的最下一列.這二數的差就是 2 個 10 及 8 個 1 或是 28

要補充說明的是，『分解法演算法』雖然是這個時期教科書中的重點，但在教科書中也會藉由例子來說明『等量加法演算法』的過程，也就是說在這個時期，他們是允許學生使用二種方法，更有趣的，是利用心算來求解是被鼓勵的。

(2) 標準演算法 (Standard Arithmetic, Milne, 1895)：這是當時的一本教科書，我們從書中的規則可以知道它是在介紹『分解演算法』，也就是說到了這個時期，已從『等量加法演算法』改變到『分解演算法』，而在這本教科書中，它的規則設定如下：

「減數放在被減數之下，同時個位數對齊個位數，十位數對齊十位數，以此類推，從右邊開始，減數中的每一位數與所對應的每一位被減數來相減並在下面寫下結果，如果被減數的數值比對應減數的數值小，那麼被減數就加 10 再減，然後再將被減數的前一位數字消去１，再依照前法相減。」至於證明的方法，就是將餘數與減數相加，如果結果等於被減數，這操作就正確。同時，在這本書中，它將 0 分開處理，以下就是 9000-7685 的說明：「因爲個位數的 0 不夠減 5，而且十位數, 百位數都沒有數值,因此須將 1000 轉化成 10 個百，而剩下 8000，1 百又轉化成 10 個十，而剩下 90，1 個十又轉化成 10 個一，因此 9000 可表示成 8 千 9 百 9 十又 10 個一，然後與減數 7685 相減。」

4. 有操作說明而無符號標記的時期

從早期一直到 1900 年的中期，這段期間，所有教科書裡面的例子都是利用這三種不同演算法的組合來教減法．同時我們也注意到在這期間，例子的說明並沒有做任何的標記或將數字重寫，學生只能用心算，然後將算出來的差呈現出來，也就是整個書寫的過程中只看到答案的說明，看不到解題思考的過程，以下就是這樣例子的說明

表 6

723 487 236	因爲 3 不夠減 7，所以必須從十位數的 2 借 1 位數加到個位數上，變成個位數的 13 減個位數的 7 得個位數的 6，因爲十位數的 1 不夠減十位數的 8，所以必須從百位數的 7 借 1 位數加到十位數，變成十位數的 11 減十位數的 8 得十位數的 3，因爲百位數的 7 被用去 1 所以剩下 6，所以百位數的 6 減百位數的 4 得百位數的 2．因此，最後的差是 236

5. 重大改變的年代

1937 年 William A. Brownell 有了重大的研究結果，他認爲在演算法中應找出一個『輔助說明』(crutch)，這樣對解決減法問題是有幫助的，而這『輔助說明』包含了數字的標記，或是保持一個被借走後數量軌跡的追蹤。以下，也是利用『分解演算法』再做數字的標記以及命名活動 (renaming process) 的追蹤。

(所謂的命名活動就是指 1 千等價於 10 個 1 百或 1 百等價於 10 個十等等)

表 7

7 86 39 47	兒童可以被允許在 8 的上方標記 7 以方便保持借位的痕跡，同時也可取代整個問題須記憶的過程

Brownell 同時也指出，學生在學習借位減法的初期階段，這樣的標記方式是很有用的；緊接著，這樣的方式也就流行起來了，如下表 8。而這時期大部分的教科書也都還是利用『分解演算法』來說明減法借位的過程。雖然一些教科書也是會呈現其他方式的減法演算法，但『分解演算法』仍可算是主要的教法在當時期的美國。

表 8

百	十	個	
5	14	12	
6	5	2	被減數
-4	8	6	減數
1	6	6	差

表 9

1 個 10=10 個 1

			11
6 13	6 12	6 12	7 $\cancel{1}$ 14
$\cancel{7}\cancel{3}$	$9\cancel{7}\cancel{2}$	$\cancel{7}\cancel{2}8$	$\cancel{8}\cancel{2}\cancel{4}$
- 2 8	- 4 6 4	-5 8 6	- 3 5 7
4 5	5 0 8	1 4 2	4 6 7

儘管這樣標記的方式開始盛行，但是在使用上仍有許多的爭議，有的爭議指出：這樣的學習對學生而言是不利的，因爲學生沒有被要求要記憶過程，而且操作似乎太容易，學生不會有真正的學習，且學生只會使用標記，卻不瞭解其真正的減法程序．但十分有趣的是這方法卻非常迅速地流行在所有的教科書中,而等量加法演算法與澳洲演算法也就消失．以下表 9~表 12 就是當時『分解演算法』的說明。

表 10

十　個	百　十　個	千 百 十 個	
3 15 ~~4~~ ~~5~~ — 2 8 1 7	6 13 ~~7~~ ~~3~~ 6 — 2 9 3 4 4 3	3 122 122 ~~4~~ ~~3~~ ~~2~~ 9 —2 6 8 4 1 6 4 5	6 9 14 ~~7~~ ~~0~~ ~~4~~ — 3 7 8 3 2 6

表 11

步驟 1	步驟 2	步驟 3	步驟 4	步驟 5	步驟 6
6 3 4 —3 7 8	2 6 ~~3~~ 4 —3 7 8 34=20+14	2 14 6 ~~3~~ 4 —3 7 8 6 14 – 8 = 6	5 12 ~~6~~ ~~3~~ 4 —3 7 8 6 620=500+120	5 12 ~~6~~ ~~3~~ 4 —3 7 8 5 6 120 - 70=50	5 12 ~~6~~ ~~3~~ 4 —3 7 8 2 5 6 500-300=200

表 12

	格式		理由
4,325 —2,498	步驟 1 重新命名 一個拾=十個壹 減法	1 15 4, 3 ~~2~~ ~~5~~ — 2, 4 9 8 7	10 15 4,000 + 300 + ~~20~~ + ~~5~~ — 2,000 + 400 + 90 + 8 7
	步驟 2 重新命名 一百=十個拾 減法	11 2 ~~1~~ 15 4, ~~3~~ ~~2~~ ~~5~~ — 2, 4 9 8 2 7	110 200 ~~10~~ 15 4,000 + ~~300~~ + ~~20~~ + ~~5~~ — 2,000 + 400 + 90 + 8 20 + 7
	步驟 3 重新命名 一百=十個拾 減法	12 11 3 ~~2~~ ~~1~~ 15 ~~4~~, ~~3~~ ~~2~~ ~~5~~ — 2, 4 9 8 8 2 7	1,200 110 3,000 ~~200~~ ~~10~~ 15 ~~4,000~~ + ~~300~~ + ~~20~~ + ~~5~~ — 2,000 + 400 + 90 + 8 800 +20 + 7
	步驟 4 重新命名 一百=十個拾 減法	12 11 3 ~~2~~ ~~1~~ 15 ~~4~~, ~~3~~ ~~2~~ ~~5~~ — 2, 4 9 8 1 8 2 7	1,200 110 ~~3,000~~ ~~200~~ ~~10~~ 15 ~~4,000~~ + ~~300~~ + ~~20~~ + 5 — 2,000 + 400 + 90 + 8 1,000 + 800 + 20 + 7

三． 百家爭鳴

在 1900 年的早期, 數學教育家在小學基礎教育的減法演算法之間有些爭議。

1. 有許多的研究指出想要試著找出究竟何種演算法較好，但始終無法做出決定；紐約教育局在 1913 年、舊金山教育局在 1919 年二者都指示使用奧地利法來教減法，然後這樣的指示並非有效，因爲很多教師仍持續使用其他的方法，也有研究指出在紐約市大約只有 1/3 的學童使用教育局所指示的版本.。

2. 其他的研究也指出，在 1914 年，Brownell 的『輔助教法』出現之前，一位英格蘭實驗家 P. B. Ballard 探索這三種方法之後指出：他覺得『等量加法演算法』是優於『分解演算法』(Osburn, 1927)；同樣地，1918 年，W. W. McClelland 比較這『等量加法與分解法』，並做如下的結論：

> 『等量加法演算法』在初學狀態時，不論是以速度或正確性而言都是較優於『分解演算法』的，但是，若以長期的練習之後來比較，『分解演算法』的速 度則優於『等量加法演算法』。

3. Johnson (1938) 的研究指出：『分解演算法』並沒有比其他的演算法來得成功。

4. 也有在 Brownell 的『輔助教法』出現之前的研究指出：『分解演算法』的使用率是『等量加法演算法』的 2.5 倍。

由以上的資料顯示，在當時的專家眼中，確實也無法決定出何者或何時使用何種的演算法是最適當的，因此對究竟該選擇何種的演算法來教學，就變成是教師專業素養很重要的一環了．而下列也對於職前教育應有的省思也有所提醒。

四．職前教師對於減法應有的態度

在 Morton (1927) 所著的一本關於職前教師教育的教科書中，有討論這三種演算法的優缺點．但並沒有主張哪一種的演算法較好，他指出他個人則傾向於『分解演算法』。並建議未來的教師應以開放的態度來衡量這三種的演算法。同時期，在另一方面，Stone (1925) 則強烈支持『等量加法演算法』。一直到了 1930 年，Clark, Otis, and Hatton (1939)則認爲前面所述的二種方法是很類似的。接著在 *Teaching Arithmetic for Understanding* (Marks, Purdy, & Kinney, 1958) 一書中，則是都有教『分解演算法』及『等量加法演算法』，並讓學生知道『分解演算法』是較常使用的方法，但強調二種方法是都必須要了解的。

簡要地來說，在 Eicholz 等人 (1964) 所發行的方法書中，他們並未提到『等量加法演算法』，反而詳細描述『分解演算法』與 Brownell 的『輔助教法』。

到了 1960 年，『學校數學研究團隊』爲低年級出版了教科書系列，而重點是在於位值上的『標記數字』(place value) ，即在使用『輔助說明』時所標記的數字。而所運算的數字則是寫成等價的表達方式（如：437=4 個『一百』+ 3 個『十』 + 7 個『一』)，以便於說明減法的程序與演算法。同時，在教減法之前應要完成數字等價的表達方式。而這樣的教法自然也會縮短很多在使用『輔助說明』時的速度，但強調教師除了應注意『標記數字』的動作之外，對於單位換算本質上的一些變化也是很重要的。

從殖民地時期開始，演算法與描述減法的語言都已有所改變，而其中最大的變動，就是

在 20 世紀 Brownell 的『輔助教法』出現之後，到了今天，在新的版本中對於『分解演算法』已有非常完整的定義，相對於其他的方法則幾乎很少使用了。

五．改寫後記

知識總是隨著人們使用的頻率呈正比地保存或不斷地去蕪存菁，任何一種方法都有其相對的優點與缺點，而這些相對的優點與缺點也許會因爲時代的背景，民族的特性，或地理的環境而有所改變。所以，教師所要做的應是在各種的方法中，分析出最適當的教學方法 (也許是單一的方式，也許是綜合的方式)。而由上面三種數學減法的演進，我們不難歸納出一些原因與結論。

『分解演算法』，強調的是『重新命名』的過程，而這樣的命名過程中，學童是可以藉由教師利用具體物的操做而達到解題的目的。這也正是它可以保存下來或是盛行的主因，因爲它能具體地被接受。而『等量加法演算法』之所以也能有一段時間的盛行，是因爲在概念上，它是一種加法的操作，然後再延伸至大數減小數，這對學童而言都只是舊經驗的複習；而『奧地利演算法』對於低年級的學童而言，在心像上的建立似乎有其難以轉彎之處，因爲它的操作近似於補數的運算，所以也顯得格外地抽象。

再反觀我們國內所使用的減法方法，根據國小數學教材分析（82 年版，91 年）小學二年級二位數減法過程步驟：先由『數數』以確定數字的量；然後藉由『命名活動』了解數的等價關係；最後以直式格式進行解題策略。這也正是美國至今所使用的『分解演算法』，而這原因則是源自於十九世紀中葉以後，隨著外國傳教士來華後，近代西方數學知識也開始被介紹到中國 (李佳嬅，2003)，然後再輾轉到了台灣，歷史似乎又這樣地延續下來了。

參考資料

Susan Ross, Mary Pratt-Cotter, “Subtraction in the United States: An Historical Perspective”, *TME* 10(2). http://jwilson.coe.edu/DEPT/TME/Issues/v10n2/5ross.html

李佳嬅 (2003).〈十九世紀西洋數學在東亞傳播　摘要〉,《HPM 通訊》第六卷第十期。

臺灣省國民學校教師研習會 (2002). 《國小數學教材分析－整數的數概念與加減運算》。

以下爲 Ross 與 Pratt-Cotter “Subtraction in the United States: An Historical Perspective” 一文所引用的參考資料：

Brownell, W. A. (1939). *Learning as reorganization: An experimental study in third-grade arithmetic.* Durham, NC: Duke University Press.

Brownell, W. A., & Moser, H. E. (1949). *Meaningful vs. mechanical learning: A study in grade III subtraction*. Durham NC: Duke University Press.

Buswell, G. T., Brownell, W. A., & John, L. (1947). *Living arithmetic: Grade seven*. Atlanta, GA: Ginn and Company.

Buswell, G.T., Brownell, W.A., & Sauble, I. (1963). *Arithmetic we need.* Atlanta, GA: Ginn and Co.

Clark, J. R., Otis, A. S., & Hatton, C. (1939). *Primary arithmetic through experience*. New York: World Book

Eicholz, R. E., O’Daffer, P. G., Brumfiel, C. F., & Shanks, M. E. (1964). *Elementary school mathematics*. Reading, MA: Addison, Wesley.

Eicholz, R. E., O’Daffer, P. G., & Fleenor, C. R. (1981). *Mathematics in our world*. Reading, MA: Addison, Wesley.

Johnson, J. T. (1938). *The relative merits of three methods of subtraction: An experimental comparison of the decomposition method of subtraction with the equal additions method and the Austrian method.* New York City: Bureau of publications, Teachers College, Columbia University.

Katz, V. J. (1993). *History of Mathematics: An introduction*. New York: Harper Collins.

Marks, J. L., Purdy, C. R., & Kinney, L. B. (1958). *Teaching arithmetic for understanding*. New York: McGraw-Hill.

Milne, W. J. (1895). *Standard Arithmetic*. New York: American Book Co.

Morton, R. L. (1927). *Teaching Arithmetic in the Primary grades*. New York: Silver, Burdett and Co.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Osburn, W. J. (1927). How shall we subtract? *Journal of Educational Research*, 16, 237-246.

Ray, J. (1857). *Practical arithmetic by induction and analysis*. Cincinnati: Wilson, Hinkle, & Co.

Stone, J. C. (1925). *How to teach primary number: A course of study and a manual for teachers*. New York: Benj. H. Sanborn & Co.

Vogeli, B. R., LeBlanc, J. F., Scott, J. L., Grimsley, E. E., Barnhart, T. E., & McKillip, W. B. (1981). *Mathematics for mastery*. Atlanta, GA: Silver Burdett.

Wentworth, G., & Smith, D. E. (1902). *Arithmetic, book one*. Atlanta, GA: Ginn and Co.

Wentworth, G., & Smith, D. E. (1915). *Essentials of arithmetic*. Atlanta: Ginn and Co.

Wheat, H. G., & Heard, I. M. (1959). *Row-Peterson arithmetic book seven*. Row, Peterson, and Co.

Willetts, J. (1819). *The scholar’s arithmetic designed for the use of schools in the United States* (3rd ed.). Poughkeepsie, NY: Paraclete Potter.

Wilson, G. M. (1934). “For 100 percent subtraction, what method? A new approach”, *Journal of Educational Research*, 27, 503-508.

Mathematics Episode

阿基米德牛群問題(The Cattle-Problem)

西松高中　蘇惠玉老師

這個問題是這樣的：

要求一群牛中，各種顏色的公牛和母牛數。這一群牛中，有白色、黑色、黃色和雜色四種，每種都有公牛與母牛，設 W, w 分別是白色公牛與白色母牛的個數；B, b 分別是黑色公牛與黑色母牛的個數；Y, y 分別是黃色公牛與黃色母牛的個數；D, d 分別是雜色公牛與雜色母牛的個數，分別滿足

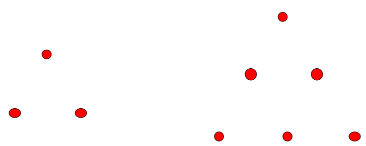
第一部份：

(1) $W=(1/2+1/3)\ B+y$
(2) $B=(1/4+1/5)\ D+Y$
(3) $D=(1/6+1/7)\ W+Y$
(4) $w=(1/3+1/4)(B+b)$
(5) $b=(1/4+1/5)(D+d)$
(6) $d=(1/5+1/6)(Y+y)$
(7) $y=(1/6+1/7)(W+w)$

第二部份：

(8) W+B 爲一平方數(a square)
(9) Y+D 爲一三角形數

上式(9)式中，所謂的三角形數即是若用小石子個數表示此數字，可將所有小石子排列成一正三角形，如下圖：



由圖形知，三角形數一定可以寫成$\dfrac{n(n+1)}{2}$，n 爲一自然數。

關於(8)式，根據 T. L. Heath 的說法，有不同的看法。(8)式的意思是說，當白色公牛混入黑色公牛群中，它們站立著排列成形，其寬與長是一樣的。但是，如果考慮這些公牛擠在一起形成一個方形，它們的個數就不可能是一個平方數，因爲牛的身長要比身寬大。所以，其中一個看法，是將「方」理解爲「方形數」，即兩正整數的乘積，而「平方數」的條件也能包含在內。

這個問題有 8 個未知數，卻有 9 個條件，所以，目的在找最小正整數解。1880 年時，德國數學家昂紹爾(Amthor)給出這個問題的解。他先由(1)~(7)個式子，經過加減消去法解出

$W=2\cdot3\cdot7\cdot53\cdot4657n$　　$w=2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot23\cdot373n$
$B=2\cdot3^2\cdot89\cdot4657n$　　$b=2\cdot3^2\cdot17\cdot15991n$

$Y=3^4 \cdot 11 \cdot 4657n$ $\quad$ $y=3^2 \cdot 13 \cdot 46489n$

$D=2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657n$ $\quad$ $d=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 761n$

若令 n＝1，即爲滿足第一部份的最小正整數解。最後，再代入第二部份的條件，此時對(8)式他分別討論了方形數與平方數的解，若 W+B 爲一平方數時，經由大量的計算，最後他寫出 W=1598 $\boxed{206541}$，這裡的 $\boxed{206541}$ 表示還有 206541 個數目字在後面，牛群的總數他解出爲 7766 $\boxed{206541}$。

在 85 年後，多了 40 位數字被算出，但是，直到 1965 年，加拿大 Waterloo 大學的數學家，H. C. Williams, R. A. German 和 C. R. Zarnke 利用 IBM7040 電腦經過 7 個半小時的強力運算，才完整的給出解法。不幸的是，沒有人記得保留列印出來的結果。到 1981 年，經由 Cray-1 電腦 10 分鐘的運算，第二次解決問題，這一次數學家們記得將結果出版了！經過了 2000 年，阿基米德會有什麼樣的想法？

這個問題出現在 Lessing 在 1773 年匯編的諷刺詩中。根據諷刺詩開頭的文字，這個問題似乎是阿基米德以諷刺詩的形式寄給當時亞歷山卓時期的數學家 Eratosthenes（就是量地球週長的那一個）。而在 *Scholia*（類似 Math Review，針對古典著作）對柏拉圖的 *Charmides* 165E 的一份參考資料中，稱這個問題「called by Archimedes The Cattle-problem」，但阿基米德是否真的有提出這個問題？或只是將名字冠於前以示其超難度，尚有爭論。最後史學家調查的結果顯示，根據諷刺詩現存的形式，幾乎不可能出自阿基米德之手，但是很有可能源自於阿基米德。有一種說法認爲，因爲阿波羅尼斯曾計算出比阿基米德更爲接近的 π 的近似值，因此，阿基米德必須計算出比《圓的測量(Measurement of a circle)》中所包含的更困難的乘法，所以，阿基米德有可能提出一道問題，此問題涉及了極大數的乘法，且困難到即使阿波羅尼斯也不能完全解出。

這個諷刺詩開頭幾句是這樣的：

Compute the number of the oxen of the Sun, giving thy mind thereto, if thou hast a share of wisdom.

假如你想成為智者，就把你的心智用到這裡，計算一下太陽中公牛的數目。

在第一部份與第二部份的過渡中間，稱能解出第一部份的人爲

not unknowing nor unskilled in numbers, but still not yet to be numbered among the wise.

對於數字算不得無知，也算不上無技巧，但仍是不能算作明智之人。

根據 Heath 的說法，有人懷疑阿基米德是否解決了這個問題。畢竟這麼困難及巨額的數目，必須利用電腦的幫助才容易得出完整的答案，昂紹爾也指出，一個人即使花費了相當大的心力與時間計算後，要想寫出他的結果，必須要用到 82 張半的紙，若要寫出 8 個未知量，則要用到 660 頁。這在當時，成本也太高了吧！

參考文獻

Devlin(2004), ‘The Archimedes Cattle Problem’ in Devlin’ Angle of MAA online.

Heath, T. L. edited (2002), The Works of Archimedes, N. Y.: Dover Publications, Inc.

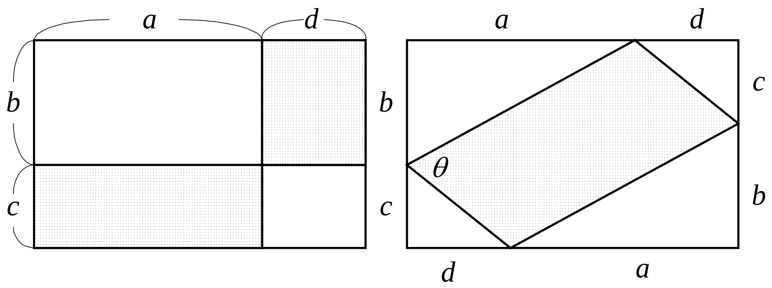
一位高中女生的數學才氣

台師大學數學系 洪萬生教授

最近一兩年，本系同仁對於大學生的基本素質與學習能力屢有微詞，大家多少會歸咎到中學的實際教學效果，譬如教材與評量偏向簡易，或者是大學的窄門放寬啦等等。然而，有一種情況，卻是大家不太願意面對的，那就是選讀數學系的學生素質普遍降低了。這麼說來，有數學能力的學生哪裡去了呢？

這個答案需要有人去作一點追蹤調查，我不想在此作沒有數據的猜測。不過，我想在此舉一個實例，說明有數學才氣的高中學生可能還是比比偕是，只是我們不知道如何吸引她們來唸數學系罷了。

任教於中山女中的陳啓文老師，曾經在向該校同事介紹『圖說一體、不證自明』(proof without words) 一類的例子，有一位負責資優班的老師相當好奇，特別引進他自己的班級，結果他班上有一位學生竟然發明了「柯西不等式」的一個『圖說一體』證明（如下圖），讓老師們讚嘆有加！



$$ac+bd=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(\sqrt{c^2+d^2}\right)\sin\theta$$

$$(ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

我看了以後，也是佩服得五體投地，因爲我光是看懂她的構想，也花了不少時間！於是，特別請啓文對那一位學生作一個訪談，譬如她是怎麼想出的？又總共花了多少時間呢？啓文轉述說：這一位學生提及她的靈感來自『畢氏定理』的弦圖證明，而且總共只花了一個多小時去拼湊圖形，可見她有相當深刻的圖形洞察力，非常值得模仿與學習。

最後，我建議啓文幫她投稿到 MAA 所發行的 *The Mathematical Magazine*，以饗全世界愛好數學的讀者。

新書櫥窗

數學史與數學文化研究的一個有價值的著作

曲阜師範大學數學與計算科學系 陸書環教授

書名：《傳統文化與數學機械化》
作者：傅海倫
出版社：北京科學出版社
出版日期：2003 年 7 月
ISBN (國際書號)：7-03-011397-7
平裝、196 頁
定價：16 元人民幣

《傳統文化與數學機械化》，於 2003 年 7 月由科學出版社出版。本書由數學史家郭書春作序、山東師範大學傅海倫教授所著，是傳統文化與數學史相結合研究的力作。本書沿著中國數學家吳文俊院士開創的數學機械化道路，在對機械化、數學機械化及其特徵初步分析的基礎上，從傳統文化的角度，運用數學史的內史與外史相結合的研究方法，全面、系統地闡述中國數學機械化的思想，探討數學機械化思想的產生、發展過程和現代進展，並在對傳統文化、思維方式剖析的基礎上，詳細論述了傳統文化與數學機械化的關係，對中西數學文化進行了比較研究。郭書春對於《傳統文化與數學機械化》中給出了高度評價。他在序言中指出：「《傳統文化與數學機械化》出版，是一件有益的事」，「這既是一部有創建的學術著作，又是適宜於中等以上文化程度的人們學習中國數學史知識的有益讀物。」

書中的主要觀點和成果有：

1、注重了數學機械化思想發展的全面考察分析。

本書在對機械化、數學機械化及其特徵初步分析的基礎上，從中外數學發展史的角度探討了數學機械化思想的產生和發展過程。本書認爲：數學機械化思想來源於中國古算，其產生和發展經歷了笛卡兒、萊布尼茲等數學家、哲學家的思想奠基，到希爾伯特定理機器證明機械化思想在理論上的明確提出，再到定理的機器證明等幾個重要的發展階段。數學機械化過程反映出計算和證明這兩種基本的數學方法的統一趨勢。根植于中國傳統數學的吳文俊機械化定理的創立，爲數學機械化奠定了堅實的基礎。

2、注重了對中國傳統數學演算法機械化的發展研究。

本書對中國傳統數學機械化思想的基礎進行了深入探討，重點分析了中國傳統數學機械化的『硬體系統』和『軟體系統』。書中認爲，算籌及其在此基礎上發展起來的珠算，是數學機械化的物質基礎，優越的十進位置制記數法和計算工具爲之提供了得天獨厚的條件。制定演算法是數學的根本，變換技術和改進演算法是數學機械化的核心內容。本書重點討論和系統分析中國傳統數學機械化的演算法程式，包括《九章算術》與劉徽注中的數學機械化思想，賈憲、秦九韶、李冶、朱世傑等在演算法程式機械化方面的貢獻。文章試圖將傳統演算法程

式在充分尊重原『術』文、原注文的前提下進行系統化的工作，並提出一些自己的看法。對典型的程式，編制出現代電腦語言，這其中主要有：約分術的 BASIC 語言程式、一般比例演算法程式框圖、割圓術中求圓周率程式框圖、線性方程組解法的電腦程式設計及運作、一般高次方程組的解法程式框圖、大衍求一術、大衍總數術的 ALGOL60 語言。文章還對秦九韶求定數『化約』法提出自己的觀點，並對此在前人的基礎上進行改進，編成 FORTRAN 現代電腦語言，完全實現在電腦上的操作運行。本書給出 100 維的陣列的程式語言設計，包括對秦氏原題計算結果的驗證。文章還以 RMI 方法認識盈不足及其演算法，以『位置化代數』的觀點重新看待李冶的工作，以『有向化方法』對朱世傑的『四元術』進行了新的解釋。對此，郭書春評價指出：「本書在前人工作的基礎上比較全面系統地探討了中國傳統數學框架的確立、數學理論的奠基、籌算數學的高潮等三個階段的數學機械化思想的特點，對一些典型的一直在世界上領先的計算程式做了深入分析，揭示了它們的演算法結構，編制了現代電腦語言，有許多創建性見解。」

3、注重與中國傳統文化、思維方式的結合的研究

本書試圖從傳統文化、思維方式的角度探討中國傳統數學機械化思想。作者認爲對中國傳統數學機械化思想的分析和研究，必須在傳統思想和文化的大環境下進行，離不開對籌算體系的思維方式的剖析。本書分析了儒家『經世致用』思想對傳統數學機械化產生的影響，重點討論了籌算體系下，位置思維方式、構造性思維方式以及傳統數學機械化思想的關係問題。本書從計算工具、符號系統、結構形式、推理模式、哲學思想和方法等方面探討了《周易》與傳統數學機械化思想的淵源關係。剖析了《周易》筮法中的機械化程式及其影響，並討論了《周易》對傳統數學機械化的文化啓示。

本書還是探討齊魯文化與數學機械化的關係的嘗試。書中以源遠流長的齊魯文化爲重要的社會文化背景，著重分析了齊魯文化的特點及其對數學機械化的影響，論述了以劉徽爲代表的齊魯地區的中國古代數學家對數學機械化的特殊貢獻。從齊魯地區是早期的『學術思想最爲活躍的學術研究中心』，到齊魯地區是『清談、辯難之風的中心之一』，再到『漢末魏晉齊魯數學中心』，深入探討了劉徽成長的思想文化背景及其科學價值觀、方法論，提出了齊魯文化造就了數學家劉徽的觀點。這對進一步揭示齊魯文化與數學機械化的關係，具有重要意義。

4、關注了中西數學文化的比較

本書從中西古代數學文化的差異，比較分析了中國傳統數學機械化的思想及其形成原因。作者認爲形成中西傳統數學的兩種傾向：邏輯演繹傾向和機械化演算法傾向，其作用與構造差異，主要是由文化系統賦予的文化層次及其價值取向的差異造成的，它們都是歷史的必然。在中國文化系統發展過程中，取得輝煌成就的演算法機械化的數學，應該在沒有西方數學價值觀念偏見的古代數學理論評價體系中，得到客觀、公正的評價。對此，郭書春評論說：「本書從數學文化的角度分析了中西分別形成演繹邏輯傾向與機械化演算法傾向的原因，在中國數學史研究中別開生面」。

總之，本書體現了中國數學機械化思想與傳統文化相結合的研究成果，對挖掘傳統思想文化的研究，對推動數學機械化的發展，都具有十分重要的意義。此外，本書還對中國古代演算法的教育價值進行了挖掘、整理和提升，對指導當前的數學教育具有重要的參考價值。

本書可作爲數學文化研究和數學史學習的一個有價值的著作，也是數學史教育教學的一個重要的參考讀本。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhy@mail.topspeed.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhy@mail.topspeed.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、蘇意雯、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻、陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 葉吉海（內壢國中） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪（竹北高中） 洪正川（新竹高商）
苗栗縣：陳冠良（致民國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（大里高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
台南縣：謝三寶（新化高中） 李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中） 楊瓊茹（三民高中實習）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）