HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台灣師大數學系所）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（成功高中） 林旻志（北縣錦和中學） 陳啓文（中山女高）彭良禎（北市麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第六卷 第八、九期合刊 目錄（2003年9月）

八月份的 HPM 喜訊

台師大數學系　洪萬生教授

上個月 (2000 年 8 月)，陳冠良、楊玉星、謝佩珍、蕭文俊、王錫熙與孫梅茵，分別通過了碩士論文答辯，榮獲了本系所教學碩士班的碩士學位。正如同其他從本系所畢業的教學碩士一樣，他（她）們經歷了相當辛苦的奮鬥，才得以享受這一甜美的果實。我必須再一次地向她（他）們表示誠摯的祝賀。我想，對他（她）們來說，這一個獨立探索知識（特別是數學史或 HPM）的門檻已經跨過，往後，身爲中學數學教師，他（她）們的專業發展一定可以走得更加平順。

在他（她）們所完成的六篇論文中，楊玉星與王錫熙分別研究中國清代數學家方中通（十七世紀）與梅啓照（十九世紀）。其實，明清時期的中國數學史研究中，『次要』(minor) 數學家一直都無法獲得應有的注意，連帶地我們對於那些『主要』(major) 數學家如梅文鼎（十七世紀）或李善蘭（十九世紀）等人的歷史脈絡，總是有欠完整的掌握。因此，從數學社會史的觀點來看，我們離比較貼近地刻劃這兩個時期的中國數學史，實在還相當遙遠呢。然則我們究竟應該如何彌補呢？或許中國數學史家願意接觸一點中世紀科（數）學史的論述，如此一來，明清那麼多的數學史料，就會變得比較有意義了。

至於在另外四篇中，陳冠良、謝佩珍、蕭文俊與孫梅茵，都以韓國數學史爲題。其中孫梅茵以十七、八世紀的朴繘及其《籌學本原》爲研究對象，陳冠良研究《東算抄》（可能是洪正夏《九一集》的前身，不過，無法確定），他（她）們的成果都證明了：朝鮮數學家可以對中國傳入的天元術發揚光大。另外，蕭文俊研究十九世紀的朝鮮南秉哲及其《海鏡細草解》，以『貼近文本』的進路，考察南秉哲如何轉化清中葉李銳註解的《測圓海鏡》（金李冶原著）。還有，謝佩珍的韓國勾股術研究，則是『平行』了黃清揚去年所完成的《中國 1368-1806 年間的勾股術發展之研究》，以單一的主題來看韓國數學知識的演化與成長，是非常值得嚐試的研究進路，對於我們企圖描繪韓國數學發展的風貌，助益當然也相當大。

茲將這六篇論文的題目與作者敘述如下：

王錫熙：《清代算學家梅啓照及其算學研究》；

孫梅茵：《朴緖《籌學本原初探》；

陳冠良：《《東算抄》之內容分析》；

楊玉星：《清代算學家方中通及其算學研究》；

謝佩珍：《韓國勾股術發展之研究》；

蕭文俊：《朝鮮算學家學習中國古代數學文本的轉化：以南秉哲 (1817-1863)《海鏡細草解》爲例》。

有興趣的讀者可以上網查閱。我們竭誠地歡迎大家的指教與回饋。

『數學期望值』學習工作單

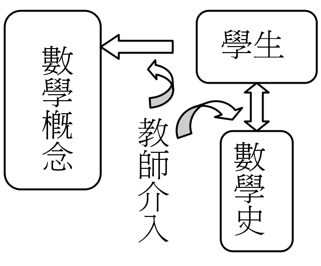
北市成功高中 蘇慧珍老師

一、前言

在一堂數學課中，教師呈現給學生的，往往有專業的理論以及教師的權威。在這裡，我所指的權威是「老師說，學生聽」的教學模式。如果想要營造活潑的教學環境，相信教師必須提供學生可熱烈討論的問題，而所提出的問題對於學生的單元學習若能有所幫助，自然是最佳的學習情境。爲嘗試達到此目標，筆者在『數學期望值』單元教學時，特別挑選歷史上幾位數學家們對於『賭金分配』的幾種方法，引發學生的探索興趣，希望能經由一連串的討論，讓學生們對於數學發展具有參與感，並能從數學家錯誤的解決方式中，試著了解自己的學習困難之癥結所在。

二、教學指引

『賭金分配』曾引發一連串歷史上不同時代數學家的熱烈討論。筆者希望能將這些重現於教室中，鼓勵學生成爲爲主動學習者，而教師則擔任觀察者及協調者。不過，教師的適時介入與引導，卻是很重要的關鍵。筆者所希望達成的教學過程，以圖略表如下：



至於實施方法，則是由教師提問之後，讓學生討論各種解法之可行性。可想而知，學生們的看法必定會有不同處，此時的討論就是一種社會化的過程。同時，透過討論，學生可以檢視自己的想法，讓概念得到更多的澄清。另一方面，在與歷史上的數學家之經驗連結之後，學生或許可以了解數學並非一蹴可幾，而是一種循序發展的文化。同時，學生本身會犯的錯誤，也可經由歷史重現的方式找到盲點，進而獲得改善的機會。

筆者認爲，本張工作單的作用，在於鞏固學生對於機率的基本概念，亦即『機會的均等與否』的討論。不過，或許我們可以先追溯這些相關概念的歷史淵源。

三、歷史回顧

機率論的起源之一爲賭博問題。在 15~16 世紀中，義大利數學家帕西歐里(Luca Pacioli)、塔爾塔利亞 (Niccolo Tartaglia) 和卡爾連奇 (Fillipo Carlandri) 的著述中，都曾討論過『如果兩個人賭博提前結束，該如何分配賭金?』等機率問題。其中，帕西歐里的著作《大全》(*Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*)，就有如下一題：

> 兩球隊比賽聲明投進一球得 10 分，先得 60 分者獲勝。但是比賽途中因為有狀況發生，導致無法賽完，此時一隊得 50 分，而另一隊得 30 分，試問該如何分配賭金？

以上的情況，當然必須假設兩隊是實力相當的。帕西歐里的解法是根據以得分的比例作分配，意即 50：30＝5：3。塔爾塔利亞在他的著述 *General trattato di numeri et misure* 中，批評帕西歐里的解法有誤。他注意到，若是其中有一隊得 0 分，則他們將無法分得賭金，而這樣的分法是不公平的。

卡爾連奇也一樣在他的著述中，使用了類似成比例的分法。但在其他文件中，我們發現，他使用了另一種不同的解法，筆者舉例說明如下：若討論與上述相同問題，有一隊需再得 10 就贏得比賽，而另一隊則需再贏得 30 分就贏得比賽，因此，分配賭金以其所再需要分數反比分配，$\frac{1}{10}:\frac{1}{30}=30:10=3:1$。就我們現在的解法去檢驗它，答案當然是錯誤的。

其後的約兩百年間，許多其他數學家也分別給出了許多解法，但是，卻遲遲無法爲機率論揭開神秘的面紗。

四、巴斯卡與費馬的通信

在 1654 年左右，愛好賭博的法國人米爾 (Chevalier de Mere) 向巴斯卡(Blaise Pascal) 提出了類似的分配賭金問題，引發了巴斯卡與費馬 (Oeuvres de Fermat) 之間探討機率問題的多封通信。在通信中，他們利用組合方法給出了這類問題的正確答案，從而在機率論中創立了一些基本結果。米爾的問題如下：

> 兩人比賽各出資 32 金幣，規定必須要贏三局才能贏得賭金，但後來比賽因故終止，且勝局比為(1,0)，問此時應如何分配賭金？

巴斯卡依序考慮兩人勝局比 (2,1)，(2,0)，(1,0)。首先分析 (2 , 1)，若繼續比賽，如果第一位贏，則比局 (3 , 1)，他將拿走全部的賭金；如果第二位贏，則比局 (2 , 2)，每個人均分所有金幣，即 32 金幣。因此，第一位至少將得到 32 金幣，而剩餘均分即 16、16，所以，比賽終止時的分法爲 [32＋16,16]，亦即 [48 , 16]。

接下來，分析 (2 , 0)。若繼續比賽，如果第一位贏，則比局 (3 , 0)，他將拿走全部賭金；如果第二位贏，則比局 (2 , 1)，由上述結果可知，第一位將拿走 48 金幣。因此第一位至少

將得到 48 金幣，而剩餘均分即 8、8，所以終止比賽時的分法為 [48＋8,8]，即 [56 , 8]。

最後，分析 (1 , 0)。若繼續比賽，如果第一位贏，則比局 (2 , 0)，由上述結果可知，第一位將拿走 56 金幣，第二位將拿走 8 金幣；如果第二位贏，則比局(1 , 1)，每個人均分所有金幣。因此，第一位至少拿到 32 金幣，第二位至少拿到 8 金幣，剩餘 24 金幣，兩人均分即 12、12，所以，終止比賽時的分法為 [32＋12,8＋12]，即 [44 , 20]，比例即為 44：20＝11：5。

費馬的解法，是考慮最多還需要幾場比賽才能看出贏家。如果第一位需要再比 m 場才贏，第二位需要再比 n 場才贏，則最多需再經過 m＋n－1 場比賽即知結果；例如米爾問題中，兩人勝局比數為(1 , 0)，則第一位需再贏 2 場、第二位需再贏 3 場即知結果，因此，兩人最多再比 2＋3－1＝4 場比賽，考慮此四場結果如下（a 代表第一位獲勝，b 代表第二位獲勝）：

aaaa (1)	aaab (1)	aabb (1)	abbb (2)	bbbb (2)
	aaba (1)	abba (1)	bbba (2)	
	abaa (1)	bbaa (1)	bbab (2)	
	baaa (1)	baab (1)	babb (2)	
		baba (1)		
		abab (1)		

由上述可知，兩位應該分的比例為 11：5，此結果與巴斯卡的答案相同。但是，法國數學家羅貝瓦爾 (Gilles de Roberval) 卻持不同的看法，他認為有些比賽不需要列出四場，而只需二、三場則可得結果。

費馬的解法扯出巴斯卡的二項式定理，亦即：若把 a，b 是為兩項，其四次展開式為 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，其中係數為 1、4、6、4、1，因此，分法為（1+4+6）：（4+1）＝11：5。（很神奇吧！）

荷蘭數學家惠更斯 (Christopher Huygens) 訪問巴黎時，了解到巴斯卡與費馬的通信研究，對這類問題產生興趣，後來，他撰寫《骰子遊戲》(Dice Game, 1657) 來探討機率問題的原理，其中包含許多習題，被許多人認為是機率史上第一本教科書。

五、工作單的設計理念及細部分析

筆者將『賭金分配』問題設計如下：

若有兩人各出資賭金 96 金幣，規定必須要贏三場者才能贏得全部賭金 192 金幣，但比賽中途因故終止，且此時勝局數(甲:乙)為（2:1），問此時應如何分配賭金？（甲乙兩人實力相當）

賭金的多少，取決於是否能夠被 32 及 3 整除。（原因留待後文說明！）筆者一開始並不引述歷史上的問題吸引學生，而是稍加改良後再加以提問。有關具體實施方式，筆者認為有兩種：

1. 提問後，由學生開始討論其解法應為何，教師並適時指導。
2. 提問後，以隱匿作者名字方式舉出各種解法，讓學生判別各解法之可行性。

筆者決定採用第二種，原因在於本校每班學生在外補習人數約有一半，關於賭金分配問題以機率求其解的方式，有些學生會『毫無猶豫』（亦即：未經深思）地提出，而且，我也擔心他們會局限於所學，因此，最後決定採用第二種方式：一方面讓學生可以欣賞其他解法，另一方面，筆者也有意藉此觀察學生的觀念是否正確。

筆者分別採用帕西歐里 (A)、卡爾連奇 (B)、費馬 (C)、巴斯卡 (D) 的解法，並將其匿名引用依序如下：

A：賭金分配應就其勝局比數，即 2:1，依比例分配，甲應分得$192\times\frac{2}{3}=128$金幣，乙應分得$192\times\frac{1}{3}=64$金幣。（由於賭金被 3 整除較好討論，因此，筆者將其賭金設定爲被 3 整除之數。）

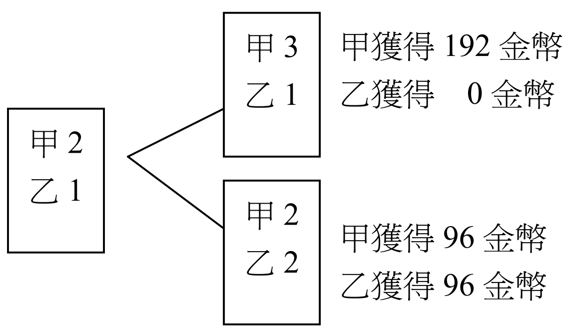
B：其賭金分配應考慮若不終止比賽，兩人各須贏幾場，按其各須贏得場數反比分配；即甲已贏 2 場，須再贏一場就可獲賭金，而乙已贏 1 場，須再贏二場就可獲賭金，因此，甲所需場數：乙所需場數＝1:2，故其反比爲 $\frac{1}{1}:\frac{1}{2}=2:1$ ，由此可知，甲應分得$192\times\frac{2}{3}=128$金幣，乙應分得$192\times\frac{1}{3}=64$金幣。

C：根據至多需要幾場比賽才能看出贏家，如果甲需要再比m場才贏；乙需要再比n場才贏，則需再經過m＋n－1 場才能宣布贏家。以勝局比爲（2:1）爲例，接下來的二場比賽可能結果列出如下：
（a 代表甲勝，b 代表乙勝）

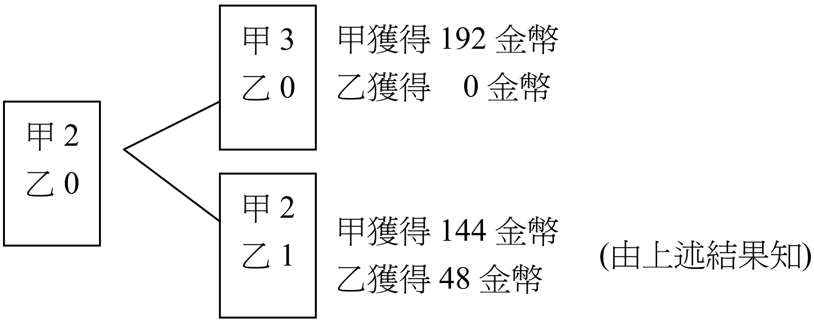
aa	ab	ba	bb
(甲勝)	(甲勝)	(甲勝)	(乙勝)

所以，兩人應該分的賭金比列爲[3：1]，即甲可得$192\times\frac{3}{4}=144$金幣，乙可得$192\times\frac{1}{4}=48$金幣。

D：甲贏兩局，乙贏一局，在擲下一次骰子時，若甲贏了，他將得到全部 192 枚金幣；若乙贏了，他們所贏局數比爲 2：2，在這種情況之下分賭金，每人將拿回自己的 96 枚金幣。綜上所述，若甲贏了將得 192 枚金幣，乙將獲得 0 金幣；若甲輸了則會拿到 96 枚金幣，乙會拿到 96 金幣，因此，甲至少可拿到 96 枚金幣，乙至少可拿到 0 金幣。假如他們不繼續賭下去的話，可將 96 枚金幣先給甲，至於剩餘的 96 枚金幣，可能甲得，可能乙得，機會是均等的，所以，甲乙兩人均分剩下的 96 枚金幣，各得 48 枚，亦即：甲乙兩人所得金幣各爲[144；48]。



若今甲贏兩局，乙贏零局，中途停賽而分配賭金，結果應如下：



由上圖知，甲至少獲得 144 金幣，乙至少獲得 0 金幣，而剩下 48 金幣，可能甲得，可能乙得，機會是均等的，因此，由兩人均分，於是，甲得 144＋24＝168 金幣，乙得 0＋24 金幣。

六、實施情況分析

首先，筆者要求每位學生（在課餘時間）寫下他們自己覺得 A、B、C、D 四人的方法可行性如何，再利用課堂時間引領學生討論，最後，揭開此四人的真正身分，希望藉以了解此一工作單如何對機率觀念的導正、加強有所幫助。

針對 A、B、C、D 四人的解法，筆者設計問題如下：

問題 1. 請問你認爲 A 的分法可不可行？請說明（可舉例）。

問題 2. 請問你認爲 B 的分法可不可行？請說明（可舉例）。

問題 3. 請問你認爲 C 的分法可不可行？請說明（可舉例）。

問題 4. 請問你認爲 D 的分法可不可行？請說明（可舉例）。

問題 5. 利用你所學過的機率，此賭金分配問題應如何解？爲什麼？

實施對象有兩班，甲班有 42 人，問卷共回收 35 份；乙班有 43 人，問卷共回收 33 份。針對此 68 份問卷，筆者整理結果如下：

關於問題 1，學生認爲不可行的有 68 份，達 100%，其理由分別有：

- 應就獲勝機率來分才公平，不可直接比例分配。
- 沒考慮到甲和乙勝局有哪些可能，以及往後甲勝或乙勝的可能和場數。有可能甲會在第四場或第五場才勝，以只有在第五場才勝，之後的機率也要考慮進去。
- 因爲有一方先贏三場即停止，所以要分場次討論。
- 若今比數 2：0，則甲得 192 金幣，乙得 0 金幣，不合，因不知最後獲勝是誰。
- 應從接下來甲和乙個別贏得這場比賽的機率來分配。
- 應考慮樹狀圖 $\begin{cases} 甲(1/2) \\ 乙\begin{cases} 甲(1/4) \\ 乙(1/4) \end{cases} \end{cases}$ ，所以甲應得 $\frac{3}{4}\times 192 = 144$ ，乙應得 $\frac{1}{4}\times 192 = 48$ 。
- 從他們出資賭資開始，甲和乙勝負機率各半，不應以某時的比數來決定如何分配賭金，故甲拿 96 金幣，乙拿 96 金幣。

由上述各答案可知，有些學生侷限於所學，依所學方法之答案去判別 A 的方法錯誤與否（在此筆者並不認爲此種說明不好）；有些學生認知到，A 的方法欠缺考慮到未來甲、乙的可能性如何；有些學生找到以此種方法分配賭金的不公平之處（舉例如：某一方勝局場數爲 0 時。）。在此，可以看出雖然每位學生都認爲 A（帕西歐里）的方法不可行，但理由卻

各有所不同。值得高興的，在聽了幾位同學的理由後，大部分學生都能夠接受與認同，並有一些原本只是以答案不合之理由回答的學生，最後也都了解：帕西歐里的方法除了與他們自己所認知的答案不同外，其不周全的地方在哪裡。

關於問題 2，學生認爲可行的有 9 份，達 13.25％，其理由分別有：

- 因爲在接下來的全盤勝之機率目前甲＞乙。
- 因爲這乙分的錢會比本來的多。
- 因爲甲贏一場與乙贏二場的機率爲$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$，即爲所需場數之反比$\frac{1}{1}:\frac{1}{2}$，所以可行。

有些學生認爲可行卻沒寫下理由，在追蹤之下，他們覺得既然舉不出反例，因此認定此法可行。另一方面，學生認爲不可行的有 59 份，達 86.75％，其理由分別有：

- 應從機率，而非場數。
- 因爲次法忽略了接下來勝負場次的各種可能情況。
- 甲以贏兩場，若之後的情況爲

  甲贏：$\frac{1}{2}\times 192$，　乙贏、甲贏：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 192$，　乙贏、乙贏：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 0$

  所以，甲應得$\frac{1}{2}\times 192+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 192+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 0=144$。
- 他沒考慮到每場得勝的機率的不同，將每場視爲相同機率。
- 因爲在此用『反比』沒有任何邏輯，但比 A 進步，有考慮到後續。
- 若由這種方法，則忽略了之前二人勝的場數，思慮不周，所以不行。
- 因爲在接下的第一場勝，和第一場敗而第二場勝的機率不均等，所以，不可以合在一起算。
- 因爲勝有先後順序不同。
- 爲何用反比？沒有依據。
- 今若先勝 10 局得金，甲勝：乙勝＝7：4，所以賭金分配甲得：乙得＝$\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=2:1$

  甲勝機率比乙勝機率大的多，賭金卻拿到甲之一半。

此外，有些學生觀察到，雖然 B (卡爾連奇) 已經考慮到未來甲乙兩人的比賽，但實際上後來的比賽情形如何，B 並未討論，而且其中所用『反比』的方法，讓人覺得沒有依據，只是爲了規定而規定的，沒有說服性。筆者發現：少部分認爲可行的學生，在機率方面學習成就較低。

關於問題 3，學生認爲可行的有 54 份，達 79.41％，其理由分別有：

- 兼顧到所須場數和勝算的關係，不管是乙先贏一場甲再贏，或甲贏第三場的情形，都考慮周到，對甲、乙都公平。
- 乙勝機率：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以甲勝機率：$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。
- 可以，但應是置多需要 m＋n－1 場才能宣布贏家，而不是剛剛好 m＋n－1 場，原來多的那一場只是可以較好算而已，而接下來的分配方法，因以把所有的結果列出來，所以可以。

・$\frac{甲}{乙}(2,1)\begin{cases} 甲\begin{cases} 甲(4,1) \\ 乙(3,2) \end{cases} \\ 乙\begin{cases} 甲(3,2) \\ 乙(2,3) \end{cases} \end{cases}$，正常甲贏三場就結束但若考慮所須場數而繼續，則期望值相同。

$1\times\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，所以依然為甲：乙＝3：1。

・我認為這也像是『紙上』比賽下去，這樣會使機率更接近，這樣分配應算是可行的。

・可算出答案，但並非正確解法，因不可能出現 aa 的情況 (甲到第三場就贏了，不須再比第四場。

・雖然接下來的兩場中，甲贏一場便停止，沒有了 aa，ab 列出之必要，但如此卻的確能在虛擬場數的狀態下舉出甲、乙二人較準確的獲勝機率，畢竟一場 ax 是可以抵掉兩個第二輪比賽的機率的。

學生認為不可行的有 14 份，達 20.59%，其理由分別有：

・aa，ab 中 a 以經贏了，比下一場毫無意義。

・因為每場單盤勝負機率不是甲贏，便是乙贏，單場勝負均等，必須看『總』結果是誰方先贏三場，『至多』來算的話，有可能錯估高了甲或錯估高了乙。

・因為 ab 是不可能發生的。

・aa，ab 根本不須分開討論，只要先出現 a 就定勝負。可能結果應為：a，ba，bb，再用機率來思考。

由問卷可知，許多學生檢驗其答案是正確的，所以，他們認為 C 之法是正確的，而部分學生認為其答案正確，卻無法接受其方法，原因在於『虛擬』的場數，但多數學生卻認為其『虛擬』之處，反而是絕妙之處。

關於問題 4，學生認為不可行的有 43 份，達 63.24%，其理由分別有：

・這種方法有有將之前的結果和後續發展，兩人的機會相等等因素一起考量，所以可以阿。

・他是依照兩人有可能贏的方法來漸漸推算，利用機率，公平。

・因為此比賽應是機會均等，而兩人共分賭金，但由於甲對乙以先有 2:1 的領先優勢，縱使下一場的得勝機率均等，甲的得勝機率依然比乙高。但此法先將所有場錢數算出，先相加再除機率均等的 2。

・和期望值相類似，

$(2,1)\begin{cases} (3.1)機率\frac{1}{2} \\ (2,2)\begin{cases} (3,2)機率\frac{1}{4} \\ (2,3)機率\frac{1}{4} \end{cases} \end{cases}$，其中$192\times\frac{1}{2}=96$，就是甲先拿走的部分，

而$192\times\frac{1}{4}=48$，就是甲、乙兩人後來均分的錢。

學生認為不可行的有 25 份，達 36.76%，其理由分別約有：

・對乙不公平，在(2,2)的情況時，還可再比下去得 $\begin{cases} (3,2)\begin{matrix}\text{甲得192}\\ \text{乙得0}\end{matrix} \\ (2,3)\begin{matrix}\text{甲得0}\\ \text{乙得192}\end{matrix} \end{cases}$，

所以，不應該以這種方式來方配。

・D 只考慮到下一場，沒考慮到下二場。

・如果在甲：乙＝2:1 時，再比一場，結果乙贏了，此時獎金應平分，如果先將 96 分給甲就不公平了，因爲現在已經平手了，結果獎金卻不同。

・我覺得題目在分時，就只考慮了這一次之機率，而未將之前的實際情況也納入考量。

・那並沒有測出第五場的勝負，可能是甲或乙勝，若是乙勝，那甲「至少」得到的錢也會是 0 元。

・此題所述皆屬片面、分段，沒有依『最後的可能結果』區分。

・若今比一百局，而勝局比數 1:0，不是要討論很久嗎?

由問卷得知，約有三分之一的學生認爲 D 之方法不可行，其原因有二種，一是沒看清楚並了解 D 之方法，二是認爲 D 只考慮了未來下一場的情況，而未考慮未來所有的情況。經過課堂上再一次探討欣賞 D 之方法後，大部分的學生發現其實 D 已經考慮了未來所有的情況，並且接受度大爲提高。不過，洞悉到 D 之方法其實與他們所學數學期望値的概念類似者，卻是少之又少。

七、心得與建議

筆者使用本工作單的時機，是在學生學習過機率及數學期望値後，其目的在檢視學生的對於相關觀念的理解。對於有心在一開始介紹機率時便引用此工作單的老師們，我們建議不可直接引用，應稍加更改內容才好。

本工作單提供筆者一個省思，學生考試成績良好並非因爲觀念正確。許多學生還未將觀念澄清，就開始做一大推題目。誠然，由做題目中去學習觀念，也許是學習數學的方法之一，但是，筆者卻總認爲應該在更仔細推敲後，再以做題目的方式去練習運用觀念，這樣的學習才會穩固。在從學生的回答中，我們可以發現，他們對於所學過的「數學期望値」題目，幾乎都可以拿到滿分的評量，但是，爲什麼可以這樣解題，能說得出其所以然之故的學生卻很少。我想，除了學生的學習方式或者有誤外，教師的教法也是重要的一個因素。由最後的結果得知，學生們並不認爲筆者這份工作單的目的在於數學史，而是探討各種方式的可行性與否，並且從探討的過程當中，了解到機率的計算在於討論未來可能的情況以及機會的均等與否。這樣的結果，其實是筆者所希望成就的。

經過本次實驗，筆者了解到一位優良教師在教完觀念後，還要懂得如何多方面檢視學生的了解程度，幫助學生找到他們的認知盲點，才是最好的教學方法。筆者也將努力達此目標。

參考文獻

李文林主編 (1992)，《數學珍寶》，台北：九章出版社。

梁宗亘 (1995)，《數學歷史典故》，台北：九章出版社年。

陳敏皓 (2001)，〈古代數學文本在課堂上的使用—機率小史〉，《古代數學文本在課堂上 的使用》(國科會專題研究計畫成果報告，NSC 89-2511-S-003-031-; NSC

89-2511-S-003-121-），頁 341-356。

Furingghetti, Fulvia and Domingo Paola (2003). "History as Crossroads of Mathematical Culture and Educational Needs in the Classroom", *Mathematics in School*. January: 37-42.

附錄：工作單

若有兩人各出資賭金 **96** 金幣，規定必須要贏三場者才能贏得全部賭金 **192** 金幣，但比賽中途因故終止，且此時勝局數**(甲:乙)**為（**2:1**），問此時應如何分配賭金？（甲乙兩人實力相當）

A認為，其賭金分配應就其勝局比數，即 2:1，依比例分配，因此甲應分得$192\times\frac{2}{3}=128$金幣，乙應分得$192\times\frac{1}{3}=64$金幣。

問題 1. 請問你認為A的分法可不可行？請說明 (可舉例)。

B認為，其賭金分配應考慮若不終止比賽，兩人各須贏幾場，按其各須贏得場數反比分配；即甲已贏 2 場，須再贏一場就可獲賭金，而乙已贏 1 場，須再贏二場就可獲賭金，因此甲所需場數：乙所需場數＝1:2，故其反比為$\frac{1}{1}:\frac{1}{2}=2:1$，由此可知甲應分得$192\times\frac{2}{3}=128$金幣，乙應分得$192\times\frac{1}{3}=64$金幣。

問題 2. 請問你認為B的分法可不可行？請說明 (可舉例)。

C認為，根據至多需要幾場比賽才能看出贏家，如果甲需要再比m場才贏；乙需要再比n場才贏，則需再經過m＋n－1 場才能宣布贏家。以勝局比為（2:1）為例，接下來的二場比賽可能結果列出如下：
（a 代表甲勝，b 代表乙勝）

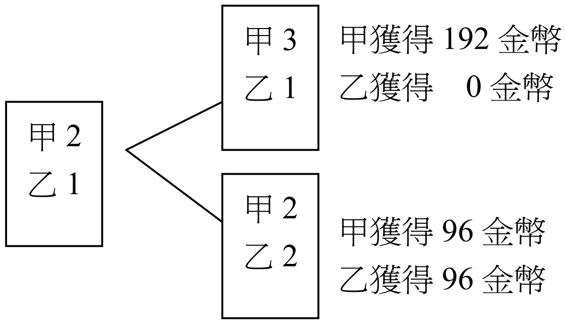
aa	ab	ba	bb
(甲勝)	(甲勝)	(甲勝)	(乙勝)

所以，兩人應該分的賭金比列為[3：1]，即甲可得$192\times\frac{3}{4}=144$金幣，乙可得$192\times\frac{1}{4}=48$金幣。

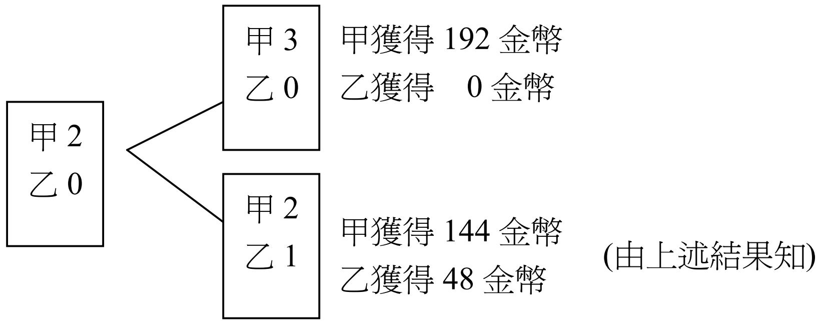
問題 3. 請問你認為C的分法可不可行？請說明 (可舉例)。

D認為，甲贏兩局，乙贏一局，在擲下一次骰子時，若甲贏了，他將得到全部 192 枚金幣；若乙贏了，他們所贏局數比為 2：2，在這種情況之下分賭金，每人將拿回自己的 96 枚金幣。縱上所述，若甲贏了將得 192 枚金幣，乙將獲得 0 金幣；若甲輸了則會拿到 96 枚金幣，乙會拿到 96 金幣，因此甲至少可拿到 96 枚金幣，乙至少可拿到 0 金幣。假如他們不繼續賭下去的話，可將 96 枚金幣先給甲，至於剩餘的 96 枚金幣，可能甲得，可能乙得，機會

是均等的，所以甲乙兩人均分剩下的 96 枚金幣，各得 48 枚，因此甲乙兩人所得金幣各為[144；48]。



因此，若今甲贏兩局，乙贏零局，中途停賽而分配賭金：



由上圖知，甲至少獲得 144 金幣，乙至少獲得 0 金幣，而剩下 48 金幣，可能甲得，可能乙得，機會是均等的，因此由兩人均分，所以甲得 144＋24＝168 金幣，乙得 0＋24 金幣。

問題 4. 請問你認為<u>D</u>的分法可不可行？若不行，請說明 (可舉例)。

問題 5. 利用你所學過的機率，此賭金分配問題應如何解？為什麼?

數學雜談--從數學歸納法談起

台師大數學系助教 謝佳叡

前言

雜談，說穿了就是想到什麼寫什麼，沒有固定的主題，任憑思緒天馬行空的走著。如今回顧，彷彿這些看似毫不相關的主題中，也存在著一個承繫的脈絡。現在，將它呈現出來與各位交換心得，也當成是個人的一個思維紀錄吧。

▓一個遙遠的緣起--「駱駝背上的最後一根稻草」

經常在書籍、報章雜誌或網路上中看到「壓垮駱駝的最後一根稻草（the straw that breaks the camel's back）」這樣的字句，這是來自西方的俗語。駱駝是很能負重的動物，而稻草卻的是極輕之物，但如果不斷往駱駝背上加稻草，總會到達到牠所能承受的飽和點，這時那怕再多加一根稻草，也會使牠承受不了而垮掉。現在，人們經常把它簡化為：「the last straw」，指的是會讓一件事無法再忍而爆發的關鍵事物。

每回看到這一句話，總讓我想起在高中時期，數學老師在教數學歸納法時「為了增加上課趣味」所舉出的一個例子：「試證：人力無窮大。」

▓人力無窮大？

證明方式是這樣的：

假設人可以舉起 n 根頭髮，

（1）當 $n=1$ 時，成立。（人當然可以舉起一根頭髮）

（2）假設 $n=k$ 時成立，那麼再加一根頭髮當然也沒有問題，因此 $n=k+1$ 時也成立。

根據數學歸納法，當 n 為任意自然數時都成立，n 可以到無限大，所以人力是無限大！（證畢）

這個證明當然是錯誤且可笑的，但是這樣的插曲在「煩躁」的數學課中倒也提供了一個趣味，某種程度上也讓學生更加的體會數學歸納法的精神。

這個證明錯在哪裡？答案就在那一根「最後的稻草」，只是這根稻草換成了更為輕巧的頭髮，讓人在認知上更容易接受「再加一根」也可以，想要藉此「偷渡」到 $n=k+1$ 的情況。然而，就算換成更輕的秋毫，甚至是原子、分子，這個「最後的稻草」仍會存在，否則豈不是也成了另一個數學悖論。

「數學歸納法」是數學證明的一個重要的方法，尤其在證明一個與自然數有關的命題。這個方法最神奇的地方，就在它僅需有限的幾步，就可以把無窮多個狀況一個不剩的證明了，這種「如何將無窮轉成有限」的情形倒與微積分中利用「ε、δ」來處理極限的作法，有著異曲同工之妙。

▓「數學歸納法」是歸納？還是演繹？

歸納與演繹是邏輯推論的兩個主要方式。從名稱來看，既然稱為數學歸納法 (mathematical induction) 理應屬於一種歸納方式的推論，然則細查其推論的方法與嚴謹度要求，十足是一種演繹法。歸納的效度取決於機率的高低，數學歸納法卻是不容任何例外的。

那爲何還是稱爲數學「歸納」法？個人以爲大概取的是「由少（有限、特例）推到多（無限、一般）」的意涵（歸納法實質上擴充了前提的內容），也由於數學歸納法要求百分之百的精確，因此有些人成之爲「完全歸納法」(complete induction)。

華羅庚將數學歸納法概括爲：「**1 對；假設 *n* 對，那麼 *n*+1 也對**」，並稱前者爲歸納奠基，後者爲歸納遞推步驟 (夏國興，1999）。在實際解題與教學上，重點也都被放在證明「1 對」和如何從「n 對推到 $n+1$ 也對」。然而，如果僅將數學歸納法看成是這兩個步驟的結合，非但沒有掌握到數學歸納法的精神，甚至在邏輯上是不完整的。

爲什麼說沒有掌握到數學歸納法的精神呢？雖然從「n 推到 $n+1$」這個步驟是證明的關鍵，但它卻不是結論，真正的結論是「所有的自然數都成立」。所以，如果要將數學歸納法做一概括，應寫爲「**如果『1 對；假設 *n* 對，那麼 *n*+1 也對』，那麼所有的自然數都對**」，也因爲學生常將「n 推到 $n+1$」這個步驟當成是結論，忽略了這只是數學歸納法的一個前提，因此經常造成學習認知上的一個混淆。

數學歸納法在邏輯上是典型的利用兩個前提得到結論的推論方式：

如果 • $n=1$ 成立。
且 • 如果 $n=k$ 成立，那麼 $n=k+1$ 也成立。

那麼 n 為任意自然數時都成立

當然了，這些表示條件的語詞是可以更換的，如：「若…則…；假設…那麼…；當…則…」。順而在此稍稍提及，這種推論方式與三段論證、條件論證都有些許差別，不過不在此詳述（雖是雜談，再詳述下去可收不了尾）。

很明顯的可以看出，這個推論的第二個前提中，包含了另一個條件述句，這種條件中有條件的推論形式在其他在地方並不多見，而且結論述句的語詞（term）與前提的語詞差異也很大（這一點與三段論證、條件論證不同），加上學生將所有的焦點都放在導出「$n=k+1$ 成立」上，因此，造成誤將前提當成結論的邏輯問題。

▓「數學歸納法」的理論基礎

數學歸納法的理論基礎是什麼？是根據哪一條公理推演出來的？大概不少人會認爲這類的問題很無聊，對就是對，還需要依據什麼公理!? 這樣的問題或許在 19 世紀以前確實不被重視，但在十九、二十世紀的數學家開始重視數學基礎問題後，這類議題已不再是可以忽視的問題，這不僅牽涉到數學的本質，也關係到演繹數學的有效性。

數學界目前都同意將數學歸納法的理論基礎建立在皮亞諾（Peano, 1859~1932）於 1891 年所提出關於自然數性質的五個公理，後人稱之爲「皮亞諾公理」，其內容如下：

1. 1 是自然數。
2. 每一個數都恰有一個後繼元素。
3. 1 不是任何數的後繼元素。
4. 不同的數，其後繼元素亦不相同。
5. 若自然數的一個集合包含 1，且一旦包含某數，也包含其後繼元素，則此集合爲所有自然數所成的集合。

其中的第 5 條又被稱爲「數學歸納法原理」。個人認爲，與其說數學歸納法原理提供了數學歸納法的依據，倒不如說這個原理是爲數學歸納法量身訂作的。無論如何，它都爲數學

歸納法的有效性，提供了一個理論基礎。

▓誰先開始用數學歸納法？

儘管數學歸納法的理論基礎在十九世紀末才建立起來，但這個名稱的出現與實際使用在證明上的時間卻更早。

最早出現「數學歸納法」一詞，是 De Morgan 在 1838 年爲《小百科全書》（Penny Cyclopedia）寫 “Induction (Mathematics)” 這一條目時所使用的。在這一條目中，他建議使用「逐次歸納法」(successive induction) 這個名稱，並偶然的提到了「數學歸納法」(mathematical induction)，想不到最後這個「偶然」卻取代了原想要用的。而「完全歸納法」(complete induction) 一詞，是 Dedekind 在 1887 年發表的文章後才在德國流行起來 (Miller，2001)。

但是，名稱的出現是一回事，真正開始使用數學歸納法這個方法的卻又早得多，不過，史料上卻十分分歧。許多網路上的資訊，將數學歸納法的第一次使用歸於巴斯卡 (B. Pascal, 1623-1662)，指出他利用數學歸納法證明了 $C_n^r = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$。但一般數學史家認爲最先「明確」使用數學歸納法的人，應前推到義大利數學家 F. Maurolico (1494-1575)（梁宗巨，1989、Hellemans and Bunch, 1991），他在《算術》(Ari Libri Duo) 一書中，利用數學歸納法證明前 n 個奇整數的和是 n^2。然而，鄧宗琦 (1990) 主編的《數學家辭典》卻有不同的看法，他認爲更早的法國學者 Levi ben Gerson (1288-1344) 在 1321 年所著的《計算者的工作》一書，已經首次給了數學歸納法的明確形式，這樣的說法也出現在梁宗巨主編的《數學家傳略辭典》。

更而甚者，在《數學家辭典》一書中提到 Gersonid (1288-1344) 於 1321 年在《計算者的書》一書中，發表了古希臘人早已實際運用了數學歸納法，這一下似乎又將數學歸納法的使用，往前提了一千多年。

▓希臘人已經在用數學歸納法？

再怎麼說，這些記載都屬二手文獻，個人當然無緣也無能力閱讀一手資料，因此，對於希臘人否已經運用數學歸納法一說，只能抱著「姑且一聽」的態度。一日，心血來潮地隨意翻閱手邊所有關於古希臘數學的書籍，想不到眼前就有一個大家都熟悉的例子，如將之還原到古希臘人的寫法，其意涵根本就是數學歸納法的實際運用。

此等運氣，奇妙莫名！

▓證明：「質數有無窮多個」

這是高中課本的一個基本證明題，證明的方式是利用間接證法，先假設質數有有限多個，最後導出矛盾。

這個命題是出現在歐幾里得《幾何原本》中的第Ⅸ卷命題 20。然而，它在《幾何原本》中的敘述卻是這樣的：

> 任意給定幾個質數，則有比它們更多的質數。(Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.)（Ⅸ. 20）

這是一個很重要的命題，現在的教科書中都直接改寫爲「質數有無限多個」，但在當時，

由於數學家對於「無限」這個想法還無法駕馭，因此，必須轉成其他有「無窮」意涵卻無「無窮」字眼的敘述方式。《幾何原本》Ⅸ.命題 20 的證明策略如下：

（1） 先給定幾個質數。（注意：並非假設質數爲有限多的）。

（2） 將這幾個質數相乘，再加 1，得一新數。

（3） 若這個新數是質數，那麼本身就是多得到的一個質數。

（4） 若這個新數不是質數，那麼它一定有一個質因數，而且這個質因數不同於之前給定的質數，如此還是可以獲得一個新的質數。

我們省略掉中間技術性的證明細節，從第（1）項來看，就是假定存在有 k 個質數（「$n=k$ 成立」），而（3）、（4）項就是證明如此必存在有 $k+1$ 個質數（「$n=k+1$」也成立）。我必須承認這種看法有「牽強附會」之嫌，但如此顯然的證明策略下，實在很難去忽視這個證明本身所展現出來數學歸納法的精神。

你可能會問：「$n=1$ 的部分在哪？」這一點只要存在一個質數即可，而質數當然存在，根本無須多言。你可能會再問：「這個證明有推廣到所有的自然數嗎？」我們再想一想，如果它沒這個意思，我們怎麼會把這個命題和「質數無窮多個」視爲同一個！

▩另一個無心插柳

不談數學歸納法，我們深入地看看Ⅸ. 20 這個命題。這個命題帶出了解題上另一個重要意義，就是問題敘述的本身提供了一種解題策略，這跟在題目中限定解題方法意義不同。從「質數有無窮多」這樣的敘述中，一般初學者是很難掌握證明的方向，但轉換成像命題Ⅸ. 20 這樣「你給我多少個，我都有辦法多找一個」的想法，證明的方向就十分的明確了。不但如此，它也將無限變成可操作的想法，這跟微積分中，將無窮小的想法轉成「你要多小，就有多小」，再到「ε-δ」那種你給我一個數，我就有辦法比它小，都有相類似的思維。

另外，在命題Ⅸ. 20 的證明中，引用了另一個命題（Ⅶ. 31），以及很巧妙地運用了一個反證法的技巧。命題Ⅶ. 31 的內容是「任一個合數都可被某個質數整除（量盡）」；而反證法的使用是搭配了整除性（即 $c|a, c|b$，則 $c|a-b$），假設所產生的質數是之前給定的其中一個，根據整除性，也必須整除 1，導致矛盾。

這種技巧與現今教科書利用反證法正「質數無窮多」的技巧是不同的。現今反證法用是假設質數爲有限多個（設爲 $a,b,c,\ldots,k$），取 $p=abc\ldots k+1$，由於 p 不能被 $a,b,c,\ldots,k$ 整除，因此得到 p 爲新的質數，導出矛盾。這其中用到一個技巧是，若一個數無法被比它小的所有質數整除，這個數就是質數。

之所以會如此囉唆的描述這兩個證明的細節，或許各位已經領會到了，無論是古希臘的證明，或是現今的證明，都必須建立在一個設定上，一旦沒有這個設定，這些證明都將崩解。

▩如果 1 是質數！

1 是不是質數？這是一個老調陳談。國中教師手冊第一冊（86 年版）明白的指出：爲了描述定理和公式的方便，我們不把 1 當成質數，舉例來說，想要維持算術基本定理的唯一性，1 就不能是質數。而《幾何原本》裡說的可就更嚴謹了，1 是一個單元（unit），多個單元合起來的才成爲數，因此 1 連「數」都不是，更別說是質數了。

如果先別管描述定理的方不方便，將 1 也定爲質數，那麼上述的兩個證明就無效了，而其他受影響定理更難以數計（可以想像，會有多少定理受影響）！當然了，這並不表示這些

定理都會變成錯的，而是如果 1 是質數，則這些定理的證明必須重新改寫。或許從這兩個例子能更進一步的體認到，1 要被列入質數的大門，大概是指日無望了！

參考書目：

梁宗巨主編 (1989)，《數學家傳略辭典》，濟南：山東教育出版社。
鄧宗琦主編 (1990)，《數學家辭典》，武漢：湖北教育出版社。
夏國興 (1999)，《數學歸納法縱橫談》，台北：九章出版社。
洪萬生 (2002)，〈數學文本與問題意識〉，《HPM 通訊》第五卷第一期。
Heath, T. L. ed. and tr. (1956). *Euclid: The thirteen books of Euclid's Elements.* New York: Dover Publication, Inc.
Hellemans, Alexander and Bryan Bunch (1991). *The Timetables of Science: A Chronology of the Most Important People and Events in the History of Science*. New York: Simon & Schuster Inc.
Katz, Victor (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.
Miller, Jeff (2001). "Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics (M)", http://members.aol.com/jeff570/mathword.html.

訪日雜記

中國西安西北大學數學系　曲安京教授

應東京理科大學理學部數學科小松彥三郎教授的邀請，本人於 2003 年 8 月 20 至 30 日訪問東京理科大學，並連續第三次參加了每年一度在京都大學數理解析研究所（RIMS）舉辦的"數學史研討會"。

屈指算來，這是我第 9 次進出日本，按理說對東京與京都已沒有太多的新鮮感了，以前也從未寫過什麼"見聞"之類的東西，如果不是紀志剛教授的相約，我也是懶得動筆的。好在這次日本之行，確有一些有趣的事情值得彙報，我就權且以日記的形式，大致記錄下此次行程的見聞。

8 月 20 日下午 3 點半，從上海出發的航班準時飛抵東京的成天機場。一出海關，便看到了小松先生的學生若林和明與尾崎文秋舉牌迎候。從機場出來，轉乘火車與地鐵，大約 1 個小時的光景，達到飯田橋站，東京理科大學的主校區就在附近。在地鐵站旁邊的一幢 20 層高的住宅樓裏，有一套 3 室 1 廳的套房，是東京理科大學的"客座教授公寓"。在我們進入電梯之後，若林和明用手機通知了小松先生。當電梯在 11 層停下來的時候，我就看到了等候在那裏的小松彥三郎教授。

8 月 21 日，前橋工科大學的小林龍彥教授、東京學藝大學的渡邊純成教授在小松先生

的安排下，與我一同訪問了東京理科大學的“近代科學資料館”。東京理科大學的前身，是東京物理學校，著名數學史家三上義夫曾在這裏任教，另一位著名的數學史家小倉金之助是東京理科大學的首任校長。在他們的影響下，這所大學一直保持著悠久的數學史的研究傳統，其“近代科學資料館”收藏了非常豐富的中國傳統數學與和算的資料。

小松彥三郎教授自幾年前從東京大學數學系退休，轉任這所學校的教授，便開始招收數學史的研究生，迄今畢業與在讀的學生已達 9 人，在日本已經算是很高的數字了，這些學生畢業後基本上都選擇到中學任教。

8 月 22 日，在大橋由紀夫先生的安排下，與正在東京大學訪問的徐澤林教授一同參觀日本數學史學會暨和算研究所，並會見了日本數學史學會會長佐藤健一先生。和算研究所是幾年前成立的一個無帶薪職員的機構，借宿于東京書籍（出版社），佐藤健一任理事長，竹之內修任副理事長。自 1998 年起，出版學術年刊《和算研究所紀要》。日本數學史學會前任會長下平和夫先生逝世後，將其所有藏書捐贈和算研究所，不過，這些書籍堆放在一間庫房內，尚未進行很好的整理。

日本數學史學會的前身，是日本和算研究會，1960 年代改稱日本數學史學會，並出版《數學史研究》季刊，主要成員基本上都是研究和算史的。在平山諦、下平和夫的時代，這個學會還是比較興旺的，大約有 200 名會員，其中不少成員是日本大學的教授。但是，目前這個學會的大部分成員都是日本高校（相當於中國的中學）的教師，會員數大約 100 人。在十分講究等級的日本學界，日本數學史學會的地位似乎較低，許多在大學任職的科學史家好像都刻意與之保持距離，很少有大學的圖書館訂購《數學史研究》。

8 月 23 日，小松先生邀請我與東京大學教授川原秀成與國際基督教大學教授森本光生在他的家中共進晚餐。川原教授在 1980 年代初曾在杜石然先生的指導下學習中國數學史，現任東京大學中國思想史研究室主任，並擔任韓國思想史教授，曾經將《九章算術》與錢寶琮的《中國數學史》翻譯成日文。森本教授是一位元有名的函數論專家，30 歲左右時從京都大學的教授位置上退休轉任一所私立大學教授，大約 10 年前開始自學中文，並對數學史產生興趣。

席間，小松先生透露，目前的日本數學史界，正在進行兩個比較大的計畫，其一，是日本數學史學會組織的 “建部賢弘（1664~1739）與建部賢明（1661~1716）全集” 的編輯，建部兄弟是和算之聖關孝和（1642~1708）的學生，主要著作是《大成算經》(20 卷)，近年來的研究表明，這兄弟倆，特別是建部賢弘，可能是和算史上最偉大的數學家；其二，由東京大學的佐佐木力教授牽頭的“江戶時期科學與日本近代科學的起源”，專案的總經費大約 4 億日元，其中的主要部分，爲當時的和算史研究。這兩個專案，前者是民間的，注重對史料的搜集與編輯；後者是政府立項的科研專案，注重對江戶時期科學史的綜合研究。兩者的研究人員也多不相重合。

小松先生重點談到了他的計畫，試圖聯合中日韓的數學史家，共同研究宋元數學及其對日本江戶時期和算起源的影響，他大約是想撐起第三支大旗。

8 月 24 日，大橋先生與中國天算史學者橫塚啓之來訪。橫塚先生曾經研究過《授時曆》中的內插法，多年前在中山茂先生的介紹下有過通信交流，這次會面，相談甚歡，並有“天理圖書館”所藏的《宣明曆》刻本的複印件見贈。

原本打算約請在東京的徐澤林、烏雲其其格等中國和臺灣的訪問學者學生聚會一次，但爲了準備次日的報告只得作罷了。

8 月 25 日，中午 12 點，與小松先生乘新幹線到達京都，“數學史研討會”於當日下午 1 點 15 分在京都大學的數理解析研究所準時召開。下午共有三場 1 小時報告，我的報告被安排在第二個。

首先演講的是著名數學家竹之內修教授，他是京都大學每年一度的“數學史研討會”的發起人，去年曾到西安參加“數學史國際會議”，在報告之前，他主動走到我的座位前，祝賀去年會議的成功。竹之內教授的報告題目是“關孝和的《研幾演算法》”，他一開始就說，“爲了配合曲安京先生，小松教授要求他用英語演講。”這使我感到很驚異，因爲當天的會議只有我一個外國人，在我之後的森本光生先生也是用英語做的報告。

京都產業大學的矢野道雄教授專門來參加了我的報告，在當天會議結束後，開車送我至旅館，然後到一家我們多次去過的中餐館共進晚餐。

8 月 26 日，上午重訪京都產業大學。這兩天的會議都是用日文，我基本上聽不懂，也就很少參加，有時去會會京都的老朋友，更多的時間是到京大的圖書館看書，只是在上午會議結束時，和與會者共進午餐。我的出國訪問的一個經驗，就是儘量不要放棄與同行一起進餐的機會，吃飯的時間是最好的交流時間，無論是語言上的，學術上的，還是人際關係上的。

晚上，在一家日本餐館舉辦“懇親會”，體驗京都風格的美食，自願參加，每人 7000 元。

8 月 27 日，幾天來，“數學史研討會”的聽眾基本上穩定在 25~35 人之間，可是當中午才從東京趕來的佐佐木力先生的報告剛一結束，會場一下子就湧進來了許多人，我粗略地估算了一下，人數已接近 60。

接下來的演講者是小松彥三郎教授，據小松說，數理解析研究所同時還在舉辦另一個數學方面的會議，是由他的學生主持的，參加會議的許多人也都是他的學生。這些後來的聽眾雖然是沖著小松先生來的，但顯然並不完全是爲了聽他的數學史報告。實際上，大多數的聽眾，都期待著觀看一場“數學家與數學史家的論戰”，因爲，下午會議的中心議題，是討論“什麼是數學史的原創性研究”？事情原委是這樣的：

小松先生的第一位數學史方向的博士研究生後藤武史今年初畢業，按照日本大學的要求，需要在有評審制度的專業學術刊物上發表一篇文章才能通過答辯。於是，後藤與小松將博士論文中的主要部分送交日本科學史學會主辦的《科學史研究》，但是，出乎他們的意料，這篇文章遭到了該雜誌負責數學史論文審核的編委佐藤賢一的否定，其理由大體說來，就是認定這篇文章不符合“數學史研究”的規範，可以看作是數學論文（基本上是數學家的猜想），但是不能算是數學史論文（缺乏歷史學的嚴謹，例如對史料的考證等）。

由於《科學史研究》採用編委負責制，佐藤賢一先生的意見即爲終審判決，因此，退稿不可避免。而引起小松不滿的原因，除了這個審稿制度的不合理之外，佐藤給出的退稿理由之一，竟然是小松的文章沒有引用佐藤博士論文的相關內容。小松對《科學史研究》的做法大爲不滿，遂向日本科學史學會申訴，在多次的通訊交涉後，要求伊東俊太郎會長給出官方的、正式的公開答復。

由於小松彥三郎曾任日本數學會會長，並且是 90 年東京國際數學家大會的主席，在日本學界地位頗高，因此，日本科學史學會認爲此事十分棘手。但是，在經過了內部的多次磋商之後，除了承認《科學史研究》的審稿程式需要改進之外，並不願意做更多地檢討。

於是，小松先生特意邀請佐佐木力（佐藤賢一的博士導師）、佐藤賢一、日本科學史學會負責人等到京都開會，就“什麼是數學史的原創性研究”展開辯論，但是，除了佐佐木力

之外，其他受邀請者均拒絕出席。儘管如此，辯論照常進行，表面上看，彼此都彬彬有禮，但是，交鋒仍然尖銳。說來話長，希望有時間專門寫一篇文章，暫且就此打住吧。

8 月 28 日，下午 4 點，會議結束。京都之行，又見到了老朋友小川束、城地茂，也見到了去年來參加西安會議的公田藏、小林龍彥等。

8 月 30 日，上午 10 點，電話與矢野道雄先生告別。前往名古屋機場，踏上歸程。

京都大學的“數學史研討會”，是數理解析研究所每年召開的約 50 個會議中的一個，這是一些退休的數學家召集的數學史會議。有更多的數學家在上了年紀之後轉而從事數學史的研究，在我看來，這本是一件好事，因爲，一方面，這些有成就的數學家可以利用他們的影響，爲數學史研究帶來更多的物質資源，從而擴大數學史研究的活動空間；另一方面，數學家的參與，在保持數學史的內史研究傳統方面無疑會起到積極的作用，這對於科學史研究越來越“文科化”的傾向無疑是一種平衡。

在飛往西安的航班上，看著美麗和藹的空姐，回顧 10 天來與溫文爾雅的小松彥三郎教授的相處，忽然就想起了幾年前發生在美國的科學家與科學史家之間的那場“科學戰爭”（science war）。這一次是數學家與數學史家之間的衝突。

這是一場無法避免的戰爭嗎？

Book評論與介紹

一段令人驚豔的邂逅《鸚鵡定理》讀後感

北市中山女高　蘇俊鴻老師

以文學的各種體例來說，「小說」應是最平易近人的一種文體。在一個故事的架構下，省卻對理論的「硬性說教」心理負擔，是它成爲一種適合呈現某種特定「目的」的平台。然而，它也有著一定程度的困難性：想營造出引人入勝的故事是一難；想把自已所要討論的內容巧妙地融入其中又是一難。更遑論是處理像數學史這樣讓人覺得有「厚度」的學科知識，除了要有極佳「說故事」的能力外，更要有深厚的學科素養的硬底子功夫。如今這一切的困難，因爲《鸚鵡定理》一書的問世而打破，也開啓我們對數學史欣賞的另一扇窗。

試想一本想要介紹從古希臘開始至現代，橫跨二千五百年的數學知識發展的相關史料，會是一部怎樣的書？很多人眼前浮現的，恐怕是一本大部頭的專書不可。可是丹尼斯・居耶德 (Denis Guedj) 卻能將這些內容鑲嵌於一個生動的故事之中。故事場景由耳聾的十二歲男孩麥克斯・里亞德在街頭營救一隻鸚鵡開始，迅速轉換到一位不良於行的法國老書商，巴黎 1001 頁書店主人皮耶・魯西先生接到他五十年不曾連絡的老友艾勒加的來信，提及他多年苦心收藏，價值不菲、數量豐富的數學私人藏書，將由巴西瑪瑙斯寄送給魯西，希望魯西先生能珍藏照顧。魯西果然如艾勒加所言，不僅爲這批書成立「雨林圖書館」，也與身旁

的友人組織起討論會，共同研討這些書的內容與相關的知識。

接著魯西又收到瑪瑙斯警察局長的來信，說明艾勒加已經在巴西雨林中被燒死，並轉交艾勒加註明給皮耶的一封信(該說是遺書才是！)，全書的緊張氛圍達到高潮。這封信是艾勒加在生前最後的幾個小時中完成的，艾勒加在信中宣稱他已經証明出「費馬最後定理」與「哥德巴赫猜想」，卻由於個人因素的考量(與他是畢氏學派的信徒有關)，他決定不將這些証明公諸於世。然而他的成果已被一群「和平主義者」（多麼反諷！）獲悉，準備付錢買下他的數學証明，他並不願意將這些結果交給這些人，決定銷毀這些証明。但他又不希望讓它們永遠消失，因此決定將它們交給魯西先生，秘密的線索就藏在信中的字裏行間，他期許魯西先生能找到它們。這個有關「費馬最後定理」與「哥德巴赫猜想」的數學証明線索的搜尋，所成了全書中章節安排的骨幹。

作者藉著這樣的故事發展，穿插出相關的數學史內容，例如討論這批數學書的分類系統，便將幾何、數論、代數及三角學等等的數學分支各自的意義介紹出來；也藉著年份的建立，將數學發展分成三個階段，並隨著情節的鋪陳，讓各階段最重要的數學家逐一上台演出。

第一階段：古希臘數學（大約西元前 700 年至西元後 700 年），在這個階段中，作者認爲重要的人物有：泰利斯、畢達哥拉斯及其追隨者、歐幾里德、阿基米得、阿波羅尼斯、埃拉托塞尼斯、希巴克斯、托勒密、海芭蒂亞等等，[1]共二十位。

第二階段。阿拉伯數學（西元 800 年至 1400 年），在這個階段中，被提及的有阿爾花拉子密、阿布．哈密爾、阿爾法瑞西、阿布．瓦發、卡拉吉、奧瑪珈音、納西爾．阿爾圖西及阿爾卡西等等，共十九位。

第三階段。西方文明數學（西元 1400 年迄今），這個階段中，數學知識的發展蓬勃，加上各種新學門的誕生，如非歐幾何、矩陣、組合論等。不少的數學家投身其中，如塔爾塔列亞、卡丹諾、邦貝利、維塔、納皮爾、費瑪、笛卡兒、牛頓、萊布尼茲、巴斯卡、尤拉、拉普拉斯、勒讓德、柯西、黎曼、阿貝爾、高斯、阿貝爾、加羅瓦、布爾、康托爾……等等，約五十位左右。

仔細描述全書大綱內容，無非是想要指出：這是一本用小說形式包裝起來的數學史書籍！作者的寫作重心，並非是故事本身，劇情的發展，是爲了數學史發展的介紹。在全書二十六章中，第五章到第十一章及第二十四章，是有關古希臘數學的討論；第十二章到第十四章，則是阿拉伯數學的介紹；第十五章到第二十二章，說明了西方文明數學的發展。

在書中，我們看到作者厚實的學科素養及寫作上巧妙的安排。介紹古希臘數學時，當然重心仍擺在那些重要的數學家（如畢達哥拉斯、歐幾里得與阿基米德）及三大問題（『化圓爲方』、『倍立方』及『角三等分』）上，但作者也花了相當工夫提到希臘的第一位哲學家泰利斯的成就；也提到畢氏學派的規訓及傳統。在有關歐幾里德《幾何原本》的介紹中，作者細心地比較「公理」與「設準」的差異。也透過強納森與麗亞這對雙胞胎兄妹的一唱一和，爲我們解說$\sqrt{2}$爲無理數的証明。比起現代數學課本中那個生硬的幾行証明，讓人印象深刻。

描寫阿拉伯人的數學成就上，主要集中在奧瑪珈音、阿爾花拉子密及納西爾．阿爾圖西等三人。章節份量雖說所佔全書篇幅不多，但作者花了許多工夫在描寫這些阿拉伯數學家的生平、所身處的社會環境及宗教傳統，讓我們對阿拉伯數學史多一份認識。

至於西方文明數學的導覽上，雖然作者一開頭提了不少的數學家及新的學門，但整個說明重心則是擺在數論及方程論上的發展及「費馬最後定理」與「哥德巴赫猜想」的歷史發展脈絡上。除了因爲可供書寫的題材過多，必需適度的剪裁外，作者這樣的安排也有其考量：

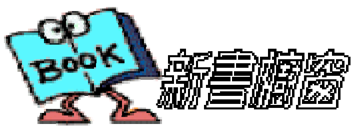
談方程式論的目的，是爲了呼應三大問題的解決；談「費馬最後定理」與「哥德巴赫猜想」的發展與相關的數學家，是故事安排上的必要。事實上，這些題材的理解，讀者所需的數學能力也不至於過於高深，加上作者故意透過對答討論的形式來呈現，閱讀的樂趣不會因而受阻。

整個來說，作者利用小說的形式來呈現數學史的嘗試是成功的。無論是故事開始的營造，尤其獲知艾勒宣稱掌握「費馬最後定理」與「哥德巴赫猜想」的証明，卻又葬身火場，那股謀殺的氣習，不禁讓人好奇心油然而生。作者便引領讀者的好奇心，展開數學史的旅程。一路上，卻也不忘平衡數學史的「厚重」，適時讓故事的發展進行下去，不至於令人感覺過多的負擔。當然，在中文版上也有些錯誤需要留意，除了一些譯名的前後不一致，像書頁封底內頁有關「友善數」的說明：「若有兩個數，其中一數是另一數要素的總和，則此兩數爲「友善數」。」「要素」應改成「因數」爲宜；例子也誤植，應是 220 與 284。[2]

最後，也請別忘記那隻一開場就出現的鸚鵡，它可是作者苦心安排的重要角色。不然怎會在書中被歹徒一路追查，索性連書名也取爲《鸚鵡定理》。至於它爲何重要？謎底就留給讀者自行發掘，全部說清楚講明白，不就失去一窺究竟的樂趣，不是嗎？

註解：

1. 此處數學家的譯名，均依《鸚鵡定理》中文版，台北：究竟出版社，2003 年。
2. 另一處在第 96 頁。關於「友善數」的定義再補充一下，此處「因數的總和」是不包括該數本身，例如 $220 = 2^2 \times 5 \times 11$，所以不含 220 的（正）因數爲 1，2，4，5，11，10，22，44，55 與 110，總和爲 284。至於 284 的部份，讀者動手試試看！



香港經驗：數有心得

台師大數學系　洪萬生教授

鄭振初編，《小學數學教學交流集『數有心得』》
九龍：香港教育專業人員協會，2002 年 12 月
國際書號：962-7598-03-8
定價：港幣 50 元

本書共收錄了十二篇文章，由這十二位小學教師『寫下他們的數學教學心得，讓其他讀者分享數學教學的樂趣，藉此能對小學數學教學有所幫助。』這十二篇文章依序如下：〈教數要成功，情理要兼容〉、〈從學習動機到數學解難〉、〈教師也『建構』〉、〈正方體、六聯方型與空間探究〉、〈不單是計數〉、〈代數學習〉、〈讓人人掌握數學－數學後進生問題〉、〈知識與教學〉、〈心算與速算〉、〈開放

題的設計原則與教學例談〉、〈淺談低年級數學課中的動手操作〉，以及〈轉化、求比解題〉。其中參考文獻遍及港、台、中，可以看出香港小學數學教師社群，已經建立寬闊的國際視野了。

推薦北市興雅國中的數學步道

林壽福、鄭勝鴻主編，《興雅國中數學步道》
台北市：興雅國中
2003 年 6 月出版

台北市興雅國中林壽福、鄭勝鴻兩位老師送給我一本《胚騰 (Pattern) 就在您身邊－不一樣的數學步道》，介紹該校的數學步道，內容相當可觀，很值得我們推薦。

這個步道總共有十站，依序是校門口、川堂、合作社、活動中心、操場、游泳池、半圓形台階、走廊、空中花園，以及圓柱、對稱。至於設計的理念，無非利用這些情境引導學生，以發現在校園中無所不在的『胚騰』。

根據林壽福的說明，「一般步道中常見的估測長度、高度、面積、體積、和計數幾何圖形個數的問題，或者對稱、相似、等差、等比的題材，興雅步道都有。」此外，興雅步道還具有如下特色：1.胚騰與規律的題材相當豐富；2.內容涵蓋國中絕大部分的單元題材，並且進一步加深、加廣、大小題目多達 270 題以上，相當多元與多變；3.融入數學史中數學家發現真理的故事；4.結合戶外活動、藝能科目，並以遊戲方式呈現；5.利用課程中較少觸及的『磚瓦鑲嵌』問題，以培養學生分析、歸納，和推理的能力；6.圖形變換與複印在生活中的應用。

這麼多的工作，當然不可能只靠林壽福、鄭勝鴻兩人完成。事實上，這是興雅國中數學科研究會的集體貢獻，根據該校校長陳美枝的觀察，「他們分工很細：有的設計圖案、題目；有的設計文字編輯、插圖與網頁製作；有的擔任攝影、拍照和網頁支援；有的負責學習單設計，充分發揮團隊精神。」如此看來，他們設計這個步道，並編寫這一本親切娛人的說明書，可以說是為了本土的教師專業發展，樹立了一個典範。

讓我們向陳美枝校長、王祖青、謝永振主任，以及林壽福、鄭勝鴻、劉亦漢、林俊傑、潘裕仁、張雨子、董增萊、林逸哲、莊愷琪、張素惠、周梅芳以及李鈺祺等老師致敬。無論數學教改的是非如何錯亂，『興雅團隊』的努力至少可以啓發我們：想要灌溉數學教育園地，比起口水，汗水誠然實在多了！

論文摘要

《朝鮮算學家學習中國古代數學文本的轉化：以南秉哲 (1817-1863) 《海鏡細艸解》為例》摘要

北市中崙高中 蕭文俊老師

論及中朝兩國的數學交流，由於在歷史上很長一段時間，韓國都視中國爲宗主國，因此朝鮮對中國當然都是輸入遠大於輸出，儘管如此，朝鮮算學家並非只是被動的吸收。但在中國與近鄰國家的文化交流研究中，優先權的論述結構卻往往輕易地抹煞了文化入超國的自主發展。而且，不了解同處於漢文化圈的東亞其他各國的歷史和文化，我們就不能真正了解中國文化本身。綜合以上三點，乃引發筆者希望透過南秉哲（1817~1863）《海鏡細艸解》一書的研究，佐證『朝鮮算學家學習中國古代數學文本的轉化』。

本研究的主體是《測圓海鏡》與《海鏡細艸解》這兩本書，所採用的策略是將這兩本書做全面性的比對研究，進而歸納出本研究之結論，共有以下三點：

首先，在轉化方面，南秉哲先生在態度上是本著自主的立場來學習《測圓海鏡》這本書，而且在學習的過程中，他並非僅是被動的吸收而是主動的理解。以南秉哲（1817~1863）《海鏡細艸解》爲例，確實見證了「朝鮮算學家學習中國古代數學文本的轉化」。

其次，在算學觀方面，十九世紀朝鮮算學家社群對於算學的看法令人驚羨，當代算學家竟能在算學研究之餘，確認算學研究的『正當性』，從而，算學在儒家心性論中的知識位階，也獲得了最大幅度的提昇。尤其難能珍貴的是：他們的理想性竟能結合具體的實踐性作爲，以一種簡明易懂的方式，來達到流傳散佈數學的效果。

這絕非朝鮮數學史的個案，例如：十八世紀儒家明算者趙泰耇（1660~1723）認爲：算學擁有訓練心智與道德實踐的功能。兩相結合之下，隱約可以感受出朝鮮半島自十七世紀末至十九世紀其間，朝鮮算學觀的演化，而十九世紀朝鮮算學家社群是以一種更爲圓熟的態度面對算學，以南秉哲（1817~1863）《海鏡細艸解》爲例，確實見證了這個事實。

至於 HPM 的反思，則在研讀數學文本《海鏡細艸解》的過程之中，筆者見證了：想在數學課堂上適當的運用 HPM，必須要有紮實的數學教育的訓練，更需透過廣泛閱讀好書培養必要的數學史功夫，還要隨時貼近文本並保持敏銳的問題意識，如此或有可能逐漸體會：數學是某脈絡中的一種知識活動 (mathematics in context)，亦即它也擁有豐富的歷史文化向度（或維度 dimension），進而在教學設計中，分享二十一世紀最令人矚目的『多元文化關懷』。

畢業感言

中崙高中 蕭文俊老師

身為教育工作上第一線的我，已在中學任教近十六年的年頭，近年來卻屢屢為與學生之間的教學互動所苦，在教材日益精熟之際，卻也不免流於陳年老套的惡性循環之中，正所謂老狗變不出新把戲，對於自許為專業教師，實為一大羞恥。

何其有幸，89 年我考上了台北師大數學系的暑期教學碩士班，師大數學系的師資陣容堅強，提供的訓練課程不僅嚴謹紮實，而且強調實務與應用，每年暑假 9 學分的課程中，包含 3 學分的數學專業課程與 6 學分的數學教育理論課程。

尤其是在二年級時，接觸到洪萬生老師的數學史課程，為我的教學又開啓了另一扇大門——『HPM』。清晰的記得，洪萬生老師介紹給我們第一篇他所寫的 HPM 文章——〈如何在課堂上使用數學史？〉，裡面寫到：

> **試想數學一旦被認為除了可以而且必須『做』(或學著『做』)之外，原來也可以『欣賞』。如此一來，教師與學生或有可能逐漸體會數學是某脈絡中一種知識活動(mathematics in context)，它也擁有豐富的歷史文化向度(或維度，dimension)。因此，學會了它，不僅我們的生活經驗得以強化，同時，我們的文明品味也得以提升 -- 尤其，我們也可以在這樣的教學設計中，分享世紀末最令人矚目的『多元文化關懷』。**

這些文字初入眼簾，在我的內心造成了極大的衝擊，因為我若有所感，似乎在教學的天地裏還潛藏著無限的可能。

事實上，在論文寫作的過程之中，筆者就愉悅地享受了一趟「HPM 之旅」，也就是說在研讀數學文本《海鏡細艸解》的過程之中，筆者見證了：想在數學課堂上適當的運用 HPM，必須要有紮實的數學教育的訓練，更需透過廣泛閱讀好書培養必要的數學史功夫，還要隨時貼近文本並保持敏銳的問題意識，如此或有可能逐漸體會：數學是某脈絡中的一種知識活動（mathematics in context），亦即它也擁有豐富的歷史文化向度（或維度 dimension），進而在教學設計中，分享二十一世紀最令人矚目的『多元文化關懷』。。

就我而言，在這四年的訓練過程中，不僅在自己的教學活動設計中找到了許多適用的教學資源，更在教學活動進行的過程中，由學生專注的眼神與熱情的參與中，找到了教師的專業自信，這一段歷程雖然走的辛苦，但確實是值得。