

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台師大數學系）
 助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）黃清揚（北縣福和國中）
 葉吉海（新竹高中）陳彥宏（成功高中）陳啓文（中山女高）
 王文珮（桃縣青溪國中）黃哲男（台南師院附中）英家銘（台師大數學系）
 謝佳勸（台師大數學系）蔡寶桂（新竹縣網路資源中心）
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 數學、哲學與美學的交會
- 八卦萊布尼茲
- 參加2004年『清大科學史研習營』心得
- 新書評論與介紹：
Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?
 書評：《圓的歷史：數學推理與物理世界》

數學、哲學與美學的交會

台師大數學系 洪萬生教授

希臘數學史大師 Thomas L. Heath (1861-1940) 去世後，他的太太在書房找到一本整理好的文稿，後來出版就成為 *Mathematics in Aristotle* 一書。哲學家亞里斯多德 (Aristotle) 的著作中，關聯了數學知識的相關論述，這的確是希臘數學史的一個非常獨特的風格，因為在此一文化脈絡中，我們很容易將數學與某個哲學家作連結，在其他文明如中國，這就有一點困難了。譬如說吧，如果我們將數學與孔子聯想在一起，很多人都會覺得不可思議，從而更難理解『孔子與數學』如何成為一個有意義的主題了。

不過，孔子代表的儒家如何參與中國先秦的數學知識活動，不是本文題旨，我們在此只想討論柏拉圖的數學哲學與拉斐爾 (Raphael) 的名畫『雅典學派』 (School of Athens)。

拉斐爾固文藝復興時期的一代大師也！然則他的繪畫又與柏拉圖 (Plato) 有何關係呢？其實，只要稍微注意一下，我們就會發現：『雅典學派』這一幅畫中的主角人物柏拉圖與亞里斯多德的手勢完全不同。其中柏拉圖的右手食指朝向天空，大有不食人間煙火之慨，亞里斯多德則右手向前平伸，一副眾生平等的姿態！這種對比的張力，當然反映了藝術家的創作風格，然而，這兩個手勢的確『意有所指』，值得我們從希臘數學發展中的數學與哲學之關係來分疏！

當然，這兩位大師之辨認，除了根據長相—譬如柏拉圖是位長者，所以，頭髮較少！—來判斷之外，我們也可以徵之於他們師徒左手各自所拿書籍：柏拉圖抱住的就是 *Timaeus*，至於亞里斯多德，則是抓住 *Ethics* 的書背！前者是柏拉圖的一部探討宇宙生成論 (cosmogony) 的對話錄（難怪他手指向天），後者則是亞里斯多德的名著—《倫理學》（難怪他強調眾生平等）。

有關亞里斯多德的部分，可以參考拙文 (1999)。在此，我們則主要針對拉斐爾的這一幅名畫，來說明柏拉圖如何處理數學與哲學之間的關係。請先看我們的如下引文：

... this knowledge of the kind [i.e., mathematics] for which we are seeking, having a double use, military and philosophical; for the man of war must learn the art of number or he will not

know how to array his troops, and the philosopher also, because he has to rise out of the sea of change and lay hold of true being, and therefore he must be an arithmetician.

...

Then this is a kind of knowledge which legislation may fitly prescribe; and we must endeavour to persuade those who are to be the principal men of our State to go and learn arithmetic, not as amateurs, but they must carry on the study until they see the nature of numbers with the mind only; nor again, like merchants or retail-traders, with a view to buying or selling, but for the sake of their military use, and of the soul herself; and because this will be the easiest way for her to pass from becoming to truth and being.

...

I mean, as I was saying, that arithmetic has a very great and elevating effect, compelling the soul to reason about abstract number, and rebelling against the introduction of visible or tangible objects into the arguments. [Plato: *The Republic* Book VII]

在此我們不打算翻譯這三段文字，不過，爲了閱讀方便，我們應該解釋幾個關鍵詞。首先，所謂“sea of change”或“becoming”是指變化無常的『苦海』（比喻『現實世界』），“true being”是『真實存有』（指涉永恆不變的世界，柏拉圖將他稱爲『理想世界』（ideal world）），也是『真理』（truth）存在的處所。至於 arithmetic 是指『數論』而非今日之小學算術，因此，“arithmetician”是指數論家或數學家。還有，“soul”可譯成爲『靈魂』或『心靈』，對柏拉圖來說，靈魂不滅，從而得以輪迴轉世。這些主張在他的《米諾》（*Meno*）中有極清楚的論述，請參考陳昭蓉（1999, 2000）。

無論如何，對於柏拉圖來說，數學的訓練是幫助我們的靈魂從『現實世界』（becoming）提升到『理想世界』（being）的不二法門，這是因爲它可以逼迫靈魂推論抽象的數目，同時抗拒看得到、摸得到的東西之介入我們的論證。這可以更好地解釋何以柏拉圖在他的學院門口懸掛牌子，上面鐫刻“Let no one ignorant of geometry enter here.”。顯然，幾何學不只教導我們邏輯推理，更重要的是，它的訓練可以幫助我們的靈魂得以提升，從而國家或軍事領袖才能獲得必備的素養。

總之，從拉斐爾的這一幅名畫，我們不僅欣賞它所代表的文藝復興時期的藝術風格，也可以神游在數學、哲學與美學的交會之中。看來藝術家所以能成爲藝術家，不僅他的雙手靈巧之外，也需要有非常多方面的素養，否則他與一個畫匠又有何不同呢？

參考文獻

Heath, Thomas L. (1980). *Mathematics in Aristotle*. New York & London: Carland Publishing, INC.

Lloyd, Geoffrey E. R. (1973). *Greek Science after Aristotle*. New York / London: W. W. Norton & Company.

洪萬生 (1999). 〈HPM 隨筆（三）：數學哲學與數學史〉，《HPM 通訊》2(6): 1-5。

陳昭蓉 (1999). 〈柏拉圖《米諾》中的數學哲學對話〉（上），《HPM 通訊》2(12): 11-14。

陳昭蓉 (2000). 〈柏拉圖《米諾》中的數學哲學對話〉（下），《HPM 通訊》3(1): 4-6。



八卦萊布尼茲

台師大數學系 林倉億助教

筆者在大學求學時代，曾經看過一段文字（現已不記得是從哪裡看來的了），大意是萊布尼茲在與傳教士的通信中，得知中國《易經》之六十四卦象與他所提出之二進位制有所關聯後，十分興奮地回信給該傳教士，要該傳教士把二進位算法告訴當時的清朝皇帝康熙，因為萊布尼茲相信這可以促成康熙皇帝信奉基督教。大學畢業後，每當提到萊布尼茲，筆者總喜歡聊聊這段軼事，除了讓學生「欣賞」數學的「多重功能」外，也讓學生對人類的歷史，有了東、西方的連結。¹這段軼聞，就這麼一直被筆者當作是課堂中的八卦話題來穿插使用，直至最近看到了相關的資料，才引起筆者對這八卦話題的探究興趣。

萊布尼茲在 1697 年寫給奧古斯特公爵的信中，提及他對二進位制的研究發現，²該信的標題就訂為〈用 1 和 0 描寫所有數字的秘密，它們代表上帝從虛無中創造了萬物，或者說是創世的秘密，事物的本質如同數字〉。從這長長的標題，我們很清楚地明瞭，二進位制對萊布尼茲來說並不是單純的數學理論，而是被他賦予了神聖的宗教意欲，所以，萊布尼茲才會在信中告訴公爵：「數字可以當做反映神聖奇蹟的一面明鏡。」(von Collani, 2002, 頁 80) 萊布尼茲對二進位制的神聖熱情，在 1701 年傳到了當時在中國的傳教士白晉 (1656~1730)，他在寫給白晉的信中，建議白晉將二進位制及其算法呈獻給當時喜愛數學的清朝皇帝（也就是康熙皇帝），用以「展示上帝從虛無中的創造，展示通往基督教的道路。」(von Collani, 2002, 頁 80~81)

至此，筆者不禁對自己在課堂上的「誤人子弟」感到汗顏，因為萊布尼茲並非在得知中國的六十四卦象與二進位制的關聯後，才要白晉將二進位制告訴康熙皇帝，他之所以希望白晉那樣做，可說是純粹出自宗教情感上的考量。既然史實是如此，那為何筆者在大學求學時所看的資料會將萊布尼茲與六十四卦象扯在一起呢？為了避免重蹈一知半解的覆轍，筆者決意將此段歷史的來龍去脈徹底弄清楚，看看萊布尼茲與六十四卦象間到底有何瓜葛，而這就要從傳教士白晉說起了。

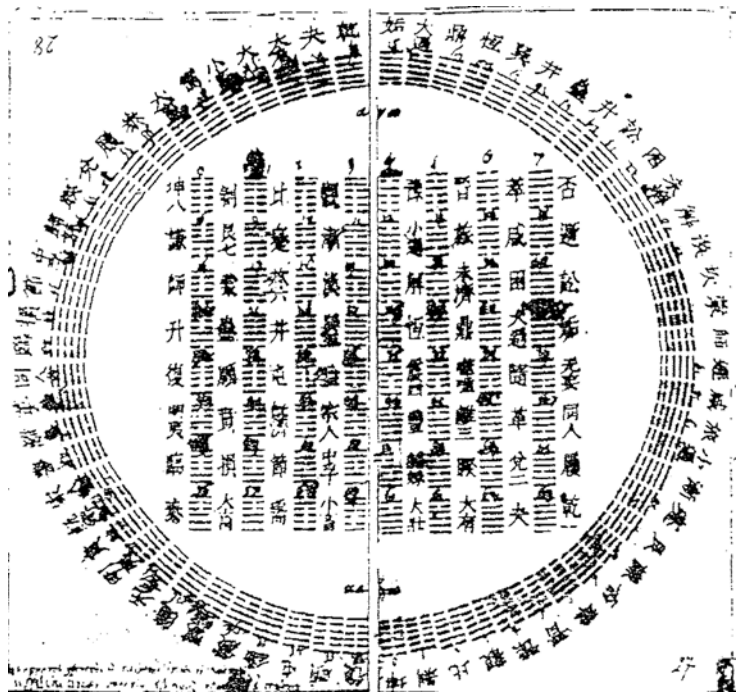
白晉，本名 Joachim Bouvet，是法國耶穌會的傳教士，1684 年被任命為法國皇家科學院的通訊院士。1688 年，白晉與另外四位傳教士以「國王數學家」（或稱「皇家數學家」）的身份抵達北京，旋即就因他精於數學，而被康熙留在朝廷內供職。隔年，白晉與幾位傳教士被康熙「諭以自後每日輪班，至養心殿，以清語授量法等西學」（李儼，1998，頁 450），自此而後，白晉與康熙之間的互動就更為頻繁，也更得康熙之信賴。1697 年，白晉奉康熙之命，攜帶圖書返回法國贈送給路易十四，並物色更多傳教士來華。這一趟返法之行，也開啓了萊布尼茲與白晉間的通信來往。

萊布尼茲在 1697 收到白晉寫的一封信，信的內容除了恭賀萊布尼茲《中國近事》一書的出版外，應該還包括了白晉在中國的作為及見聞，因為萊布尼茲在該年十二月給白晉的回信中，除了感謝白晉提供許多中國的現況，更嘉許白晉向康熙皇帝講授基督教教義及數學，因為這有助於基督教進入中國的皇帝及臣民的心中。我們並不清楚萊布尼茲在寫這封信的時候，對中國的數學了解至何種程度，但他在信中透露，雖然中國的數學在理論上遠遠不能與西方相比，但中國數學在經歷長期的累積與實際應用後，必定有歐洲所欠缺、需要的部分。

此後，白晉又分別在 1698 年 2 月與 1700 年 11 月寫信給萊布尼茲，雖然在這兩封信中有提到中國的《易經》，及其內容中的八卦圖與六十四卦象，但白晉對《易經》的討論是關於形而上學以及中國文字的研究上，而非將《易經》當作數學討論的對象。

雖然筆者並不知道白晉在 1698 年及 1700 年的信中，談論了多少八卦圖及六十四卦象，但可以確定的是，萊布尼茲並未見到六十四卦象，該圖（圖一）萊布尼茲直到 1703 年才見到。至於有無可能萊布尼茲從白晉的這兩封信中看出六十四卦象與二進位制間的關聯，筆者倒覺得此種可能性並不大，因為在 1701 年萊布尼茲向白晉介紹二進位制的信中，並未提到六十四卦象或八卦圖。假若萊布尼茲對六十四卦象與二進位制間的關聯有所猜測的話，他應當會要求白晉將六十四卦象圖寄給他才對。反倒是白晉在收到萊布尼茲介紹二進位制的信後，看出《易經》的卦象中含有二進位制，隨即在同年（1701 年）11 月 4 日將此結果寫信告訴萊布尼茲，並隨信附上六十四卦象圖（圖一）。白晉的這封信遲至 1703 年 4 月 1 日才送到萊布尼茲手上，萊布尼茲看到之後十分高興，因為白晉的發現除了可以讓萊布尼茲向法國皇家科學院證明二進位制的用處外，³更加確信透過二進位制與《易經》的關係，可以讓中國的皇帝與臣民信仰上帝。因此，萊布尼茲在該年 5 月 28 日致信白晉，要白晉將《易經》的真正意涵（即二進位制的神學意義）告訴康熙，藉此引導康熙信奉上帝。⁴萊布尼茲在後來的幾年中，陸續寄了幾封信給白晉，但白晉都沒有收到，相同地，萊布尼茲也都沒有收到白晉的信，所以，他們二人之間的通信，就這麼「糊里糊塗」的結束了。

上述大致就是萊布尼茲與白晉、二進位制與六十四卦象的牽連始末，雖然這之間沒什麼「數學大道理」，但在課堂上穿插使用，除可提振學生昏昏欲睡的精神外，還可讓學生增廣見聞，一舉兩得，何樂而不為！最後，容筆者再作一點提醒，站在數學教師的立場，二進位制與六十四卦象間的數學關聯當然是一個可以切入的點，但，就萊布尼茲來說，這兩者間的數學關係並非他真正關注的，萊布尼茲真正在意的是建立一套「通用符號」（或稱「通用字符」、「通用語言」），二進位制與六十四卦象間的關聯，只是萊布尼茲用來說明此種「通用符號」存在性的佐證罷了。⁵



圖一 此圖現藏於漢諾威皇家公共圖書館，轉引自李文潮等編《萊布尼茲與中國》第 327 頁。

附註

1. 不少學生很訝異萊布尼茲和康熙竟然是同時代的人，因為他們總覺得清朝就在民國之前，距今算蠻近的，而萊布尼茲應該是更早以前的人。
2. 萊布尼茲在 1679 年以前，就有關於二進位制的論文研究。
3. 萊布尼茲曾在 1701 年將二進位制的論文呈交給位於巴黎的法國皇家科學院，不料竟被科學院以「無法接受」回絕。
4. 萊布尼茲這封信並未送到白晉手中，也使得白晉以為他於 1701 年所寄的信及「六十四卦象」圖並未送到萊布尼茲收中。
5. 關於萊布尼茲「通用字符」的理想，可參閱《萊布尼茲與中國》的第三章「《易經》與通用符號」。

參考資料

- Von Collani, Claudia (2002). 〈萊布尼茲與耶穌會在中國的傳教活動〉，收入李文潮等編，《萊布尼茲與中國》（北京：科學出版社），頁 75~89。
- 李儼 (1998). 《中國數學史大綱(下)》，收入杜石然、郭書春、劉鈍主編，《李儼、錢寶琮科學史全集》第三卷（瀋陽：遼寧教育出版社），頁 315~620。
- 郝劉祥 (2002). 〈萊布尼茲的通用字符理想〉，收入李文潮等編，《萊布尼茲與中國》（北京：科學出版社），頁 150~168。
- 陳樂民 (2002). 〈萊布尼茲和“儒學”〉，收入李文潮等編，《萊布尼茲與中國》（北京：科學出版社），頁 169~175。
- 韓琦 (1991). 《康熙時代傳入的西方數學及其對中國數學的影響》，北京：中國科學院自然科學史研究所博士論文。
- 韓琦 (1998). 〈白晉的《易經》研究和康熙時代的「西學中源」說〉，《漢學研究》第 16 卷第 1 期，頁 185~200。

數學之演化

在歷史上，有些遇到無法解決難題的數學家會悄悄使用非正規的方法。因此，他們不再受限於一樣的規則，而使用令人困擾但有效的方法。後繼的數學家會拓展數學領域來涵括這些新方法。...

沒有『純粹的符號』這回事。寫下『不可能』就是將其納入控制，敢於懷疑其是否存在。這樣的新想法只要不質疑既有的東西即已被正名為錯的事物，總是會被接納的。

數學革命不會摧毀原有的世界，而會建立一個能包含原本世界的新世界。(摘自丹尼斯·居耶德 (Denis Guedj)，《鸚鵡定理》，台北：究竟出版社，2003)

參加 2004 年『清大科學史研習營』心得

台中市西苑高中 阮錫琦老師

一、緣起

教育部第一期第二梯次提升大學基礎教育計劃，委託國立清華大學通識教育中心主辦『大專院校教師人文及社會史研習營』，簡稱『科學史研習營』，其活動目標為：(1) 瞭解歷史思考中科學發展之關鍵課題，並深入分析；(2) 擴大學員知識之廣度與深度；(3) 推動國內跨領域的思想史與科學史之新課題；(4) 廣化與深度化國內大學院校史學與科學通識教育之教學。換言之，就是希望通過科學，如何在不同時代的「文化」中會有不同之發展，來培養學員對「科學發展」進行「歷史思考」。誠如黃一農院長所言：「作學問四跨：(1) 研究要跨學科；(2) 思考要跨時空；(3) 學術要跨國界；(4) 關懷要跨社會」。的確，這次活動中緊扣著歷史研究之中科學史的某些關鍵性議題，邀請科學史界的世界級大師，透過上課、閱讀與討論，深入探討「歷史思考」、「科學發展」與其「文化因素」三者關係，令與會的所有學員，感受深刻且收穫良多。

二、與會成員

此次研習活動相當精彩充實，會中邀請多位國內外著名的學者，例如：洪萬生教授、黃一農教授、徐光台教授、Dr. Kenneth L. Taylor、金永植教授 (Yung Sik Kim)、王道環教授，以及陳恒安教授等等，講授課程。而參加的研習活動的學員更臥虎藏龍，有來自各大專院校各領域的精英，譬如國立海軍官校通識教育中心主任呂維理教授、台北市立師範學院社教系所簡後聰教授、國立勤益技術學院通識教育中心主任劉柏宏副教授、國立台南師院自然科學教育系蔣佳玲助理教授、和春技術學院張濤副教授，以及各著名大學博士生齊聚一堂，以科學史發展為議題，彼此討論課程內容，交換心得，更是提供學員在教學與學術研究上之寬廣度。誠然，此一研習活動的主要目的，就是為了提升大學史學與從事通識教育的教師，對於科學在歷史文化中發展之教學與學術能力，以期改善大學通識教育課程的水準。質言之，此一研習營所產生的效益，將大幅提升從事通識教育的教師的「科學史」本職學能，進而，對於台灣未來的科學發展是一股巨大的助力。

三、課程主題

此一研習營最令筆者難忘就是在 8/25、8/26 兩天強烈颱風來襲，全台停止上班上學（包括清大），但是，本研習營的全體人員不畏風雨全程參與，求知的精神尤其令人感動，同時，也更凸顯了此一活動的重要性與吸引力，令學員們捨不得缺席。最重要的是，博識通俗的課程內容、主講者精采演出與主辦單位（清大通識教育中心）精心規劃，更是構成此研習營成功的元素。

此次研習的課程，係以既有的中西科學史及其相關學術研究成果作為基礎，主要從「古代中西科學」、「中世紀主導文化下科學」、「西方近代科學革命」、「明清之際中西科技的遭遇」、「從地球理論到達爾文革命」與「為甚麼中國沒有科學革命？」作為研習的主題，來研析中西不同時代與文明中，中西科學會有甚麼不同之發展，使得此一課程在當今科技時代，具有特殊歷史教育與通識教育的特色與意義。

菜色要色、香、味俱全，端賴廚師的巧手，同理，課程內容要精闢動人，需要大師開講，

而首先登場的，就是徐光台教授（本計畫主持人）與洪萬生教授（本計畫協同主持人）的第一講：『古代中西科學』，講題是「亞里斯多德的自然哲學、數學、天文學與星占」，而揭開了知性的「科學史之旅」的序幕，爾後，全部課程安排如下表一所示。值得一提的是，課程活動當中，由於主講者與學員互動良好，在討論時間常常會有欲罷不能的感覺。

四、科技史重點資料中心

除了上述卓越的課程之外，清大史研所最引以為傲的，就是堪稱亞洲地區科技史藏書、期刊與文獻最豐富的圖書館，就在清大人文社會學院的圖書分館中的「科技史重點資料中心」，該中心提供了完善的網路借書服務以及館際與校際合作，甚至連社會人士也可以輕鬆借書以及查詢所需的資料，網站是：<http://www.lib.nthu.edu.tw/STS>。

最令人驚訝的是，該中心擁有與英國倫敦大學同步收藏的「東方跟西方的交會」、「工業革命」的整套微捲，此外，與科技史相關的文獻的微捲數量亦相當龐大。館中甚至還有一整套仿文淵閣的四庫全書。幸有黃一農院長親自帶領大家，導覽館區，其解說內容鉅細靡遺、如數家珍，令人猶如置身浩瀚的學海之中，俯拾皆學問。寬敞閱讀空間、巨大的書庫與大量藏書數目，真是令人印象深刻。

五、期待再相逢

此次研習活動中，除了學識的增長之外，個人覺得最大的收穫，就是能夠有機會與世界級的「科學史」大師對話並且欣賞其學術風采。雖然學術價值是無價的，但是，無庸置疑的是，要舉辦此類優質的國際科學史研習營，的確是所費不貲，教育部編列巨額預算，來實施提升大學基礎教育計畫，此一作為值得肯定，同時，筆者自我期許，經由此次研習活動中，能夠牽引自己往科學史的進路，持續前進，將來能夠為國家社會盡一份心力。此外，我更是殷切期盼教育部能夠永續經營「科學史」研習活動，帶動更多教師參與，當然，最重要是，筆者希望明年能夠再次參與此類有意義的研習活動。

六、謹謝

最後，非常感謝同窗好友敏皓，向徐光台教授強力推薦，才能獲得徐光台教授親電邀請，筆者有幸參與此研習營活動，不勝感激。

「科學史研習營」課程表

八月二十三日（一）			
時間	主題	講題	主講人
14:40-16:10	古代中西科學	亞里斯多德的自然哲學、數學、天文學與星占	洪萬生教授、徐光台教授
16:10-17:40		參觀人社院科技史資料中心	黃一農教授
八月二十四日（二）			
08:30-10:00	古代中西科學	中國古代的天文曆法	黃一農教授
10:00-12:00	中世紀主導文化下科學	儒學與科學	金永植教授
13:30-15:00	中世紀主導文化下科學	神學與科學（兼論大學的崛起）	徐光台教授
15:30-17:00	中世紀主導文化下科學	朱熹論科學	金永植教授
八月二十五日（三）			
08:30-10:00	西方近代科學革命	近代世界觀的改變	洪萬生教授、徐光台教授
10:00-12:00	西方近代科學革命	實驗哲學的崛起	陳恆安教授
13:30-15:00	西方近代科學革命	牛頓、牛頓式科學與啓蒙運動	Dr. Kenneth L. Taylor
15:30-17:00	明清之際中西科技的遭遇	明末清初中西傳統的遭遇	洪萬生教授、徐光台教授
八月二十六日（四）			
08:30-10:00	明清之際中西科技的遭遇	火砲、數學與技術	黃一農教授
10:00-12:00	從地球理論到達爾文革命	世界的時間：地球理論與地質學的興起	Dr. Kenneth L. Taylor
13:30-15:00	爲甚麼中國沒有科學革命？	關於「爲甚麼中國沒有科學革命？」問題	金永植教授
15:30-17:00	從地球理論到達爾文革命	達爾文《物種源始》的地質學背景	Dr. Kenneth L. Taylor
八月二十七日（五）			
08:30-10:00	從地球理論到達爾文革命	達爾文革命	陳恆安教授

台師大數學系 英家銘助教

在二十一世紀初的台灣，我們做到了過去四個世紀以來不曾出現的教育普及。然而，就我們所觀察到的現象來說，整個社會展現出的熱情，並非是對「知識」，而是「學位」。至於原因，筆者的猜測是，整個台灣社會不曾真正體認知識的價值。科普叢書的作者與譯者，就是因為堅信科學與數學知識的價值，並且感受到傳播知識的急迫性，才會不斷寫作或翻譯科普叢書。誠如李國偉博士所言，科普的工作需要長期堅持，而且需要傳福音的精神。《HPM 通訊》的發行人與編輯群，就是希望在這個新世紀的科普運動中，為台灣社會盡一點微薄的力量，介紹好的科普叢書，希望可以提升大眾 – 特別是中小學教師 – 對科學與數學知識價值的體認。

本專欄在未來會不定期評論或介紹中文、英文與日文的科普數學叢書。其中英文的出版品主要是出版在美國，評論的內容是來自「美國數學協會」(*The Mathematical Association of America*, 簡稱 MAA) 網頁上的新書評論，或是本刊所邀請的國內外學者，或本刊編輯群。以下為本期的新書介紹與評論。

書名：Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?

作者：Sherman Stein

出版：MAA，1999 年

出版資料：155 頁，定價 24.95 美元

ISBN：0-88385-718-9

在許多人的心目中，阿基米德可能是人類歷史上最偉大的數學家之一，但是，您知道他到底幹過哪些好事嗎？我們從小聽過的故事可能不完全是真的。他可能沒說過要用槓桿舉起地球，可能沒有光著屁股喊「Eureka！」可能他也不曾因為斥責羅馬士兵探到他畫的圓而惹來殺身之禍。

當然，這些流傳已久的故事可以用來引起學生學習的動機，增加學習的趣味。但是若是您身為一名教師，特別是數學、科學或歷史的教師，我想您可能希望去了解阿基米德之所以偉大的真正原因。關於阿基米德，最經典的學術論著是英國學者 Thomas Heath 的著作，但若您沒時間，這本 Stein 的書可能是不錯的選擇。

阿基米德有十多本著作被保留傳到後世。在本書中，Stein 解釋為何我們長說的那些故事不大可信。大部分的篇幅中作者盡量地以貼近阿基米德本身論述的手法來介紹阿基米德在數學上的貢獻。

四到五章是關於他的《方法》一書。第四章詳盡地記載那記錄這個著作的羊皮紙如何在二十世紀初的君士坦丁堡戲劇化地被發現，以及同樣戲劇化地在 1998 年的拍賣場重出江湖。第五章則是說明羊皮紙上阿基米德的方法是如何地與近代微積分相似。

第六和七章敘述阿基米德關於拋物線的工作，十一章則是關於求 π 的進似值。

總體來說，這是一本數學份量頗重的書，適合對數學有重口味或對古希臘數學史有興趣

的讀者。

附註一：本篇推介改寫自 MAA 線上書評專欄 “Read This” 中 Ed Sandifer 的文章。

附註二：本書有中文譯本：《阿基米德幹了什麼好事！》(陳可崗翻譯)，台北：天下文化出版，2004 年。

延伸數學性的思考力

在數學的學習中，重要的是必須在基礎訓練之後，能夠以簡單明瞭的形式描劃出訓練數學的感覺、提高思考力後可達到什麼樣的作用。

這是個激烈變動的時代，我們必須具備應付狀況的能力，那就是要有『準確觀察事物』、並且『洞察本質為何』的能力。這種能力也就是數學性的思考力。數學從初階開始就一面進行『抽象化』，一面訓練出這種能力。(摘自岡部恆治，《訓練數學思考能力的數學書》，台北究竟出版社，2003)

書評：《圓的歷史：數學推理與物理世界》

台師大數學系碩士班研究生 張復凱

書名：圓的歷史：數學推理與物理世界(譯自 A History of the Circle: Mathematical Reasoning and the Physical Universe)

作者：澤布羅夫斯基(Ernest Zebrowski, Jr.)

譯者：李大強

出版地：北京，北京理工大學出版社

出版日期：2003年8月

頁數：219頁

定價：16元(人民幣)

ISBN：7-5640-0148-8

炎炎夏日，大家常常會到海邊吹吹風、玩玩水，同時也順便欣賞波濤洶湧或是浪花朵朵的美麗海景。就在同樣的情境下，本書作者澤布羅夫斯基卻有了不同於一般人的體會。在他眼中出現的，不僅是這些海浪的壯觀，更看到了「圓」。他認為，「所有這些現象可以用數學方程式描述—至少可以近似地描述。歸根結底，這些方程式立足於關於圓的幾何知識。」另外，作者亦指出，若是讀者想和他一樣看到這些圓的存在，便得要足夠用「心」。筆者希望也能以同樣的精神，用「心」瞧瞧本書的內容。

首先，在序中，作者開章明義地指出《圓的歷史》並非一部一般認知下的歷史著作，而是藉由圓，來展現本書的副標—數學推理和物理世界。於是，綜觀全書，我們將發現「小」到探討原子的第十一章，「大」到探討宇宙的第十二章，全都是在物理和數學間「振動」(這是本書第九章)。那麼「歷史」呢？如果歷史不是本書的重點，那又為何書名是《圓的「歷史」》呢？這又與大海有著「小小的」關聯。作者在「處於海濱，雙足浸沒於水中」時，明白了我們所擁有的知識都是歷史的一部分，也正如同歌德所言：「一門科學的歷史就是該門科學本身。」所以說，書名中「歷史」二字，是採用最廣義的方式來解讀。因此，若是讀者把此書當作一本典型的數學史來閱讀，或是聚焦於「 π 的歷史」，可能會因只在第一章「探索圓周率」中找到熟悉的圓周率歷史，而「怒斥」文不對題。

在了解了本書的旨意後，讓筆者帶大家逐章看看本書的內容。

第一章：「探索圓周率」。從計算圓周率 π 的歷史中，看到了由測量估算、多邊形逼近、到數學式計算的演進。若是以物理世界和數學推理的雙重角度俯視時，則會發現整個過程從永不精確的測量估算，在數學推理下逐漸「昇華」。這些物理世界的圓也就在圓周率 π 的「穿針引線」下，與「真實」的圓緊密連結—當周長和直徑的比值越接近 π ，也就越接近「真實」的圓。

第二章：「滾筒、輪子和軸承」。圓最實際和直接的運用，是作為一種運輸工具的形體。像是古埃及金字塔的建造過程中，便極有可能利用改良的圓形滾筒搬運建材。至於今日交通工具中的輪子，雖然很早就被發明，但因固定輪軸的軸承無法承受使用時的磨擦力，所以直到技術進步，做出了夠「圓」的軸承後，輪子或風車等工具才得以順利使用。另外，在垂直

運輸方面，我們所熟知的動滑輪、定滑輪，也都因圓形的結構，產生更省力、更便利的效果。

第三章：「星空中的時鐘」。從地球觀察天空，可以發現一大堆運行軌跡近似於圓形的星球，其中又以太陽和月亮與人類生活最為密切。人們利用這兩個星球的運行周期，定出了日和月的時間長短，再因應各個文化而制訂出所需的曆法。

第四章：「數學與物理世界」。公元五百多年前，畢達哥拉斯在觀察到和諧音調的琴弦長度與分數的關聯，以及在其他數學與物理世界相關的事證下，產生了「整個宇宙的本質在於數字模式」的基本信仰。狂熱的信仰下，畢氏學派堅信大自然及所有宇宙真理—甚至像是美或正義等—都可還原為數目。事實上，現實生活中，像是計數、測量乃至於幾何，一方面符合了畢氏學派的信仰，另一方面也表露出這種極端信仰的缺陷。

計數看似純正無誤，但因為牽涉到邊界、定義和分類，所以無法達到「完全真實」，這說明了「脫離經驗背景的數字是無意義的」。至於測量，我們知道無法完全精準，所以「脫離實際測量的純推理的過分迷信也很容易把我們引入歧途」。那麼幾何呢？如作者所言，歐氏幾何以理想化的抽象模型用於自然對象時，「頻繁地發現模型與對象相符，當然也同樣頻繁地發現模型與對象不相符」。於是，探索物理世界的歷程中，將不斷受限於觀察及數學原理的不精確。然而，也因掌握了這些不確定，數學原理依舊能適當地使用。

第五章：「探索地球」。探索地球時，可以發現一些特殊的圓。像是在觀察日照時，可以找到赤道、北迴歸線、南迴歸線、北極圈和南極圈這幾個特殊的圓。當進一步想藉此作為地理定位時，在無法全靠日照判斷的情況下，人們只好自立自強，利用相對的時間計算出所在的經度，並藉由經、緯度解決了定位的問題。有趣的是，討論經、緯線時，都是將地球視為完美的球體，但當我們從所處的生活環境觀察時，山峰和深谷的壯麗卻足以「斷定地球不可能是一個完美的球體」。

第六章：「平面與空間」。本章主要在探討面積與體積的性質和關聯。從測量、計算圓面積的過程中，除了引出了「化圓為方」這個大問題外，也因直徑平方和面積成正比，而出現了水管口徑與排水量和披薩尺寸與實際大小的有趣問題。至於表面積和體積的部分，則因球體的特殊地位—固定體積下表面積最小，所以生活中要做出一定容量的容器時，圓和球的使用最能節省材料。另外，作者特別提到《格列佛遊記》中的一段故事，並利用所討論的面積和體積的關係，說明故事中的不合理。

第七章：「天球」。公元前三百多年，天文學家歐多克斯提出地心說。這樣的天體運行理論，在亞里斯多德的支持下，成為了當時天文學的主流。而整個地心說的發展，更在托勒密提出本輪的概念時，達到了最高峰。至於地動說，從公元前四百多年的阿納克薩哥拉提出後，一直要到哥白尼的出現，才又再度「復活」。加上開普勒利用第谷的觀測資料所提出的三大定律，便大致形成了今日我們所認定的天球運作關係。

第八章：「從圓錐曲線到引力」。公元兩百多年前，阿波羅尼斯(Apollonius of Perga)描述了橢圓、拋物線、雙曲線這些圓錐曲線。不過，當時尚未把這些圓錐曲線與物理世界聯結。後來，伽利略發現彈道是拋物線，開普勒發現行星軌道是橢圓，至於雙曲線，則直到牛頓的時代，才與自然法則有所聯結。這些圓錐曲線與物理現象的結合，是善用解析幾何的成果。藉著代數和幾何的連結，以及各種坐標系的靈活運用，使相關研究得以順利進行。像是牛頓，便藉此發展出萬有引力的觀念，並利用萬有引力的數學式，推測出慧星的運動軌跡是雙曲線。

最後，作者從多體問題指出：天體軌道的「不完美」，反讓我們得到關於遙遠天體的知識。也就是說，追求關於圓的「完美」知識時，竟會發現很多知識「來源於探索使圓（或其他圓錐曲線）不完美的原因」。

第九章：「振動」。第三章介紹了利用天文現象的周期性制定曆法。當吾人想進一步把這些周期化分為更小的時間單位時，便再度考驗人類的智慧。從利用蠟燭、油燈的燃燒，到水鐘的發明，最後是機械和電子時鐘的出現。一旦涉及到時鐘的精確度時，鐘擺便成了研究的重心，其中，伽利略和惠更斯的研究貢獻良多。另一方面，法國數學、物理學家傅里葉則把包括鐘擺的簡諧運動及其他振盪，還原為一系列的正弦和餘弦函數，他所建立的傅里葉級數則可視為一系列圓周運動疊加的投影。

第十章：「波」。不論是水波、地震波或是光波、電磁波，由於波的週期性，正如第九章所提到的，皆可作傅里葉分析。此外，這些光波的研究，更引發了愛因斯坦的相對論，這項偉大的研究對時間與空間的概念產生了革命性的突破。

第十一章：「人造結構與天然結構」。建築的歷史中，人類從試錯法開始，嘗試各類的建築結構。一旦成功了，便視其為神或大自然所喜愛。然而，隨著幾何學的研究發展，人類漸漸掌握了分析建築狀況的方法，建築的技術也就更上一層樓。除了這些人造結構外，自然界的萬事萬物，小到原子，大到宇宙，也都有其天然的結構。「人類在進化過程中形成了感受和操縱這些天然的幾何結構的本能，我們可以輕而易舉地應付複雜的幾何對象。」因此，造就了人類在生存競爭上的優勢。

第十二章：「真實的宇宙與猜想的宇宙」。首先，作者區分數學與物理間的差別，再以中微子為例，來探討物理實在的問題。最終，作者則指出了他對數學與物理世界的看法。他認為，人腦與宇宙的一致，使腦中的數學思考模式有助於理解物理世界的各種現象。然而，面對無法解釋的物理現象，會不會也因此而使「數學應用於科學的範圍存在一個理論上的極限」？本書的最後一句話——「在我們可以明確地評價這個前提之前，我們至少還要進行幾個世紀的不懈努力，用數學探索宇宙的奧秘。」——或許是最「完美」的答案。

最後，對於全書的綜合評論，筆者將從「知識」和「能力」這兩個面向來說明。首先，在「知識」的面向上，本書涵蓋了從原子到宇宙、從古埃及到近代的豐富知識，想必會讓讀者們大飽眼福。不過，倒是要注意書中出現的一些錯誤。像是在描述畢氏學派時，便出了大錯：本書第四章中提到「畢達哥拉斯學派的一個重要成就是證明了既非整數也非分數的數的存在……這個發現是畢達哥拉斯學派的數字命理學的基礎」。這樣的敘述與史實恰好相反。我們知道，無理數的發現嚴重威脅畢氏學派，甚至傳說中，洩露這項秘密的人還遭受到處死的懲罰。筆者之所以認為這是個大錯誤，是因為作者在全書主軸——數學推理與物理現象——上打轉時，便是圍繞在畢氏學派「整個宇宙的本質在於數字模式」的信仰上論述。然而，竟對畢氏學派的描述上出了這麼大的紕漏，實在是該「打屁股」。至於書中其他處的筆誤，筆者倒是認為大都無傷大雅。

接著，在關於「能力」的面向上，筆者則要讚賞本書對提昇讀者思考能力的助益。特別是對於從未接觸過數學哲學的讀者，書中所描述的數學與物理世界的種種「接觸」及「衝突」，必定會引起讀者對數學本質的思索及探尋。也就在作者提出的一個又一個的數學哲學問題上，我相信，感到「頭大」的反應，勢必能增加讀者的思考能力，也讓整個閱讀的過程不致

於太過「平坦」。

整體來說，筆者認為，本書在多元而豐富的知識內容中夾雜著數學哲學，是十分成功的科普寫作方式。這將使讀者在舒服地吸收書中「平坦」的知識時，遇到一些哲學的「小釘子」，藉此改變讀者被動吸收的習性，而在閱讀的過程中扮演更主動的角色。此外，作者在數學、物理知識與哲學的比例上控制得宜，所以，應不致於使讀者礙於過多問題而產生閱讀上的困擾，這當然也就十分符合作者所設定的讀者——「很多沒有經過嚴格的數學和科學訓練的讀者希望對那些通過數學手段達到的科學真理有所了解，這些讀者是我服務的對象」。我想，這也是所有科普書籍所應努力的方向吧！

知識 vs. 信念：何謂「吾人知道了一個事實」？

在認識論中，與『謬誤』、『虛假的信念』或者『僅僅是個人的意見』（比如猜想）相對應，『知識』一詞在傳統上被最廣泛地定義為『被證明了的真實信念』。也就是說，如果一個人宣稱他知道某個事實，那麼就必須滿足三個先決條件：

- (1) 他必須相信這確實是一個事實；
- (2) 實際上，這也是一個事實；
- (3) 他必須能夠證明這是一個事實。

例如，在數學知識中，如果某人稱他知道『 $x-y$ 是 x^3-y^3 的一個因子』，那他必須相信『 $x-y$ 是 x^3-y^3 的一個因子』，『 $x-y$ 是 x^3-y^3 的一個因子』也必須為真，而且他也必須能夠證明『 $x-y$ 是 x^3-y^3 的一個因子』（比如說，他能證明 $(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ）。（摘自范良火著，《教師教學知識發展研究》，上海：華東師範大學出版社，2003）

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：
<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlletter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）

台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇意雯、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）

台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）

桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）

新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中） 洪正川（新竹高商） 陳春廷（寶山國中）

台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）

台南縣：李建宗（北門高工）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）

金門：楊玉星（金城中學）

馬祖：王連發（馬祖高中）