HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生）陳啓文（中山女高）彭良禎（麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第六卷 第六期　目錄（2003年6月）

向大師學習！

台灣師大數學系　洪萬生教授

去年六月 12-15 日，筆者應 Otto Bekken 之邀，前往挪威參加阿貝爾 (Niels Abel) 兩百週年誕辰紀念研討會（參考拙文〈阿貝爾兩百年與兩百年的阿貝爾〉，本刊第五卷第八、九期）。此一研討會也同時紀念對於 HPM 國際化最有貢獻的 John Fauvel，他不幸在 2001 年英年早逝（本刊曾在第三卷第六、七期以專輯來紀念他）。

現在，這一研討會之論文彙編已經出版，書名就叫做 “Study the Masters: The Abel-Fauvel Conference”，總共收入論文與紀念文字 27 篇，目錄如下：

1. Otto B. Bekken (挪威 Agder University College 數學教授，北歐 HPM 的代表人物), “Read the Masters! – Read Abel! – a biographical sketch”.
2. Otto B. Bekken, “The lack of rigor in analysis: From Abel’s letters and notebooks”.
3. Harold M. Edwards （美國 NYU 數學教授，知名的數學史家）, “Abel’s view of Abel’s theorem”.
4. Claire V. Berg, “Evariste Galois and his first Memoir”.
5. Harold M. Edwards, “What does it mean to solve a polynomial equation?”
6. Man-Keung Siu (蕭文強，香港大學數學教授，知名的數學史家), “In the Memory of John Fauvel”.
7. David J. Pengelley, “A graduate course on the role of history in teaching mathematics”.
8. David J. Pengelley, “The bridge between the continuous and the discrete via original sources”.
9. Michel Helfgott, “Ten great books in the history of mathematics teaching”.
10. Reidar Mosvold, “Genesis principles in mathematics education”.
11. Kristin Bjamadottir, “Algorismus”.
12. Staffan Rodhe, “Samuel Klingenstierna”.
13. Marit Lahb-Johannessen, “The Norwegian mathematician F.C.H. Aretz”.
14. Nils Voje Johansen, “Capspar Wessel and geometrical representation of complex

numbers”.

15. Kajsa Brating, “Malsten’s proof of the integral theorem”.

16. Johan Prytz, “An early Swedish textbook in calculus”.

17. Bengt Johansson, “Mathematics as a school subject in Sweden – a historical perspective”.

18. Bjorn Smestad, “Historical topics in Norwegian textbooks”.

19. Sten Kaijser, “Are mathematical innovations inventions or discoveries?”

20. Anders Tengstrand, “Back to Euclid”.

21. Wann-Sheng Horng, “A teaching experiment with Prop. IX. 20 of Euclid’s *Elements*”.

22. Peter H. Random (*HPM Newsletter* 主編), “John Blagrave”.

23. Fulvia Furinghetti（現任 HPM 主席）& Annamaria Somaglia, “History as a tool for math education and for research in math education”.

24. Reinhard Siegmund-Schultze (Agder University College數學史教授),[1] “Descartes in the classroom: methodology and coordinates”.

25. Michel Helfgott, “The principle of least time and the phenomenon of refraction”.

26. Steinar Thorvaldsen, “Kepler’s contributions to computing and computer science”.

27. Steinar Thorvaldsen, “Mendel’s experiments as a Markov chain”.

針對這些論文，主編 Otto B. Bekken 與 Reidar Mosvold 特別還做了簡單的分類。前 5 篇與阿貝爾有關，亦即主要是涉及他的數學史論述；後 22 篇則與 Fauvel 有關，亦即是有關 HPM 的論述。此外，第 7-10 篇還特別涉及『何以數學史』(why history?)。第 11-19 篇則是 Nordic 主題，專門以斯堪地那維亞半島數學史爲討論對象，顯然是爲了明年 (2004) HPM 在瑞典召開，而號召當地學者（包括研究生）預作熱身活動。這些論文爲我們勾勒了十九世紀北歐數學如何在德國的影響下，力爭上游的一些片段。這個脈絡當然因爲阿貝爾的現身，而顯得意義非凡。筆者與 Tengstrand 的論文（第 20-21 篇），則以歐幾里得爲主題。最後 6 篇則將背景放在十七世紀歐洲，其中作者包括了 Peter Ransom、Fulvia Furinghetti、Reinhard Siegmund-Schultze。

本書出版資料如下：NCM，2003 年出版；共有 310 頁。國際書碼：ISBN 91-85143-00-6。

註 1. 所謂『數學史教授』(professor of mathematics)，是指這個『空缺』只聘數學史專家，而非一般的數學家。Reinhard Siegmund-Schultze 原來任教於柏林大學數學系，是國際知名的專業數學史家。

三大作圖題

西松高中 蘇惠玉老師

一、楔子

平面幾何作圖中，有很大一部份是尺規作圖。所謂的『尺規作圖』，即是限制只能使用沒有記號的直尺和圓規，在紙上有限次作出曲線。

在國中所教授的平面幾何中，尺規作圖是其中的一個單元，但是，在學習的過程中，學生對尺規作圖的瞭解、重要性或是趣味性，可能都是一知半解，或毫無體會。筆者曾問班上的高二學生，為何『倍立方問題』沒有辦法用尺規作圖解決？學生的回答居然是「當時沒有圓規」！當然，他們對尺規作圖的限制也不是很清楚。

筆者想利用這一篇文章，從尺規作圖的限制談起，看看古典希臘時期研究數學的學者，在那樣的由文化所形成的條件下，對所謂『三大作圖題』的解決所做的努力，並從中一窺數學在條件限制下的解題樂趣，藉以提供教學上的一盞探照燈，照出一條不一樣的教學路徑。

二、幾何作圖的意義

為什麼作圖要有這樣的限制？首先，從希臘的學術風潮來看。泰勒斯 (Thales, 640~546 B.C) 將數學抽象化思考，以及用演繹式證明某些定理，將包含數學在內的哲學，從實用領域提升到思辯的層次。後來，柏拉圖認為數目和幾何觀念是不存在於物質層面的，是超乎經驗而存在的，以『形式』(Form) 存在於某一個理想世界中。對他而言，學習數學是一種「再發現」的過程，他想要去掌握或瞭解自然界現象外永恆不變的真理，數學則為他提供了一條路徑，他在《共和國》(Republic)中，藉由蘇格拉底的話語，道出了他的數學哲學觀點：

> **……有一種知識是我們不可或缺的。我們所追求的這種知識有兩種用途，一種是軍事上的，另一種是哲學上的。因為打仗的人必須研究數目，否則便無法整頓隊伍。哲學家們亦然，他們需要在浩瀚多變的知識領域中，尋找真理並緊握它們，所以他必須同時是一個數論家。……我們必須盡力勸勉城邦未來的領袖學習數論，不僅僅是業餘學習，要不停的學習，直到能夠用心靈來體會數目的存在為止。……領袖們必須為軍事用途和自己的靈性研讀數學，也因為這是使他們能辨別真理和存在的捷徑。**

換言之，柏拉圖認為：數學家們要確實掌握一些用心靈的眼睛才能看記得東西。現實世界中的一切，只是理想世界中「理形（ideal）」的不完美倒影而已，唯有透過數學嚴謹的訓練，才可能掌握不斷變化的自然現象背後的永恆不變的真理。所以，只要有圓和直線這兩個柏拉圖認為最簡單、最完美的圖形，應該就足以描繪其他的圖形了，而且，若允許使用其他的機械工具，那麼，感覺成分將多於思考成分，從而就顯得膚淺且幼稚了。

亞里斯多德原本是柏拉圖的學生，但是他對數學的看法與柏拉圖並不一致，亞里斯多德對眼前存在的物理世界比較關切，他認為數目和幾何也是物體的屬性，數學研究的對象存在於物質世界中，是從物理實體上面所引出來的抽象觀念。而亞里斯多德的主要成就之一，即是為邏輯科學奠定基礎。他討論過定義的問題，認為一系列的定義必須有起點，且定義的概念都必須存在，他以作圖來證明概念的存在。他還處理了數學的基本原理，區分出公理（對所有學科都真）和設準（某一學科可接受的第一原理）的不同。

這些規範都在歐幾里得的《幾何原本》(Elements)中獲得體現。本書無疑是古典希臘時

期集大成的一本重要著作，它的格式與風格，也是古希臘數學文化的一個典範。《幾何原本》共十三冊，以最簡單的二十三個定義，五個公理 (common notion)，五個設準 (postulate) 爲基礎，共四百六十五個命題，以命題間的邏輯順序演繹證明。其中五個設準如下：

1. 從任一點到任一點可作直線 ([T]o draw a straight line from any point to any point)。
2. 有限直線可沿著直線不斷地延長 (To produce a finite straight line continuously in a straight line)。
3. 以任意中心與任意距離可作一圓 (To describe a circle with any centre and distance)。
4. 所有的直角均相等 (That all right angles are equal to one another)。
5. 若兩直線爲一直線所截，使得一側之同側內角和小於兩直角，則將兩直線延伸，必在此側相交 (That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.)。

所謂的『設準』，即是「假設它是對的 (Let the following be postulated)」，在這樣一個前提之下，在設準的 1~3 中，確定了歐幾里得使用工具作圖的基礎，再加上第一冊的命題 3，在歐幾里得《幾何原本》對整個西方數學的強烈影響之下，『尺規作圖』的規範或限制，一直沿用至今。

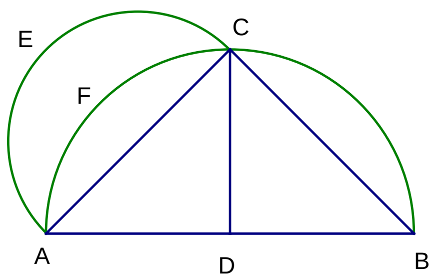
三、三大作圖題

所謂的『三大作圖題』，即是：1. 化圓爲方；2. 三等分任意角；3. 倍立方這三個尺規作圖的問題。數學家們在經過幾世紀的努力，與數學這一門幾世紀的進展，已經證明這三個問題在尺規作圖的限制之下無法作出。但是，希臘數學家面臨這個問題時，並不知道這樣的結果。他們嘗試去解決這三個問題，在尺規作圖的限制之外，另闢蹊徑，這些小徑或許不是花團錦簇，結實纍纍，卻也仍有其可供欣賞之處。

四、化圓為方問題

所謂『化圓爲方』 (to square a circle)，即是做一正方形使其面積等於一已知圓面積。正如前述，希臘人醉心於這個問題，是整個文化影響的結果。例如，希臘時期有許多等面積作圖問題；將不規則形狀化成規則、對稱的正方形等等。研究化圓爲方問題最有名的，即是希波克拉提斯 (Hippocrates of Chios, 約 460~380 B.C) 的「新月形的平方化」。因爲那時代，已知任意三角形可以化成直角三角形（面積相等）；直角三角形可化成長方形；長方形又可化成正方形，所以，如果兩圓相交部分的新月形，可以化成面積相等的三角形的話，整個問題即可獲得解決。

根據第五世紀時的 Simplicius 引述 Alexander Aphrodisiensis 的話，認爲有兩個新月形可以歸於希波克拉提斯。第一個新月形如圖，AB、AC 爲內接於圓 AB 的正方形的兩邊，弧 AEC 爲以 AC 爲直徑的半圓，Alexander 證明：新月形 ACE＝$\triangle ACD$ 。



因爲AC＝BC，又AB^2＝AC^2＋BC^2，所以，

AB^2＝$2AC^2$

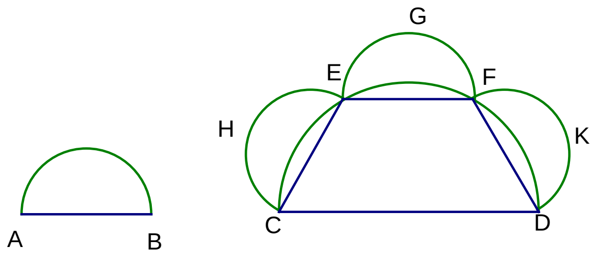
又 $\dfrac{\text{半圓AEC}}{\text{半圓ACB}}=\dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{1}{2}$，所以

半圓 AEC＝$\dfrac{1}{4}$圓 ADCF，

同時減去弓形 ACF，所以新月形 ACE＝$\triangle ACD$。

第二個新月形如圖，AB 是半圓的直徑，CD＝2AB 爲一半圓的直徑，CE、EF、FD 爲正六邊形的邊，且 CHE、EGF、FKD 分別爲直徑 CE、EF、FD 上的半圓。Alexander 證明：

新月形 CHE＋新月形 EGF＋新月形 FKD＋半圓 AB＝梯形 CEFD。



因爲梯形 CEFD＋三個以 AB 爲直徑的半圓
＝以 CD 爲直徑的半圓＋三個新月形，
又 CD＝2AB，所以，
以 CD 爲直徑的半圓＝4（以 AB 爲直徑的半圓），相消後，
梯形 CEFD＝半圓 AB＋三個新月形（CHE、EGF、FKD）。
接下來 Alexander 說，因爲一個新月形已經證明等於一個正方形，所以從可以正方形化的梯形中，減去等於三個新月形的正方形，剩下的圓亦可正方形化。

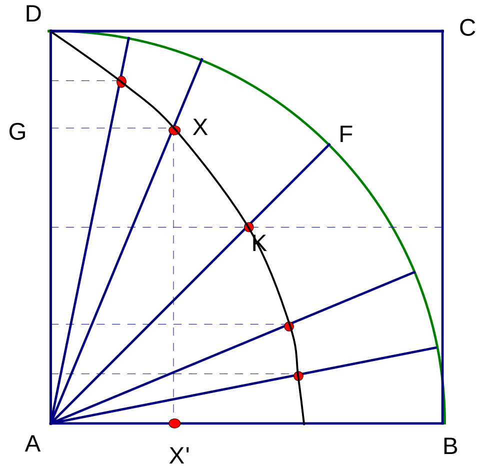
這兩個新月形平方化的證明過程中，錯誤是相當明顯的。第一個新月形是一個特殊化的新月形，在圓內接正方形的邊上，只能說這樣的新月形可以平方化；而第二個新月形，卻是在圓內接正六邊形的邊上；根據史學家 Ivor Thomas 的說法，希波克拉提斯不太可能會犯這樣一個明顯的錯誤，所以，我們只能對 Alexander 的說法存疑。

作一正方形使其面積等於一已知圓的這個問題，其實牽涉到 π 與 $\sqrt{\pi}$ 尺規作圖的可能性。1882 年德國數學家林德曼 (F. Lindemann, 1852~1939) 在『代數數』與『超越數』的基礎下，證明 π 爲超越數，因而不可能利用尺規作圖作出此數，同時，得證『化圓爲方』是不可能的。

但是，如果不限制用尺規作圖的方法、或要滿足尺規作圖的設準的話，就有許多的解法了。簡單的如眾所皆知的達文西（Leonardo da Vinci, 1452-1519）的妙用，他取一圓柱，底面積與已知圓相等，高爲半徑的一半。將這個圓柱在平面上滾一圈時，產生一個面積恰爲 $2\pi r \bullet \dfrac{r}{2}=\pi r^2$ 的長方形，再將矩形化爲正方形即可。另外還有其他如希皮亞斯 (Hippias of Elis, 約 420B.C) 的割圓曲線 (quadratrix)。

所謂的『割圓曲線』如圖。ABCD 爲一正方形，一線段，起始位置在 AB，繞著 A 點從 AB 的位置，以固定的角速度旋轉移動到 AD；第二條線段起始位置也在 AB，平行 AB 地以固定的速度垂直向上到 DC；第一條線段與第二條線段同時分別到達 AD 與 DC，每一個時刻，這二條線段都會有一個交點，這些交點所成的圖形即是所謂的割圓曲線。換句話說，割圓曲線上任一點 X 必須滿足

$$\frac{\angle XAB}{\angle DAB}=\frac{XX'}{DA}$$



『割圓曲線』同樣可以解決化圓爲方的問題。根據 Pappus（約 A.D 320）的說法，Dinostratus (約 350B.C)使用了割圓曲線，來解決化圓爲方的問題。要解決這個問題，首先必須證明在割圓曲線中，

$$\frac{BFD\text{弧長}q}{\mathrm{AB(=r)}}=\frac{\mathrm{AB(=r)}}{\mathrm{AE(=e)}}\text{，即}\frac{q}{r}=\frac{r}{e}$$

這裡 Pappus 用了阿基米德常使用的兩次歸謬證法：證明大於與小於都不成立。由於證明過程過於冗長，此處略過不述。上述式子成立，代表四分之一圓的弧長 q 可以作圖得出，那麼，圓的周長就可作圖。接下來，Pappus 認爲 Dinostratus 應該知道圓的面積，可以表示成以圓周和半徑爲兩股的直角三角形，所以，圓可化成直角三角形，直角三角形又可化成正方形，所以，就解決了化圓爲方的問題了。不過，我們千萬不能忘記：此處用到的割圓曲線，無法利用尺規作圖作出。

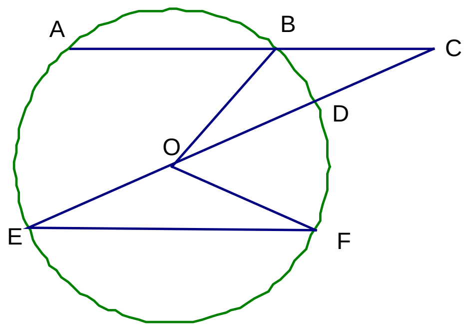
利用『割圓曲線』同樣也可以輕易的解決三等分角的問題。三等分任意角 $\angle XAB$ 時，只要三等分相對的線段 GA 即可。

五、三等分任意角問題

希臘人會試著去三等分任意角，可能是角的平分之後的延伸。許多希臘數學家在這個問題上，發明了許多的「程序」去三等分一個角，其中包括阿基米德 (Archimedes, 287-212 B.C) 及尼可門笛斯 (Nicomedes, 約 240 B.C)。

阿基米德在他的《引理集》(Book of Lemmas)的命題 8 寫道：

如果 AB 是以 O 爲圓心上的任意弦，AB 延長到 C，使得 BC 等於圓的半徑；如果 CO 交圓於 D 並延長到交圓於第二點 E，則弧 AE 等於 3 倍的弧 BD。



證明：作弦 EF 平行 AB，連接 OB，OF，

因爲角 OEF＝角 OFE，

所以，角 COF＝2 角 OEF

＝2 角 BCO（由平行）

＝2 角 BOD（因爲 BC＝BO）

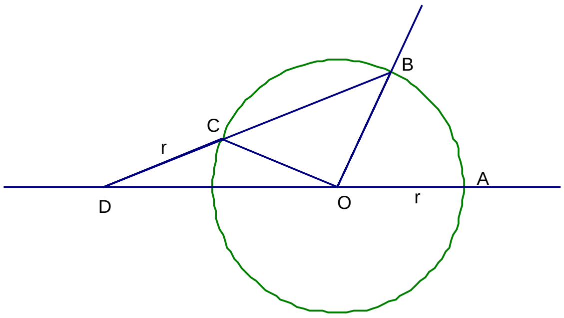
所以，$\angle BOF=3\angle BOD$，弧 BF 是弧 BD 的 3 倍。

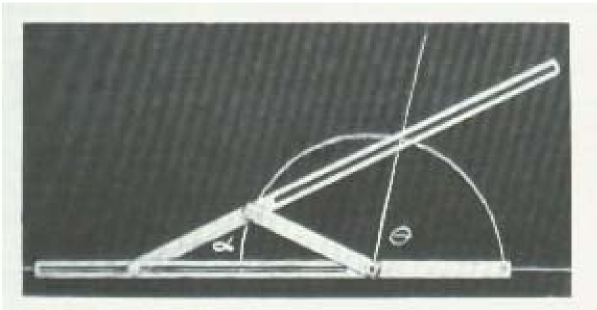
而弧 AE 等於弧 BF，所以，弧 AE 是弧 BD 的 3 倍。

這個命題可以轉化成三等分角的問題：弧 AE

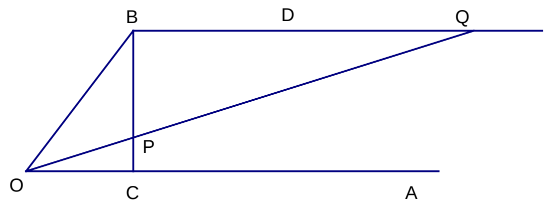
所對的圓心角，為弧 BD 所對的圓心角的 3 倍。但是，問題在於：若 AE 為給定的弧，延長 CO 時不見得會交於 E 點，所以，我們無法用尺規作圖解決。如果不考慮尺規作圖，阿基米德的這個命題可以作出一個工具來解決三等分意角的問題：

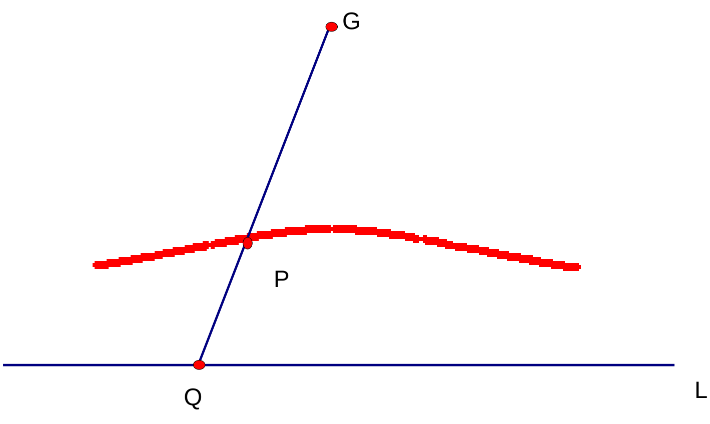
將阿基米得的命題轉換成下圖，$\angle AOB$ 為給定的任意角，過 B 作一直線，交圓於 C，同時交 AO 直線於 D，使得 CD＝半徑 r，則 $\angle ODC=\frac{1}{3}\angle AOB$。按照右圖，在一棍子上固定出 C 與 D 點，CD 長度＝半徑 r，移動棍子，使得棍子交圓於 B 點。





三等分任一角的另一解決途徑，為尼可門笛斯的方法。如圖，角 AOB 為給定之角，過 B 作 AO 的垂線，交 AO 於 C，作直線 BD 平行 AO。在直線 BD 上找一點 Q，連 OQ，並交 BC 於 P，使得 PQ＝2OB，則 $\angle AOQ=\frac{1}{3}\angle AOB$。此時作圖的問題在於 Q 點的決定，尺規作圖並無法作到。但是，尼可門笛斯作了一個新的曲線來解決這個問題，即是所謂的『尼可門笛斯蚌線』(conchoids of Nicomedes)。如圖，若在一根直棍上標示 P、Q 兩點，PQ 的長度為 d，將這直棍繞著一點 G 旋轉，同時 Q 點在另一直棍 L 上滑動，P 點所成的軌跡即是所謂的蚌線（現今的蚌線定義還有另一部份，在 L 的另一邊）。若將上圖中的 O 點訂為 G 點，直線 BD 為 L，P 點為蚌線和垂直線 BC 的交點。





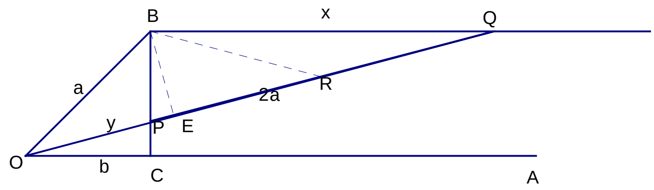
在希臘時期，雖然已經可以用不同的曲線來三等分任意角的問題，例如割圓曲線和蚌線，但都不符合尺規作圖的規定。尺規作圖的不可能性的證明，要等到三次方程式的相關理

論完成後才能證明，同時，這也能證明了倍立方問題的不可能。在這證明過程中，數學家利用到二個理論：1. 一個三次方程式若無有理根，則無『可尺規作圖根』。2. 一次因式檢查法。

藉由尼可門笛司解決方法，如下圖，因爲$\triangle PBQ \sim \triangle PCO \sim \triangle BEQ$，所以$\frac{BQ}{PQ}=\frac{CO}{PO}=\frac{EQ}{BQ}$

而因爲$\triangle ORB$爲等邊三角形，BO＝BR，所以，E 爲 OR 的中點，即

ER＝$\frac{1}{2}$OR＝$\frac{y+a}{2}$，



且 EQ＝ER＋RQ＝$\frac{y+a}{2}+a=\frac{y+3a}{2}$

故，$\frac{x}{2a}=\frac{b}{y}=\frac{y+3}{2x}$，得到一三次方程式$x^3-3x-2b=0$。

若三次方程式有可作出的根x，則BQ可作，Q點決定後，三等分問題即可解決。所以，由上述可知，可否三等分和b的値有關，有相當多的角是可以三等分的，例如，b=0，即角爲 90^0時可三等分，但是，例如$b=\frac{1}{2}$，即角爲 60^0時，方程式爲$x^3-3x-1=0$，並沒有有理根，所以，所有的根皆是不可尺規作圖的，即 60^0無法尺規作圖三等分，也就是說，尺規作圖三等分任意角（除了直角等幾個特別角之外）是不可能的。

六、倍立方問題

關於倍立方的問題，有一個傳說是這樣說的，克里特國王 Minos 要爲他的兒子 Glaucus 建一座立方體形狀的墳墓。但是他聽說建好的墳墓只有每一邊 100 呎，他覺得太小了。“It must be doubled in size.” (體積必須是現在的兩倍)，他要求建築師盡快將每一邊都加倍。很快地，數學家們就發現錯誤所在了，並且思索著解決之道。

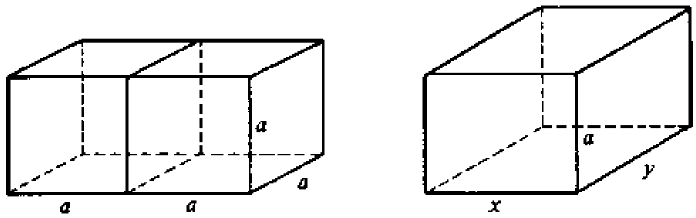
另一個傳說，則是關於 Delos 這座小島的問題。所以，倍立方的問題有時會稱爲 Delian problem。阿波羅藉著一位先知命令提洛島民，要將他的立方體形狀的祭壇體積加倍，並且保持形狀。他們作不出來，就將這個問題拿去問柏拉圖，柏拉圖告訴他們說，阿波羅給出這個命令，不是因爲他要一個兩倍大小的祭壇，而是他要藉著這個苦差事，來強調數學的重要性。

將一個邊長爲 a 的正立方體體積加倍，即是要作出一新的正立方體之邊長 x，滿足$x^3=2a^3$。這個問題被希波克拉提斯歸結爲作出兩線段長 a 與 2a 的兩個連續比例中項。也就是說，要作出兩線段 x, y 滿足

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

x即爲所要求的新正立方體的邊長。希波克拉提斯如何想出這個倍立方問題的兩個比例中項解法，並沒有詳細的記載。據推測，他可能是這樣想的：將兩個邊長爲a的正立方體放在一起，成爲一個立方體長寬高分別爲 2a, a, a，體積爲 $2a^3$；想向將這個立體拉整一下，使其成爲高維持爲a，長寬分別爲x, y的立方體，因爲體積要維持一樣，所以$xy=2a^2$，從中可發現$\frac{a}{x}=\frac{y}{2a}$；再將立方體拉整成長爲x，寬與高亦爲x的立方體。同樣，體積要維持一樣，所以

$x^2=ay$，或$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$。故，$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$。



希波克拉提斯的發現並沒有解決倍立方的問題，只是將問題轉換成另一形式而已。但是，如何作出兩個比例中項 x 與 y 呢？Menaechmus (約 350B.C.) 引入新的曲線，即圓錐曲線來解決這個問題：

將連比例式拆成兩個等式：$\frac{a}{x}=\frac{y}{2a}$ 及 $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$，從此，可得方程式 $x^2=ay$（或是 $y=\frac{1}{a}x^2$），及 $y^2=2ax$（或是 $x=\frac{1}{2a}y^2$）。因爲 a 已知，所以兩個拋物線的頂點、對稱軸能決定出，即兩拋物線的交點可作出，即 x 與 y 可作出。

『圓錐曲線』當然不能用尺規作圖作出，要證明倍立方問題的不可能，也只要用到上述的三次方程次理論即可。設原立方體的邊長爲 1，要作出的立方體邊長爲 x，則 x 要滿足 $x^3=2$，這個方程式沒有有理根，當然就沒有可尺規作圖的 x 了。

七、結語

在本文中，筆者舉出了希臘時期許多三大作圖的『解決』之道，當時數學家們對這些問題有興趣，嘗試在尺規作圖的限制下，解決這些問題。儘管他們未及得知無『不可能』的答案，卻依然能創造出許多有趣的、新的曲線來試圖解決問題。他們的思路過程或是結果，都能成爲我們教學時的另一角度的思考與策略。

參考文獻

Euclid (1956). *The Thirteen Books of the Elements*, translated with introduction and commentary by Sir T. L. Heath. N. Y.: Dover Publications, Inc.

Calinger, R. ed. (1995). *Classics of Mathematics*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bunt, Lucas N. H. *et al* eds. (1988), *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. N. Y.: Dover Publications, Inc.

Heath, T. L. ed. (1897). *The Works of Archimedes*, N. Y.: Dover Publications, Inc.

Kline, M. (1983).《數學史—數學思想的發展》(林炎全、洪萬生、楊康景松譯)，台北：九章出版社。

Dunham, W. (1995).《天才之旅》(林傑斌譯)，台北：牛頓出版社。

梁宗巨 (1992).《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

蘇意雯(1999)，〈數學哲學：柏拉圖 vs. 亞里斯多德〉收錄於《HPM 通訊》第二卷第一期。

閱讀文章感想

《數學傳播》第十二卷第一期：〈π是什麼？〉－Serge Lang 著；洪萬生譯

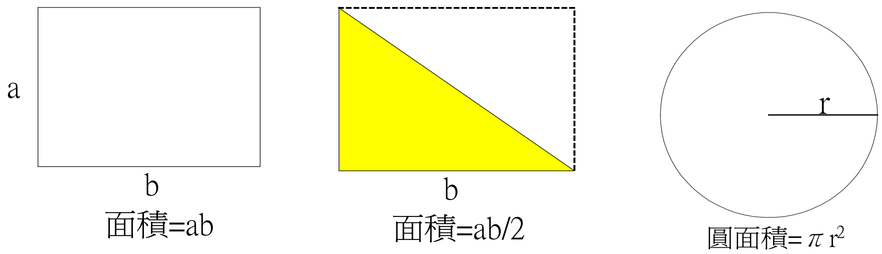
台中市立西苑高中　阮錫琦老師

數學教育的主要目的，當然是培養學生數學思維及獨立思考的訓練。而數學概念的「正本清源」、「類化」及「轉化」的工作，更是數學教育者責無旁貸的首要任務。筆者謹就本文的研讀心得，針對現行中學數學教育中常見的盲點，與各位讀者先進心得分享。

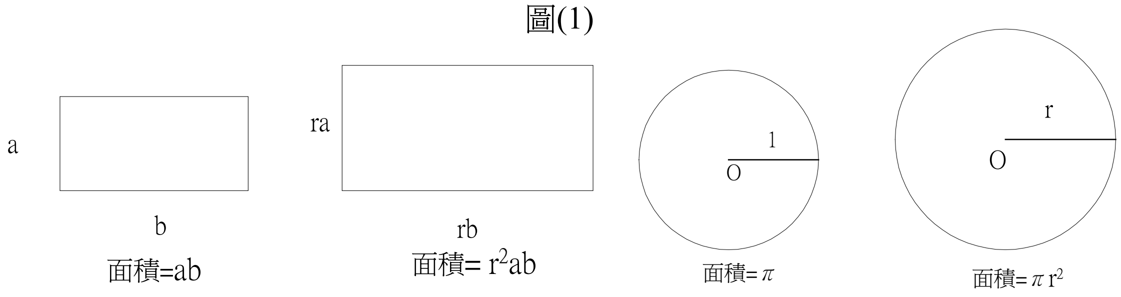
本文根據美國數學家 Serge Lang 向加拿大多倫多郊區，一班十五歲左右的中學生（相當於我國國三學生）的上課實錄，時間約一小時十五分鐘。但筆者只精要節錄其中重要概念，加以介紹。其中對於數學教育的關心，以及生動有趣的教學活動，值得中學數學教師借鏡與效法。

首先，Serge Lang介紹長方形、三角形和圓的面積公式，如下圖(1)。其中長方形面積ab，△面積＝$\frac{1}{2}$ ab，圓面積＝πr^2，圓周C＝π d，d是直徑＝2r。

接著他導入相似形的面積比與邊長的平方成正比，如下圖(2)。

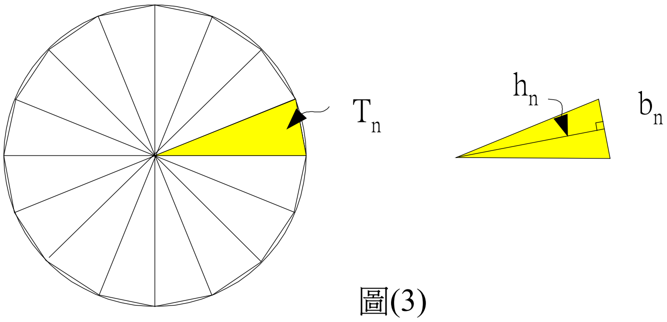


圖(1)



圖(2)

他認為，若將圓細分割成n個三角形，則n多邊形的面積，便是n個三角形的面積總和。當n變得愈大時，n多邊形的周長會趨近於圓周。而且當$n\to\infty$，$h_n\to r$。由於三角形$T_n=\frac{1}{2}b_nh_n$，若正n多邊形的周長$L_n=nb_n$，正n多邊形的面積$A_n=n\times T_n=\frac{1}{2}nb_nh_n=\frac{1}{2}L_n\times h_n$；當$n\to\infty$時，圓周$C=\pi d$趨近$L_n=nb_n$，$h_n$趨近r，圓面積也趨近正n多邊形的面積$A_n$，因此，圓面積＝$A_n=n\times T_n=\frac{1}{2}nb_nh_n=\frac{1}{2}L_n\times h_n=\frac{1}{2}C\times r=\pi r^2$，如圖(3)。



圖(3)

Serge Lang更深的用意，無疑是在介紹面積的基本輪廓。他從長方形談起，然後介紹三角形，進而推廣至一般曲線形。這種處理方式符合「起源教學法原則」。其實，在數學史上也不乏先例。例如，在古中國東漢初的《九章算術》卷一〈方田章〉，在面積的排比上，就是遵守這樣的排序，依序為「方田」→「圭田」→「邪田」→「箕田」→「圓田」→「弧田」→「環田」。[1]當然，僅僅列舉或排比公式，是無法形成面積公式的理論系統；《九章算術》就是幸好有劉徽的註解、證明與系統化，使得一本官僚用的算術公式手冊，被連貫成圓滿的面積理論。

劉徽是魏晉時人，他在證明三角形的面積公式「半廣以乘正從」時說：「半廣者，以盈補虛為直田也。[2]亦可半正從以乘廣。按半廣乘從，以故中平之數。故廣從相乘為數」。換句話說，他的證明方法就是利用「以盈補虛」，將三角形轉換成長方形。（如下圖 4）在證明圓面積公式「半周半徑相乘得積步」時，劉徽利用極限原理，設法將圓形轉換成以半周為從，半徑為廣的長方形，得到「故以半周乘半徑而為圓冪。」在其註解的脈絡中，隱喻了圓周、直徑與圓周率 π 的正確關係：$c=2\pi r$。正因為如此，所以，劉徽利用圓內接正多邊形逼近圓面積的作法，就可以計算 π 的近似值。（如圖 5）但是，唯一美中不足的是，他的論證似乎並沒有蘊含證明 π 是常數的可能性。

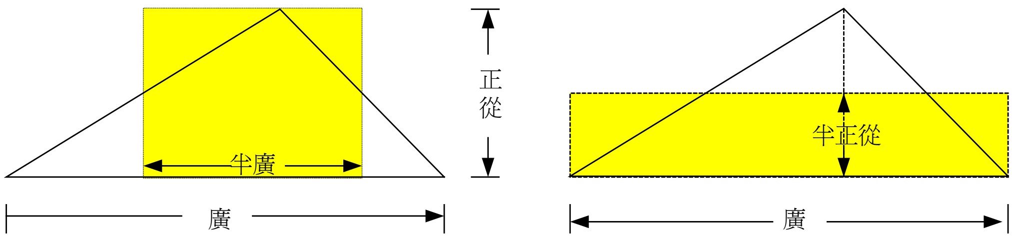
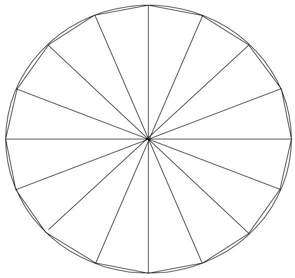
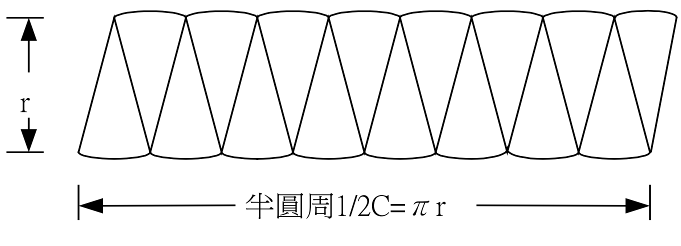


圖 (4)





圖(5)

在西方古典希臘數學方面，歐幾里得（Euclid）《幾何原本》（The Elements）第十二卷命

題 2：「圓面積的比為直徑平方之比」與 Serge Lang 的圓面積伸縮比例觀念相通。而阿基米德（Archimedes）在他的著作《圓的度量》（Measurement of *a* Circle）中，阿基米德證明了：「圓面積等於以該圓半徑和圓周為兩股的直角三角形之面積」與 Serge Lang 的圓面積公式一樣。不過，值得注意的是 Serge Lang 的證明形式，和劉徽的「半周半徑相乘」幾乎一樣，兩者皆運用極限法，而不同於阿基米德的窮竭法。

上述阿基米德的《圓的度量》一書，直至 1631 年，中國明末徐光啓所譯的《測量全義》中卷五「圓面求積」才傳入中國。徐光啓對此做了清楚描述：

> 凡圓面積與其半徑線，偕半周線作矩內直角形積等。依此法則量圓形者，以半徑乘半周而已，古高士亞奇默德（Archimedes，287？～212B.C.）作《圜書》（Measurement of the Circle），內三題洞燭圓形之理，今表而出之，為原本焉。[3]

由於《九章算術》從明初就失傳了，徐光啓似乎未知劉徽的成果。前述《幾何原本》（The Elements）第十二卷命題 2 似乎也沒有傳入中國。否則，說不定他可以將阿基米德與劉徽的方法做一個比較。

至於現行的圓面積公式 πr^2，似乎首先出現在十二世紀著名翻譯家Gerard of Cremona 的拉丁譯作《Verba Filiorum》上。該書源譯自第九世紀阿拉伯著名數學家Banū Mūsa的作品，而且其中指出圓周率乘上直徑等於圓周。

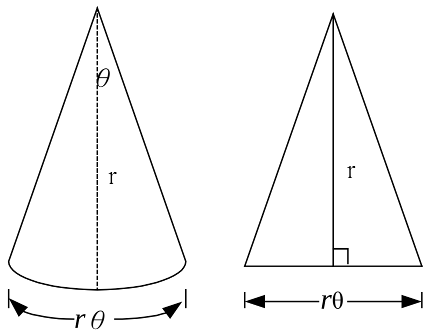
最後，到底「π 是什麼？」，若是當作圓面積公式 πr^2 使用，只不過是抽象、冰冷的數學符號罷了。身爲數學教育者，不妨稍爲佈置歷史場景，加入數學史材料，引導學生走入時光隧道，以講故事方式，讓學生感覺到數學生活化，而有機會跟劉徽、阿基米德等大師對話，必會引起學生高度的興趣。因此，讓學生更能體驗出 π 到底是啥米碗糕？終究，數學教師引入數學史只是手段，讓學生愛上數學課是願望，傳遞數學知識是主要目的。

問題與討論

古中國東漢初的《九章算術》卷一〈方田章〉第 32 題「又有圓田，周一百八十一步，徑六十步三分步之一。問為田幾何？答曰：十一畝九十步十二分步之一。」「術曰：半周半徑相乘得積步」，第 37 題「術曰：并中外周而半之，以徑乘之得積步」。劉徽說：「半廣者，以盈補虛為直田也。亦可半正從以乘廣。按半廣乘從，以故中平之數。故廣從相乘為數」。

以上與扇形的面積公式＝$\frac{1}{2}r^2\theta$ 有何關連？ 試說明之。

國二課程第四冊 2-4〈生活中的立體圖形〉及高中第二冊 3-1〈弧度與扇形〉都介紹的扇形面積公式爲：圓面積乘以 $\frac{\theta}{360^\circ}$（θ 爲扇形所張開的圓心角）。筆者在課堂上曾經引入劉徽「以盈補虛」概念，將扇形面積公式轉換成三角形的公式面積的另類教法（如下圖 6）介紹給學生，結果發現學生的回饋如下：(1) 容易熟記；(2) 易於計算；(3) 容易類比、轉化。值得數學教師一試。



圖(6)

註解

1. 圭田：三角形，邪田：直角梯形，箕田：一般梯形，弧田：弓形。
2. 直田就是長方形。
3. 此法阿基米德的圓面積公式。

參考資料

洪萬生，《中國 π 的一頁滄桑》，台北：自然科學文化事業公司，1981。

洪萬生，《從李約瑟出發》，台北：九章出版社，1985。

沈康身，《九章算術導讀》，漢口：湖北教育出版社，1992 年。

梁宗巨，《數學歷史典故》，瀋陽：遼寧出版社，1992 年。

郭書春，《古代世界數學泰斗-劉徽》，山東科學技術出版社，1995 年。

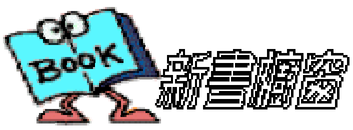
郭書春譯注，《九章算術》，瀋陽：遼寧教育出版社，1998 年。

劉鈍，《大哉言數》，瀋陽：遼寧出版社，1997 年。

錢寶琮，《九章算術點校》，台北：九章出版社，1984。

M.Kline，《數學史》上冊，台北：九章出版社，1979。

Serge Lang（洪萬生譯），〈π 是什麼？〉，《數學傳播》第十二卷第一期（1988）



推薦『數學史學史』新書

台灣師大學數學系　洪萬生教授

由道本周 (Joseph W. Dauben) 與 Christoph J. Scriba 代表『國際數學史委員會』(International Commission on the History of Mathematics) 編輯的《數學史書寫的歷史發展》(Writing the History of Mathematics: Its Historical Development) 問世了。這是國際數學史學界的盛事，也見證了數學史在二十世紀結束前，有幸成爲一個（專業的）獨立學門。

本書共分爲三個部份。第一部份介紹十九個國家或地區的數學史書寫。第二部份則以人物爲主（其中尤其難得地，編入了 24 位數學史家的畫像或照片），提供了主要是十九世紀以降的 300 位數學史家之略傳。至於第三部份，則是收集重要的數學史研究文獻。本書之完成，得力於 32 位數學史家的幫忙，他們針對各個選擇的國家或地區的數學史之研究，提供簡要

的人、事、地、物的歷史背景之說明，其論述不僅包括了思想史之進路，也涉及了社會史的取向，可以說是既時髦又古典。對於有意瞭解數學史學如何演化，以致於成爲一個獨立學門的讀者來說，本書絕對不容錯過！

本書由 Birkhauser Verlag 於 2002 年出版，共有 xxxvii + 689 頁。國際書碼爲 ISBN 3-7643-6166-2（精裝）；ISBN-3-7643-6167-0（平裝）。

數學史如何融入國小二年級的數學領域

台中師院數學教育系碩士班研究生　賴姝秀

數學對小二的學生而言，似乎只有計算而已。但參加了林炎全老師的國科會計劃，讓我有了不同思考方向。如果能將數學史融入小二的數學領域中，是否能給學生在數學方面產生不同的感受？於是，我便開始著手計劃。

在教學內容上，我們所使用的版本是二下『南一版』，主題有二：分別是『主題四—爆米香』（認識 1000 以內的數及二階單位化聚）、以及『主題六—到海邊玩』（加、減法的相互關係和乘除法問題）。而數學史的引進，則主要介紹『羅馬計數系統』，讓學生從生活中去發現我們週遭也存有羅馬數字，並比較現在日常所使用的計數系統與羅馬計數系統之間的差異。其次，我們也介紹數學故事，譬如愛因斯坦、高斯、曹沖秤象等等，讓學生去發現這些人物遇到困難時是如何想辦法解決問題，並且啓發學生從中去體會：只要努力一定可以成功。至於九九乘法故事的介紹，則除了讓學生了解『九九乘法』的由來，更希望學生能從中了解：要多充實自己的能力，將來才有機會去幫助更多的人。

然則如何具體實施呢？在羅馬計數系統方面，先引導學生發現手錶上的符號就是羅馬數字，作爲他們學習的動機，再介紹羅馬計數系統，最後討論：現在所使用的計數系統和羅馬計數系統有什麼不一樣？在介紹數學故事方面，我們分別介紹愛因斯坦生平、高斯生平和曹沖秤象的故事。在九九乘法故事的介紹方面，先說明中國「戰國時代遺址 發現九九乘法表」的報導，再介紹古代的九九乘法傳說（齊桓公的故事）。

實施之後，學生的反應有一些正面的回饋，茲報告如下。在介紹羅馬數字系統方面，因爲小二已開始接觸英文，所以，他們對於英文可以代表數字充滿好奇與新鮮感。然而，現在的數字比較好寫好算，所以，他們都認爲現在的計數系統比較方便。在介紹數學故事方面，學生體會數學是需要動動腦的，更可以向這些人物學習對事情的態度，也有學生表示越來越喜歡數學。在九九乘法方面，針對齊桓公錄用只會『九九歌』的人，有些學生認爲要多充實自己的能力，才能有機會多幫助別人，而且也對齊桓公的表現非常佩服。

整體而言，學生覺得這樣的數學課很有趣，而且很有用處。同事認爲介紹這些給學生，可以讓學生對數學更有興趣，而且，他們也打算將這些資料介紹給他們的學生。家長的反應

也令人欣慰，他們認爲讓學生覺得數學可以靈活運用、不是死板的，而且用這樣的方式，讓學生能快樂的學習，又有很好的效果，同時，更可以讓學生更了解數學是可行的。

不過，我們也必須承認將數學史融入小二課程的確不易，畢竟學生在整個數學的學習上才剛起步而已，很多的數學知識並不了解。幸好在林炎全老師的協助下，我們找出適合小二的數學史內容，並試著落實在我的教學之中。不管是學生、同事以及家長的反應，都對於這樣的教學持肯定的態度，讓我更有信心持續下去。我期望這樣的教學，能讓學生更喜歡數學，並從中去發現、進而能欣賞數學之美。

走過『苦盡』等待『甘來』：畢業論文感言

台師大數學系教學碩士班　李俊坤老師

還記得碩二的課程結束之後，同學們便積極找尋指導教授，義無反顧地爲畢業論文作準備。反觀我一方面總覺得自己能力不足，另一方面，也想偷懶一下稍作休息，於是，遲遲沒有動作。這一「遲」讓我起步比別人慢了良久，再加上對於數學史知識的貧乏，因此，只憑藉著『一招半式』踏上論文寫作之路，想當然走來並不順暢，不過，也正因爲如此，感受特別深刻。

首先，所謂的『一招』，是指每天固定時間從事論文寫作。此招看似無奇、但是却十分有用。像我就是利用孩子都入睡之後，開始寫作工作。現在，回想起當時情形，在每天的 22 點之後，我便開始研讀文本或參考資料，寫出摘要或心得。有時，會讀到興起竟忘了睡覺 (危險舉動，不宜模仿)，以致於隔天上班哈欠連連。當然，也有毫無頭緒的時候，這時就進行打字工作，將覺得會用上的資料都 key 入電腦之中。就這樣日積月累下來，不僅字數慢慢增加了，連定時寫作的習慣也逐漸養成。如此，達成目標便指日可待了。

其次，說到「半式」，也是將之前所 key 入的資料重新排列，雖然只是剪剪貼貼的工作，但是，該剪那裡又要貼在那兒才能詞通意達，可就是此式的精髓所在了。爲了掌握此一技巧，多看別人文章，或引用，或模仿，便是我常使用的方式。碰到「詞窮」之處，也常令我想到無法入眠，不過，等到文句暢通之時，心裡也跟著舒暢起來，失眠的苦，打字的累也就不記得了。

我就在這『一招半式』的揮舞之下，渡過了一連幾個月的寫作夜晚。對於獲得的一些成功的經驗固然歡喜，若再將這些成功的經驗加以移植，複製更多成功的經驗，這種感覺更是振奮人心。不過，那也是『苦盡』之後的『甘來』。正如之前所提寫作之路，走來並不順暢，

因此，毫無頭緒鍵入資料的窘境，反倒是經常出現。還記得好幾次，一連幾天的工作成了打字練習，心中的挫折可想而之。不過，最嚴重的一次，便是在苦尋不著文本作者晏聯奎的相關資料之時，不僅連續幾天進度停擺，更是動搖了研究的目的而甚至想要放棄。於是，求援於洪老師，他曾舉過一個例子，點醒了我讓我走出死胡同。他說:『解一道題目，作出結果給出答案，往往是人們追求的目標，但是提供一個解題的方向，供人參考，也未嘗不是另一種形式的答案』。

因此，我重新思考研究內容，心想在清代科舉不重視數學的制度下，數學教育可說是幾乎不存在，晏聯奎以一個書院老師的身份，在此環境之下爲初學者寫書，這份心意，不正也是提供人們了解晏聯奎的另一個面向。有了方向，心中便踏實多了。另外，這個想法，也幫助我渡過很多低潮期，舉例來說，上圖書館找資料時，幾個小時下來毫無收穫，往往令人沮喪，但是，相反的這不也告訴你，那裡沒有你要的資料，不也是一種收穫嗎？而之前的打字練習，不也是將別人的文章，用力的『key』了一遍，對於模仿別人寫作技巧的訓練，也是不無小補。就這樣寫作時的苦，我會以起步比別人慢的事實來警惕自己，也會看著『字數』一天一天增加來勉勵自己，懷著不怕作白工，就怕不作工的心情，走過『苦盡』等待『甘來』。

總括來說，我認爲寫作時「心」最爲重要，要對於所研究的人物，主題給予認同肯定，畢竟走過就會留下痕跡，順著痕跡走，或許可走到彼岸、也或許是在繞圈子，甚至可能是死胡同，但是，不論如何，這一步一步走的過程，才是我撰寫論文的最大收穫！

編按：李俊坤在洪萬生教授的指導下，以《《中西算學合訂》內容之研究》於 2003 年 1 月獲台灣師範大學數學系所數學教學碩士學位。我們恭喜他如願得償。按本書作者乃中國清末數學家晏聯奎（1820-1890？）。