HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台灣師大數學系所）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（成功高中） 林旻志（北縣錦和中學） 陳啓文（中山女高）彭良禎（北市麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第七卷 第一期　目錄（2004年元月）

HPM 隨筆（三）：2004 勾股定理的『非常』遐想

台師大數學系　洪萬生教授

近日內，阮錫琦（任教於台中市西苑中學）將他的兩篇新作寄給我欣賞，內容都與『勾股（定理）』有關，頗有藉以『連結』或『貫穿』相關高中數學知識之意趣。我想，在這開年之際，閒談兩則有關『勾股定理』相當個人化的一些遐想，聊供大家在春節假期上網之餘的談助，希望大家喜歡！

其一、我們對於『勾股定理』或『畢氏定理』的證明方法，必須『精熟』到什麼程度才足夠？

最近一年來的數學教育改革爭議中，有一個極爲熱門的話題，就是數學的『精熟』度的標準之拉扯。譬如說吧，我們『做數學（計算）』(do mathematics) 究竟要多快、多準才行？說得比較『數學沙文主義』一點，我們的國民究竟要多精熟數學，才不會喪失所謂的『國家競爭力』？

我在 1985 年九月剛進入美國紐約城市大學 (CUNY) 就讀沒多久，就在道本周 (Joseph W. Dauben) 教授的『自然科學史』通識課堂上，遭遇了『畢氏定理』的證明。我記得在那一堂課中，道本老師幾乎花了 15 分鐘，才把出自《幾何原本》的『面積證法』（參見圖一）講清楚。我當時相當震撼，因爲我知道他在進入哈佛大學攻讀科學史學位之前，曾就學加州 Claremont McKenna 學院，最後以數學與英國文學雙主修之優異成績，榮獲雙學位。我至今還清楚記得，當時我『如坐針氈』，以致於『忍不住』走到黑板前，幫他畫好補助線並扼要講解。對我來說，不管是畢氏定理的哪一個證明，上述的『面積證法』也好，『弦圖證法』（圖二）也好，『比例證法』（圖三）也好，或者這些方法的組合乃至於再結合代數運算等等，都是充分『精熟』到如同『行雲流水』的程度了，因此，大概兩三分鐘（含當場畫圖）就可以搞定了。然而，道本老師這樣一位數學出身的著名數學史家，怎麼可能在這個『小 case』上磨蹭半天呢？

我始終無以索解，也不好意思與他討論所以然之故－難道美國學者的數學『反應』都這麼慢嗎？後來，我與學長 David Rowe（德國 Mainz 大學數學史教授）見面，才解除了部分困

惑。Rowe 先從奧克拉荷馬大學獲得純數學博士學位，再轉到紐約城市大學來攻讀數學史 / 科學史博士學位，因此，我與他討論十九世紀的德國數學史（尤其是柏林、哥廷根學派），充分感受到他對數學之精熟與流暢。

相對來看，道本老師的數學素養當然也沒有問題！其實，他在哈佛大學就讀期間，也被要求選修研究所層次的高等數學課程，這都可以解釋何以他研究起現代數學史人物如 Georg Cantor 與 Abraham Robinson 時，根本沒有任何干格罣礙之處。只是或許因為他教授數學史與科學史，而不教授數學，所以，一直沒有機會演練譬如『畢氏定理』這樣的證明，以致於讓我覺得他的講解有笨拙之感。

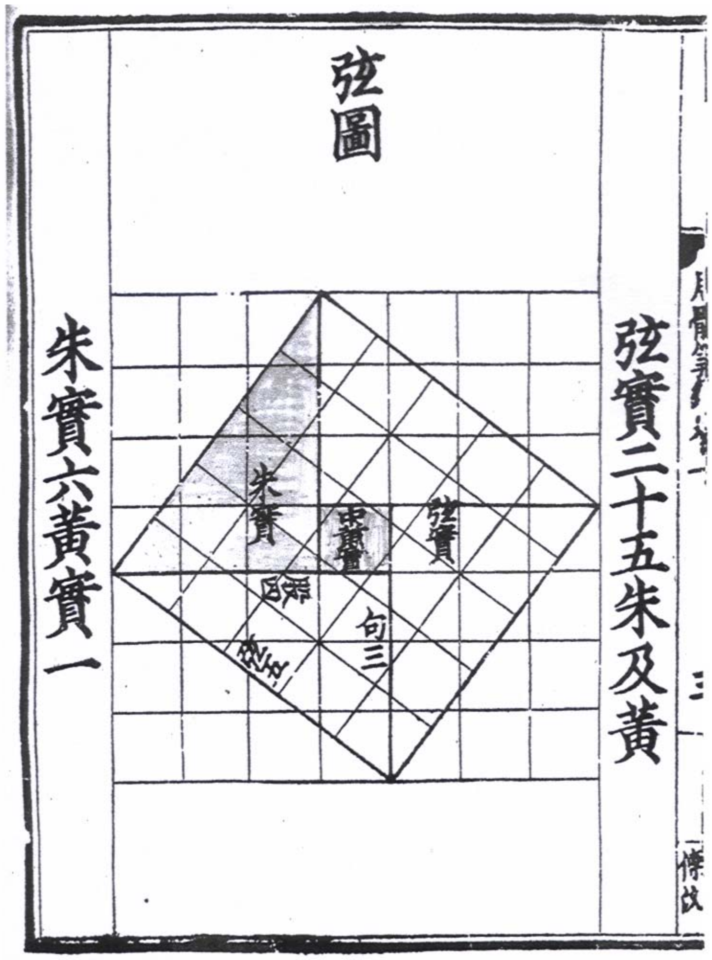
不過，我卻是到了過去這一年（將近 20 年之後）中，才能深刻體會道本老師當時『笨拙』的一種另類美感！對於他以及他的教育環境來說，既使在學院中主修數學，被期待的似乎也只是根本的理解就夠了，至於追求『精熟』所需時間，顯然被轉移到其他的『知識獵奇』上了，更何況他還需要主修英國文學呢。儘管如此，他仍然為自己保留了繼續深造成為『數學家』的可能性。他曾經告訴我說，學院畢業之後，他總共申請了五所大學的入學許可（與獎學金），其中除了哈佛大學科學史系之外，還包括普林斯頓大學哲學系，加州柏克萊大學，史丹佛大學，以及芝加哥大學等校數學系。最後，因為哈佛給他五年全額獎學金，他遂決定攻讀科學史博士學位，而成為世界知名的數學史家。

因此，道本老師的數學『笨拙』，恰足以襯托他作為一個數學史家 / 科學史家的全方位知識涵養！由此看來，既使是學界菁英（而且是數學史家 / 科學史家），犧牲一下數學『精熟』，這又何妨呢？這幾年來，本系相繼出現了好幾位文理兼備的優秀學生，他們目前正繼續深造中，最後都可能成為跨領域的菁英人才，因而有能力為台灣社會擘劃寬闊的願景。當我們『焦慮地吶喊』數學『精熟』之必要時，可曾進一步思考它的意義在哪裡呢，尤其針對這些跨領域的精英？

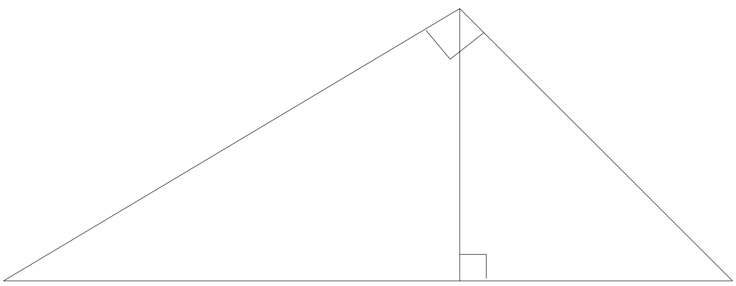

第四十七題
凡三邊直角形對直角邊上所作直角方形與餘兩邊上所作之兩直角方形并等
解曰甲乙丙角形於對乙甲丙直角之乙丙邊上作乙丙丁戊直角方形本篇四十六題言此形與甲乙邊上所作甲乙己庚及甲丙邊上所作甲丙辛壬兩直角方形并等
論曰試從甲作甲癸直線與乙戊丙丁平行本篇卅一分乙丙邊于子次自甲至丁至戊各作直線末自乙至辛自丙至己各作直線其乙甲丙與乙甲庚既皆直角即庚甲甲丙是同一直線本篇十四依顯己甲甲壬亦一直線又丙乙戊與甲乙己既皆直角而每加一甲乙丙角即甲乙戊與丙乙己兩角亦等公論依顯甲丙丁與乙丙辛兩角亦等又

圖一、取自徐光啓、利馬竇合譯的《幾何原本》

圖二、取自趙爽注《周髀算經》(1213 年宋版)



圖三、比例證法



其二、學習的評量點在哪裡?

最近,我爲了探討美國數學家如何介入數學教育,而有機會閱讀一些相關文獻,其中最能打動我的,莫過於由 MAA (Mathematical Association of America) 所出版的《教師的數學教育》(The Mathematical Education of Teachers)。其中第 5 章的內容是有關

中學數學教師應該具備的素養 (recommendations for high school teacher preparation)。爲此，編者利用了一個教學實例，以說明相關數學素養的重要性。在此一實例中，教師 Liddell 小姐運用了改編自『弦圖』的一個問題 (task)：如圖四正方形邊長 12，請問內嵌的正方形之面積爲何？至於教學目標，則是希望學生利用畢氏定理求此內嵌正方形之邊長（爲無理數），從而求得其面積。

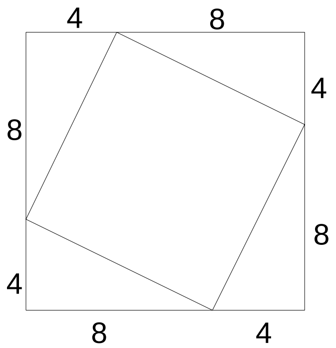
結果，有一位學生茱莉以圖五說明她的答案爲 80。不過，另一位學生比爾卻說：「我得到不同的答案，但是，現在看起來我沒有把圖畫對（見圖六）！我把每一邊分成 3 與 9。」第三位學生亞麗莎 (Alicia) 接著說：「有沒有可能無論每邊怎麼分割，面積都會一樣？」Liddell 小姐立即追問說：「妳怎麼想呢？如果這個點從分成 4 與 8 改變成爲其他的分法，那麼，內嵌的正方形面積會保持一樣嗎？」

當學生正在考慮那個問題時，他（她）們的老師也同時在思量琢磨。她必須盡快決定是否繼續她原先的教學計畫－連結此一問題與無理數，或者乾脆順著比爾的答案與Alicia的問題，把問題連結到代數等式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，然後要求她的學生去核證這些內嵌的圖形都是正方形，或者利用圖形計算器探索這個『內嵌正方形面積函數』：$y=144-2(x)(12-x)$。

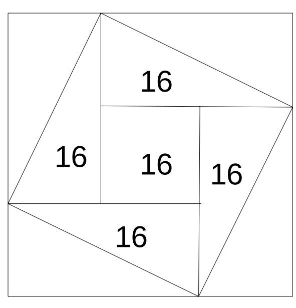
這樣一個『教學機緣』出現在課堂中，教師有沒有充分的素養決定如何繼續她（他）的教學活動，誠然是一個至關重要的問題。不過，如果欠缺類似上述的教學活動，那麼，我想有意義的問題大概也無從引出吧！因此，即使教師學富五車，如果從來不將學生視爲學習主體，那麼，這些問題儘管在課堂中出現，大概也不會受到應有的對待！

另一方面，如果視學生爲學習主體，那麼，如何評量茱莉、比爾與亞麗莎等學生，對於教師而言，恐怕都是相當巨大的挑戰。因此，『評量點』究竟應該放在哪裡呢？是像茱莉一樣，回答了教師所期待的正確答案？還是像比爾『答非所問』但卻鬆動了原來『問題』(task) 的結構，而打開了寬闊的想像或思考空間？或是像亞麗莎馬上跟進而提出具體而有意義的新問題來？如果你（妳）是教師，他（她）們三人的平常分數要怎麼打呢？

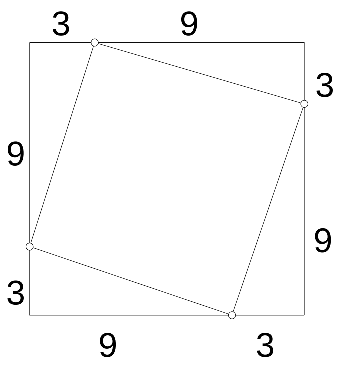
如果國、高中學校長或教師乃至於家長『各色人等』，很重視『統一』考試、『統一』閱卷的所謂『公平性』，那麼，或許身爲老師的你，只好對比爾這樣的學生說一聲抱歉了！至於會不會因此而扼殺了一位學生的想像力或學習興趣，乃至於降低了所謂的『國家競爭力』，當老師的一切『秉公』行事，當然可以『姿態優雅地』走開了。



圖四



圖五



圖六

參考文獻

洪萬生 (2004).〈美國數學家如何介入數學教育？〉,《科學月刊》第 35 卷第 2 期。
阮錫琦 (待刊稿).〈幾何學中的魔法棒－『畢氏定理』〉。
阮錫琦 (待刊稿).〈『HPM』的重要性〉。
CBMS (2001). The Mathematical Education of Teachers. http://www.maa.org/cbmsT.

『盈不足術』與老鼠穿牆的「恩怨情仇」

台師大數學系碩士班研究生 張復凱

《九章算術》第七卷『盈不足』，共有二十個問題。其中，前八題是在處理『純粹盈不足』的問題：第一到第四題是『有盈、有不足』的情形；第五、六兩題分別是『兩盈』及『兩不足』；第七、八兩題則各是『不足、適足』及『盈、適足』的情形。

以第一題爲例：

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？

《九章算術》提出的解題方法，亦即『盈不足術』:

盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以為實。并盈、不足為法。實如法而一。盈不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法、實。實為物價，法為人數。

若運用現代數學術語表達，則上述問題可以翻譯成爲：『若是每人出a_1，則多出了b_1；若是每人出a_2，則不足b_2。問人數x、物價y各多少？』至於解法則如下：每人出錢$\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$，人數$x=\dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$，物價$y=\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2}$。以第一題爲例，即爲每人出錢$\dfrac{53}{7}$，人數$=\dfrac{3+4}{8-7}=7$，物價$=\dfrac{8\cdot4+7\cdot3}{8-7}=53$。前四題皆以『盈不足術』解決，至於第五到第八題，方法亦類似。

有趣的，是《九章算術》在處理完八題基本的盈不足問題後，便將「每人出錢$\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$」這部分中「$\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$」的解題方式（後有詳述），運用到一般表面上非盈不足型的問題上。如第十二題：

今有醇酒一斗，直錢五十；行酒一斗，直錢一十。今將錢三十，得酒二斗。問醇、行酒各得幾何？

《九章算術》採用的方法是：

假令醇酒五升，行酒一斗五升，有餘一十；令之醇酒二升，行酒一斗八，不足二。

再用『盈不足術』中的『$\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$』解題，得醇酒$=\dfrac{5\cdot 2+2\cdot 10}{2+10}=2.5$升。

這樣的解題方式，後來在歐洲被稱為「雙設法」(rule of double false position)。像是意大利數學家斐波那契 (Fibonacci, 1170?~1250) 所著《計算書》(Liber Abaci, 1202，亦譯作《算經》) 第十三章介紹阿拉伯人的Elchayam法（即「雙設法」)，便是在討論這類問題。洪萬生在〈十三世紀西歐數學百科全書：斐波那契的《計算書》〉一文中，更指出此章的題型非常類似《九章算術》中的〈盈不足術〉，像是先前所提的『兩盈』、『兩不足』、以及『一盈一不足』等三種情況，也都在《計算書》中出現。至於《九章算術》與《計算書》兩者間的關連，則是眾說紛紜。不論如何，這種方法，就像錢寶琮所言：「在十六、七世紀時期，歐洲人的代數還沒有發到充分利用符號的階段，這種萬能的算法便長期統治了他們的數學王國。」[1]足見其重要性。

不過，必須注意，以『盈不足術』解一般的問題時，只有在處理一元一次方程式的問題，才可求出正確解。以現代數學術語說明：若要解決 Ax=B 這個一元一次方程式時，先用a_1與a_2代入 x 處，在比較方程式等號左邊的 Aa_1、Aa_2 與右邊的 B 後，發現分別多出b_1與不足b_2，

即$\begin{cases} Aa_1=B+b_1 \\ Aa_2=B-b_2 \end{cases}$。於是我們可以解出$\dfrac{B}{A}=\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$，這也等同於原式 Ax=B 導出$x=\dfrac{B}{A}$的解。

但是，很明顯地，一旦面對非一元一次方程式時，這種方式求出的解，就可能只是近似解。

以盈不足第二十題為例：[2]

今有垣厚五尺，兩鼠對穿。大鼠日一尺，小鼠亦日一尺。大鼠日自倍，小鼠日自半。問幾何日相逢？各穿幾何？

答曰：二日一十七分日之二

術曰：假令二日，不足五寸；令之三日，有餘三尺七寸半。

即以盈不足術求得日數$=\dfrac{2\cdot 37\frac{1}{2}+3\cdot 5}{5+37\frac{1}{2}}=2\dfrac{2}{17}$日。

由於本題的兩隻老鼠分別以公比為 2 和$\dfrac{1}{2}$的等比級數穿牆，以現在的表示法為

$\dfrac{2^n-1}{2-1}+\dfrac{(\frac{1}{2})^n-1}{(\frac{1}{2})-1}=5$，並非一元一次方程式。所以，求出的$n=\log_2(2+\sqrt{6})$明顯地與利用『盈不足術』所算出的$2\dfrac{2}{17}$不同。因此，這個問題被認為只能求出近似解而非正確解。另外，還

有第十一題「蒲與莞」出現等比級數、第十八題「良馬與駑馬」出現等差級數，都因類似的情形而同樣被視爲僅能求出近似解。

當一般中算史家認爲《九章算術》的作者沒有正確地解決這三個問題時，[3]沈康身在他的《九章算術導讀》中，則爲此平反。沈康身認爲，等比級數和等差級數都是在項數是正整數時才有效，所以，像第二十題的 $\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{(\frac{1}{2})-1}=5$ 指數方程式以連續量的方式求出 $n=\log_2(2+\sqrt{6})$ 是無意義的。他認爲，正確的情形應該是：

大鼠穿洞速率爲 $\begin{cases}1 & (0\le n<1)\\ 2 & (1\le n<2)\\ 2^2 & (2\le n<3)\\ \cdots\end{cases}$，小鼠穿洞速率爲 $\begin{cases}1 & (0\le n<1)\\ \frac{1}{2} & (1\le n<2)\\ \frac{1}{2^2} & (2\le n<3)\\ \cdots\end{cases}$

所以大鼠穿洞距離爲 $\begin{cases}n & (0\le n<1)\\ 1+2(n-1) & (1\le n<2)\\ 1+2+2^2(n-2) & (2\le n<3)\\ \cdots\end{cases}$，

小鼠穿洞距離爲 $\begin{cases}1 & (0\le n<1)\\ 1+\frac{1}{2}(n-1) & (1\le n<2)\\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}(n-2) & (2\le n<3)\\ \cdots\end{cases}$

因爲兩鼠會在 $2<n<3$ 時相遇，所以，可以列出方程式 $1+2+4(n-2)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}(n-2)=5$，並解得 $n=2\frac{2}{17}$。也因爲這是一元一次方程式，對照前面所提，《九章算術》的『盈不足術』同樣也求出 $n=2\frac{2}{17}$。沈康身認爲 $n=2\frac{2}{17}$ 才是正解，亦即《九章算術》的答案並非近似值，而是正確值。

同樣地，本書第十一題和第十八題也可利用相同的方式來解讀，而認定所求爲正確值而非近似值。

對此，莫紹揆亦指出:「在盈不足章中有三例用到階梯函數，未受到人們認可，遂致以爲算法有誤，或只得近似解。」[4]呼應了沈康身的看法。

那麼，究竟一般中算史家所認定的近似解與沈康身和莫紹揆認爲的正確解孰是孰非？

先丟開各種「算」法，重新檢視這些題目。藉由貼近這些問題的本意，以確認何者較爲合理。

回到第二十題。大鼠的穿洞速率變化情形，在兩種解讀下，分別爲：

1. 近似解的角度下，大鼠的穿洞速率爲 $2^n \ln 2$ 。（n 爲天數）
2. 正確解的角度下，大鼠每天都以固定的速率穿洞。第一天速率恆爲 1、第二天速率恆爲 2……

在我看來，「$2^n \ln 2$」的速率，怎麼看都覺得彆扭。相對而言，把穿洞速率視爲等速率，顯得自然多了！是故，『盈不足』卷中第十一、十八、二十題的解應非近似解，而是「道道地地」的正確解。

這樣的結論，必定給那些總相信主流想法而欠缺省思的書呆子，大大地震撼教育一番，讓我們警覺到『盡信書不如無書』的真理。此外，也提醒我們解決問題時，必先貼近問題的脈絡。對於史學的研究，更是忌諱把古代的問題，丟到現代的脈絡之中。這種務必貼近脈絡的警惕，對我來說，或許是比發現正確解的結論更爲重要吧！（小小開個玩笑，那《九章算術》的作者有沒有搞清楚老鼠們鑽牆時的脈絡？）

最後，還有一件事令我感到困惑。以第二十題爲例，雖然老鼠穿牆每天都是等速率，但因爲隔一天速率就會變化，所以，『盈不足』的方式只有在盈與不足的鄰界處才會適用（另外兩題也是如此）。亦即：若原文中「術曰：假令二日，不足五寸；令之三日，有餘三尺七寸半」改爲「假令一日，不足三寸；令之三日，有餘三尺七寸半」，答案就會變成 $\dfrac{1\cdot 37\frac{1}{2}+3\cdot 3}{37\frac{1}{2}+3}=1\dfrac{4}{27}$ ，和正解的 $2\dfrac{2}{17}$ 可是天差地遠囉！

那麼，究竟《九章算術》的作者是否有意識到這樣的情形，或只是碰巧算出正解。我想，『盈不足術』與老鼠穿牆的「恩怨情仇」看來是沒完沒了啦！

註解：

1. 錢寶琮《中國數學史話》，盈不足術。
2. 本文盈不足問題題號採郭書春與劉鈍點校的《算經十書》編排方式。孔刻本將此題移至十二題，而之後題目順移一位。
3. 郭書春《古代世界數學泰斗劉徽》、劉鈍《大哉言數》、李繼閔《九章算術及其劉徽注研究》都持此觀點。
4. 本敘述引自沈康身所著《九章算術導讀》。

參考資料：

洪萬生 (2003).〈十三世紀的西歐數學百科全書：斐波那契的《計算書》〉，《科學 月刊》34 (7): 636-642.

郭書春、劉鈍 (2001).《算經十書》，台北：九章出版社。
李文林 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。
沈康身 (1997).《九章算術導讀》，漢口：湖北教育出版社。
郭書春 (1995).《古代世界數學泰斗劉徽》，台北：明文書局股份有限公司。
劉鈍 (1995).《大哉言數》，瀋陽：遼寧教育出版社。
李繼閔 (1992).《〈九章算術〉及其劉徽注研究》，台北：九章出版社。
錢寶琮 (1957).《中國數學史話》，北京：中國青年出版社。

數學符號的演進—以「√」為例

台師大數學系碩士班研究生 歐士福

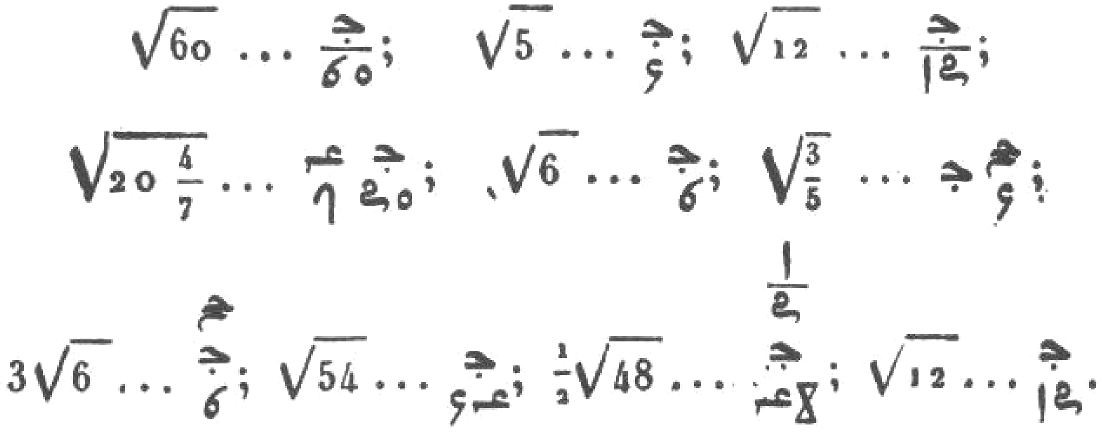
一．前言

在數學學習與數學知識發展的過程中，符號的使用佔據相當重要的地位。或許我們也可以說，數學的發展，事實上也伴隨著符號系統的發展。當然，建立一個完整的符號系統，或多或少需要一點時間的累積。從古埃及的紙草到現代的數學書籍中，我們可以看到符號系統的建立，隨著數學的發展更趨於完備，也更趨於國際化。以下我們以「根號」為例，看看數學知識與符號系統，是如何地「攜手邁向未來」？

二．早期的符號形式

平方根的符號在數學發展的過程中，很早就已經出現了。在古埃及的紙草文件之中[1]，「 」即用以代表平方根。而在西元第七世紀時，印度的婆羅門笈多(Brahmagupta，生於598年) 利用文字縮寫的方式，將印度文字中，用以表示平方根的「*caraní*」一字，以「*c*」來表示。例如，$ru\,3\ c\,450\ c\,75$ 用現在的符號來表示[2]，即為$3+\sqrt{450}+\sqrt{75}$ 。至於 15 世紀的阿拉伯，阿爾卡拉沙第 (Al-Qalasadi)將阿拉伯文“*jidr*”(即平方根) 中的第一個字母“ ج ”，用以表示平方根的符號。而他的用法是，將此符號放在所要求平方根的數字之上，有時會在符號和文字之間用一條水平線分隔之。(如圖一)

(圖一)



三．四種主流的形式

大約在西元 1100 年代，由於貿易、旅遊與十字軍東征的影響，歐洲人與阿拉伯人有著非常頻繁的接觸，也因此，許多希臘和阿拉伯的數學書籍，開始漸漸傳入歐洲世界，並大量地將其翻譯為拉丁文。而就在此時，較完整的符號系統也開始建立，其中用以表示根號的符號，主要分為四類，分別是：℞(*radix*)，*l* (*latus*)，√ 與分數指數。

"℞" 的首次出現，是在阿拉伯文版的《幾何原本》被翻譯成拉丁文時，而拉丁文中的 *radix* 即是「平方根」的意思。事實上，℞ 這個符號的使用非常廣泛，它可以泛指為一般的「根」，有時候也被當成一次的未知數「*x*」。例如，在斐波那契 (Fibonacci, Leonardo of Pisa) 於 1220 年寫的一本數學書《*Practica geomatriae*》中，℞ 同時用以表示平方根與一次的未知數。

法國數學家 Nicolas Chuquet (1484) 也曾在他的著作《Le Triparty》中，使用℞ 來表示根。例如，在他的手稿中，曾寫到："℞^{2} 16. *as* 4"，"℞^{4} .16. *si est* . 2."。而在德國數學家 Johann Widman (1489) 的手稿中，我們發現到他同時使用 ℞ 及 *ra* 來表示平方根。到了十六世紀時，義大利數學家佩西歐里 (Luca Pacioli, 1523) 對於 ℞ 的用法又做了些改變。如圖二，我們可以看到，他以「℞. *cuba.*」表示開三次方根、「℞℞.」表示開四次方根，而「℞*v.*」則用以表示雙重根號。

(Fol. 70*B*) ℞ .200 . for $\sqrt{200}$
(Fol. 119*B*) ℞ .*cuba. de* .64. for $\sqrt[3]{64}$
(Fol. 182*A*)[3] ℞ .*relato.* for fifth root
(Fol. 182*A*) ℞ ℞ ℞. *cuba.* for seventh root
(Fol. 86*A*) ℞ .6.$\tilde{m}$.℞.2. for $\sqrt{6}-\sqrt{2}$
(Fol. 131*A*) ℞ ℞.120. for $\sqrt[4]{120}$
(Fol. 182*A*) ℞. *cuba. de* ℞. *cuba.* for sixth root
(Fol. 182*A*) ℞ ℞. *cuba. de* ℞. *cuba.* for eighth root.
(Fol. 149*A*) ℞*v.* ℞.20$\frac{1}{4}$.$\tilde{m}$.$\frac{1}{2}$. for $\sqrt{\sqrt{20\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}$.

(圖二)

另一方面，德國的 Johannes Scheubel (1551) 則與眾不同，他一方面採用了 Widman 的符號「*ra*」，一方面也使用了一個近似於現今根號的「√」。在他的書籍中，三次方根用「*ra. cu.*」或「√√√」表示，四次方根則用「*ra. ra.*」或「√√」表示。

十七世紀以後，數學家們漸漸地不再使用 ℞ 來表示根號，取而代之的是「√」。然而，仍然有少數的數學家，例如 Michael Rolle，還是使用了 *R* 來代表根號，例如，在他的手稿中，$2+\overline{R.-121}$ 即為 $2+\sqrt{-121}$。而據推測，*R* 最後一次用以代表平方根的符號，可能是在西班牙數學家 Perez de Moya 於 1562 年出版的數學書籍中，這本書一直到 1784 年為止，共刊印了十四版，意即，直到 1784 年，我們仍然可以在這本書中看到，*R* 被用來表示平方根符號。

拉丁文「*latus*」[3]，具有代表「根」的意義，是在西元二世紀時。一直到了十二世紀，有些數學家也開始使用這個字來表示根。然而「l」這個符號被用以代表根，是在Peter Ramus (1569)的書中，他曾寫道：「l 27 *ad* l 12 *gives* l75」，意即，$\sqrt{27}+\sqrt{12}=\sqrt{75}$。到了 1592 年，Lazarus Schoner編輯了Ramus的算數與代數的書籍，在書中Schoner使用"$l\,c\,4$"來表示$\sqrt[3]{4}$，而"$l\,bq$ 5"則表示$\sqrt[4]{5}$，取代了Ramus原本用的"$l\,l\,5$"。值得注意的是，在Schoner的用法中，$5l$的意義與$l5$是不一樣的，他們分別代表的是$5x$和$\sqrt{5}$。另外，著名的法國代數學家韋達 (Francois Vieta, 1540-1603)，他也屏棄了R與 $\sqrt{}$，而採用l這個符號來表示根號。事實上，l這個符號被用在根的運算，並不普遍。而且在對數發明之後，l大部份被用以代表對數符號。即使如此，Henry Briggs (1624) 這位將後半生致力於對數算術的數學家，仍然採用l來表示根號，例如，在他的書中，"*Sic* $l_{(3)}$ 8"即為$\sqrt[3]{8}$。

「$\sqrt{}$」這個符號，源自於德國數學家 Christoff Rudolff (1525) 的《*Die Coss*》書中，尤拉 (1707-1783) 曾經猜測，這個符號是由 *radix* 中的第一個字母"*r*"演變而來。然而，經過更仔細地研讀德國數學家的手稿後，現今的說法則大多認為，$\sqrt{}$ 是由 「點」(dot) 演變而來。因為在一些德國的數學書籍手稿中，曾經出現以"."來表示平方根的符號，之後出現一種被視為點的變形符號「$\int$」，也是用來表示平方根。然而，這些證據似乎不夠強大，對於這樣的說法，依舊令人存疑。

經過了一個世紀之後，Albert Girard (1595-1632) 於 1629 年時，曾經在他的書籍《*Invention nouvelle*》中，將指數放在根號的左上方，用以表示開三次方根，他的寫法如下：「$\sqrt[3]{}$」。然而，對於開四次方根，他仍然使用「$\sqrt{}\sqrt{}$」的符號來表示。到了 1637 年，法國數學家笛卡兒 (1596-1650)在他的《幾何學》(*Géométrie*)書中，才首次將「$\sqrt{}$」與「—」 (線括號) 結合，而成了現今我們所熟悉的符號「$\sqrt{\quad}$」。可是一直到 1690 年，Michael Rolle 才首度採用了 Girard 的寫法，將指數寫在根號的左上方，其寫法如下：「$\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}}$」。至此以後，「$\sqrt{\quad}$」這樣的符號，漸漸成為主流，一直延用至今。

至於我們現今採用的分數指數表示法，是 1676 年時，牛頓 (1642-1727)在寫給皇家學會 (Royal Society) 秘書 Henry Oldenburg 的一封信中所提到。在信中，他向 Oldenburg 介紹了他發現的二項式定理，也首度採用負整數指數和分數指數的表示法。而牛頓的這項創舉，也為後世在書寫有關開方問題的數學式時，提供了相當大的便利性。

綜上所述，我們可以看出，要建立一套完整且穩定的數學符號系統，似乎不是那麼容易，有時還得靠點運氣！例如「l」在對數發明後，即被取代；而以「.」來表示根號，也並非明智之舉，尤其是遇到小數時，容易造成混淆。當然，除了根號以外，仍有許多數學符號的「演化」，充滿了歷史張力，值得我們「追本溯源」。然而，筆者才疏學淺，僅能以根號為例，來探討數學符號在數學發展過程中是如何的演進？如有未詳盡之處，還請多批評指教！

註解：

1. 古埃及的主要數學紙草文件有二，分別是莫斯科紙草與阿孟斯(Ahmes)紙草，其中根號的符號出現在阿孟斯紙草文件之中。
2. ru 為印度文"rupa"的縮寫，用以表示數的絕對值(absolute number)。
3. 拉丁文中，"*latus*"即為"正方形的一邊(side of a square)"。

參考資料

Florian Cajori (1928). *A History of Mathematical Notations.* Chicago. Illinois: The Open Court Publishing Company.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York：Oxford University Press.

追憶謝志雄教授

北市開平高中 林裕意老師

一如往常，早上到辦公室便打開電子郵件信箱，赫然看到東吳大學謝志雄教授紀念文的郵件 …… 心想事情終究發生了…… 很悵然 ……。我知道謝教授一直受洗腎的煎熬，有限的生命抵不過現實的殘酷，他還是離我們而去了。

看了郵件的內容後，發現謝教授是死於胃癌，不是腎病，這讓我有一點想責怪胡秘書爲什麼不告訴我們。但是接著，有更多的是自責、惋惜及回憶。覺得沒能參加喪禮，陪謝教授走完最後一程是最大的遺憾。

我在開平高中教書已經二十幾年了。在教學的生涯中，常常憶起謝教授的訓誨及指導。謝教授是一位難得的教師，他從事教育的態度，默默對學生付出的心，穩重優雅的風範，深深影響我從事教育的決心及工作態度。

回想大學時，在一個學期結束的時候，我聽到謝教授竟然告訴我們班一個微積分被當的同學說：「沒關係，不急，好好再念一次，你花了更多的時間，就要唸得更透徹，那些通過的人不見得真正的已經把微積分唸好了，你把它唸好就留下來當助教幫助學弟妹學習。」這個回答讓我很震撼。從小我們被教育的是在時間表裡兢兢業業的，按部就班的把書唸完，一級一級的往上爬。今天，一個當系主任的教授竟然教人慢慢的唸，我的思想在這一刻，突破了傳統的框框，它讓我從更宏遠的眼光看人生。後來，我當了老師也常對學不好的學生或家長，給他們建立不同的人生觀，同時，我也看到了鼓勵後的一樣感動。

不記得是幾年前了，我帶了花去看謝教授，他很高興告的謝謝我還記得他，我回應：「今天來看老師是我的學生教我的，當我的學生也是常常如此回饋我時，我被學生的熱情感激，這讓我反思到我林裕意的老師在哪裡？我是不是也應該回饋我的老師呢？所以，我來了……。」說實在，當了老師才知道怎麼當學生呢！後來，我們聊了很多人生觀、數學教育、輔導、……。

有太多太多的回憶 ……。

很慶幸能碰到如此一位良師益友 – 謝志雄教授！

Information

台灣數學教育學會籌備會公告

93 年 1 月 9 日
93 年第 0930000001 號

主旨：本會經內政部 92 年 12 月 4 日第 0920044741 號函准予籌組並
成立籌備會，茲公開徵求會員。

公　告　事　項：

一、本會宗旨：爲研究、發展、推廣數學教育，使台灣學生快樂學好數學，特成立台灣數學教育學會。

二、入會資格：凡贊同本會宗旨，年滿二十歲，對數學教育有興趣者。填具會員入會申請書，經籌備會通過，並繳納入會費及常年會費後，爲本會會員。

三、籌備期間申請入會截止日期：93 年 1 月 31 日止

四、籌備會地址：116 北市文山區汀州路四段 88 號
國立台灣師範大學數學館 203 室
聯絡人：張瓊華小姐
聯絡電話：02-29320206*203　F ax:02-29332342
e-mail: keely@hp715.math.ntnu.edu.tw

五、入會申請書有關資料請向前項地址索取。或上
http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me13/index.htm
下載

主任委員 洪萬生

台灣數學教育學會會員入會申請書：

會員類別	□個人會員 □預備會員		會員證編號：
中文姓名：	英文姓名：	性別：□男 □女	生日日期： 年 月 日
學 歷		身 分 證 字 號	
經 歷			
現 職			
專 長		可以提供團體之服務：	
戶籍住址： 省（市） 縣（市） 鄉（鎮、市、區） 路（街） 段 巷 弄 號 樓	電話： 手機： 傳真：	E-MAIL：	
通訊住址： 省（市） 縣（市） 鄉（鎮、市、區） 路（街） 段 巷 弄 號 樓	電話： 手機： 傳真：	E-MAIL：	
您是否願意擔任第一屆理事候選人 □願意 □不願意 您是否願意擔任第一屆監事候選人 □願意 □不願意		（照片）	
中 華 民 國 年 月 日 申 請 人：○ ○ ○（簽章）			
審查日期	經過 年 月 日第 屆第 次理事會議審查結果：□通過 □不通過 原因：		

※本表填妥，請以 email（attached word 檔或文字檔）或 fax 寄回

台灣數學教育學會籌備處

籌備處：116 台北市文山區汀州路四段 88 號
國立師範大學大學數學系 320 室
Email: keely@hp715.math.ntnu.edu.tw
Tel: 02-29320206 Ext 203
Fax: 02-29332342

洪萬生教授來訪心得

蘭陽女中 206 班學生 林詠心

在 92 年 12 月 17 日這天，這次計劃案的指導教授洪萬生先生來到蘭陽女中檢視我們的成果，順便和我們聚餐聊天。同時，兩位「今週刊」的記者－林祝菁主編、楊彩成攝影師，也聽聞我們的「數學科展人才培育計畫」正在進行，因此，對我們的計劃案感到興趣，正巧選在這天來訪問我們，他們預計在近期規劃一個數學教育的專門報導。

雖然事前我們已經做好了準備，但是，在面對洪萬生教授之前，大家還是覺得很緊張，而且，那天雅慧正好胃痛，還被教授開玩笑了好幾次呢！幸好，洪教授是一個很平易近人的人，一開始他就試著緩和氣氛，跟我們聊了很多輕鬆的話題。在談話中，我們可以明顯地感覺到教授的博學多聞，當他看到我們讀過的書，馬上就能跟我們侃侃而談，還說了很多相關的歷史、故事……，讓我們覺得很有趣，聽得津津有味。例如，當馥娟提到曾經讀過的《天才之旅》中的「卡當諾與三次方程式」時，教授就很詳細地跟我們介紹這段關於三次方程式的故事，甚至說的比書中內容還詳盡；又例如，當教授知道我是社會組的學生時，他立刻就對我們介紹了許多歷代有名的數學家，他們有的是學法律、有的是學文學、有的是學醫，但是最後都成爲了偉大的數學家，教授更以此來鼓勵我們，繼續堅持對數學學習的熱忱。

在聊過一陣子之後，包括敏晧老師、洪萬生教授、兩位「今週刊」記者、學校的邱冠誌老師，以及我們五位同學，一起在小會議室用單槍投影機觀賞我們精心製作的網頁，並且由敏晧老師做計劃案總報告紹。我們的網頁內容大致上完整，只剩下一部份小細節尚未完成，洪教授在看過網頁後，也建議我們每一個人都應該寫一篇對於這次計劃案的總心得，及一些我們所沒有注意到的小細節，真的受益頗爲豐盛。

當討論完計劃案的事情之後，正好是中午吃飯時間，於是我們一行十個人就到學校附近的一家西餐廳吃簡餐。在吃飯的過程中，大家都愉快地聊著天，洪教授更跟我們說了許多有趣的事情，他對我們介紹了幾本不錯的好書，也聊到了一部關於知名數學家 John Nash 的電影「美麗境界」，雖然我們已經看過了這部電影，但是洪教授還是大力推荐我們去看它的原著，因爲教授認爲電影經過改編，反而會有些失真。飯後，「今週刊」的記者對我們五位學生各提出了一個問題，都是關於這次計劃案的心得之類，她看來頗肯定我們做出來的成果，也和我們很聊得來。他們在離去之前，還幫我們拍了許多張合照，甚至借用教室，拍攝敏晧老師和邱冠誌老師上課的情形，過程十分有趣。

最後，洪教授提出了他個人在天津旅遊的經驗，以及全球著名的咖啡店 Starbucks 爲例，鼓勵我們要學習發揮自我的創造力。他強調，未來人們講求的是「獨一無二」，只要能擁有無限的創造力，不論我們選擇哪一條路，都一定能比別人更佔優勢，更有成功的機會！

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail** 至 **suhy@mail.topspeed.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 **e-mail** 至 **suhy@mail.topspeed.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm**
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、蘇意雯、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻、陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高中） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 葉吉海（內壢國中） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪（竹北高中） 洪正川（新竹高商）
苗栗縣：陳冠良（致民國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（大里高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
台南縣：謝三寶（新化高中） 李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中） 楊瓊茹（三民高中實習）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）