HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生）陳啟文（中山女高）彭良禎（麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第六卷 第五期 目錄（2003 年 5 月）

虛數的妙用

中山女高 蘇俊鴻老師

談起「虛數」這個詞，只要學習過高中數學的人，不難聯想到 $\sqrt{-1}=i$ ，相信也順便想起那段與 i 磨難奮鬥的時光。對許多人而言，學習將數系由自然數→整數→有理數→實數逐一階段地擴展開來，還說得上道理。但遇上複數後，始終搞不清楚爲何弄個怪裏怪氣的傢伙，讓自己一個頭兩個大。不僅數的很多性質不再適用(例如比較大小)，連描述複數系的結構，也得利用平面來對應說明。主要是爲了在複數 $a+bi$ ($a,b\in R$)中納入虛數 i ，只好將不相容的實部 a 與虛部 bi 分開；但又爲了能融合兩者，只好採用二維的平面來表徵：以 x 軸表示實部；以 y 軸表示虛部。事實上，在數學史中我們也看到數學家從抗拒它的出現，到不得不接受它，進而利用它，也花了幾百年的時間！

近來在史蒂芬．霍金所著《胡桃裏的宇宙》看見這個想法被理論物理學家拿來解說時空模型，相當有趣。整個故事我們得由「時間是什麼？」這個一直困擾人們的問題(至今仍然依舊)開始談起，首先登場的是牛頓。

在 1687 年所出版的《自然哲學之數學原理》(Principia)，牛頓提出了第一個時間與空間的數學模型。在他的模型中，時間與空間是萬事萬物的背景，卻不受萬事萬物的影響。時間獨立於空間之外，像是一條直線或鐵軌，往兩端延伸沒有盡頭；而且是永恆不變的。換句話說，它過去一直存在，將來也會繼續存在。這樣的模型，符合多數人對時間的感覺，卻引起哲學家(包括康德在內)極大的困擾：假如宇宙是被創造出來的，那麼在創世之前，爲何會等待無限長久的時間呢？另一方面，假如宇宙過去一直存在，那麼該發生的事不是應該都發生了？歷史不就早該終結了？康德將這個問題稱爲「純粹理性之二律背反」，因爲它似乎是邏輯上的矛盾，根本不可能有解。事實上，這個矛盾只存在牛頓的數學模型中！因爲其中的時間是一條無限長的直線，與宇宙中任何事物毫無關聯。這個缺陷得以解決，是愛因斯坦的功勞。

愛因斯坦在 1915 年討論彎曲時空的觀念，提出廣義相對論，並在 1919 年得到實驗証實後，使得我們對於時間與空間有了不同的看法。廣義相對論將時間維度與空間的三個維度結合起來，形成所謂的「時空」。這個理論將重力的效應包含在內，討論物質與能量的分布

會讓時空彎曲變形，因此，時空並不是平坦的。也就是說，在這樣的時空模型中，雖然物體會試圖沿著直線運動，可是，由於時空彎曲的緣故，所以，它的路徑看起來也是彎曲的，彷彿受到重力場的影響。在廣義相對論中，時間與空間糾纏在一起，如何也解不開來。你想要讓空間彎曲，一定會牽連到時間，因此，時間也就有了形狀。廣義相對論使得時間與空間從一個物理的舞台，搖身成爲物理過程的主動參與者。

另一方面，在廣義相對論中，時間與空間並非互相獨立，也並非獨立於宇宙之外。想要定義這兩者，必須利用在宇宙中所進行的測量，例如利用鐘錶內石英晶體振盪的次數；或是利用一把直尺。這樣一個「在宇宙裏」所定義的時間，應該有極大值或是極小值，亦即有終點與起點。至於起點之前發生什麼事？或是終點之後會發生什麼事？其實這一類問題都是沒有意義的，因爲那些時間根本沒有定義。至於要如何描述時間與空間的形狀，就必須引入「虛數時間」的想法了。

所謂的「虛數時間」是什麼呢？必須先由「虛數」談起，如果將實數看成對應於一條水平線上的各個位置的數，零在中間，正實數在右邊，負實數在左邊。如此一來，虛數可以看成對應於一條垂直線上各個位置的數，零仍然在中間，正虛數畫在上面，負虛數畫在下面。因此，我們將虛數視爲一個新的數，與實數相互垂直，不需要任何的實質意義。而「虛數時間」則是指由虛數來度量表示的時間。或許很多人認爲這樣定義下的「虛數時間」只是個數學遊戲，史蒂芬．霍金倒是爲數學的價值說了番好話：

> 或許你會認為，這代表虛數只是個數學遊戲，與真實世界沒有任何關係。然而，就實證主義觀點而言，我們無法斷言什麼是真實。我們所能做的，只是確定哪些數學模型適合描述我們置身的宇宙。結果証明，用到虛數時間的數學模型不僅能導出已經觀測到的效應，還能導出我們目前測量不出，卻基於某些原因而深信存在的效應。所以說，什麼是實，什麼是虛？分別是否只存在我們心中？

在廣義相對論中，實數時間與三維空間結合成四維的時空。可是，實數時間維度與三個空間維度卻有明顯的不同：時間總是由過去流向未來，而在空間中則是能向前進，也能向後退。換句話說，我們可以在空間中轉向，但在時間中不能這麼做。然而在「虛數時間」中，由於它垂直於實數時間，彷彿是第四個空間維度，擁有的可能性就大大地增加，在這樣的架構下，時間才會出現形狀！

讓我們來看幾個例子，首先考慮一個虛數的時空，結構類似地球表面的球面，並且假設虛數時間是緯度(如右圖)，用距離南極的遠近來表示虛數時間。那麼，在虛數時間中，宇宙的歷史就是由南極開始。你不能問：「開始之前發生過什麼？」這是個毫無意義的問題，那樣的時間根本沒有定義，就像南極之南不存在一樣。在地球表面上，南極是個完全正常的點；所有其他地點適用的幾何法則，在南極一體適用。從南極出發往北走，緯圈會逐漸變大，這對應於宇宙隨著虛數時間而擴張。在赤道處，宇宙達到極大值，倘若虛數時間繼續增加，宇宙便會開始收縮，最後在北極處縮成一點。然而，即使宇宙在南北兩極沒有大小，這兩點也不是奇異點，正如同地球的南北極是地球表面完全正常的兩點。這就意味著在虛數時間中，宇宙的起源可以是時空中的正常點；宇宙其他時刻所適用的物理定律，在這個起點也同樣適用。

再看個例子，在球面狀的虛數時間時空中，虛數時間不但可以對應緯度，也可以對應經度。因爲經線全部會在南北兩極交會，所以，時間在這兩點停滯不動。即使虛數時間增加，你還是停留在同一點。這就好像地球的北極向西走，怎麼走仍是停在北極一樣。所有的經線都在南北兩極交會，因此，虛數時間在那兩點是停滯的。也就是說，即使讓虛數時間增加，你還是會留在同一點，這非常類似於在黑洞視界上，實數時間顯得停滯的情形。

你看，誰說學「虛數」沒有用呢！

附註：本文改寫自史蒂芬．霍金所著《胡桃裏的宇宙》，中文版由葉李華譯，大塊文化出版，2001 年。

閱讀文章感想

《數學傳播》第 2 卷第 3 期：〈啟發式教學〉－李國偉譯

《數學傳播》第 2 卷第 4 期：〈坡里雅教授的一封信〉－張漢珍譯

國立蘭陽女中　　陳敏皓老師

學習數學的主要目的，當然是在於培養學生數學思維能力及獨立思考的訓練。不過，目前高中數學教育卻太著重於數學解題能力，這雖然有助於學生對於問題的思索，但過多的解題練習，往往抹煞了她（他）們學習數學的興趣，也讓她（他）們享受不到數學嚴謹結構之美。李國偉先生的這篇〈啓發式教學〉，是譯自《教中學數學》（Teaching Secondary School Mathematics）第九章第二節，是針對中學數學教師而寫的文章，所以，非常適合我們中學數學教師閱讀。而〈坡里雅教授的一封信〉，則是作者得到坡里雅教授的同意而轉載，雖然文章簡潔卻有其傳遞教育意念所在。

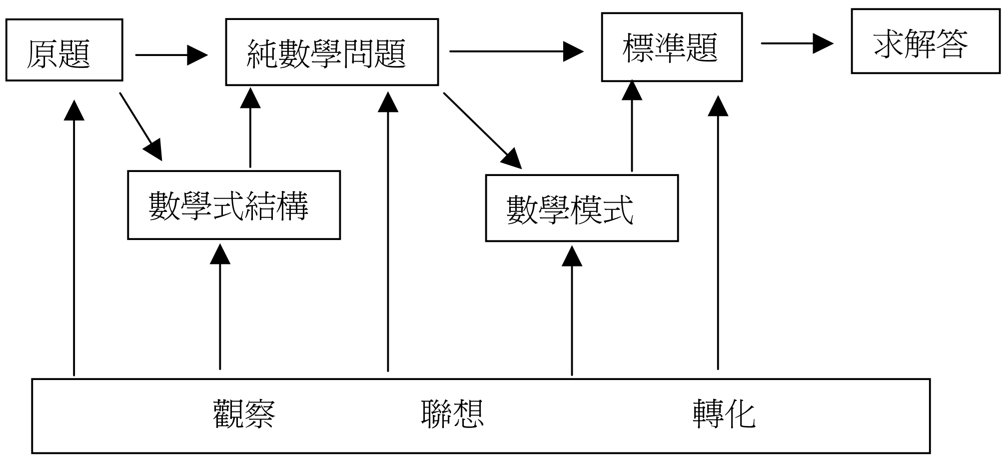
先談啓發式教學。它是由一連串問題所構成的，藉由師長的引導式發問，來誘發學生的自動學習。這篇文章主要從「解題」、「了解題目」、「擬定計劃」、「實行計劃」、「再檢查」分類出發。有感於此篇文章的『啓發』，我將大學時代所購買的《怎樣解題》一書，重新翻閱一番，竟有完全不一樣的感受，當我在大學時代看此書時，總覺得無法真正咀嚼其中滋味，可能是念數學系的學生對於文字較爲冗長的書籍，往往缺乏耐心讀完，囫圇吞棗的結果，反而徹底失去念書的動機。如今我雖已成爲高中數學老師，對於如何引導學生主動學習，有了一些實際面上的教學經驗，因此，重新閱讀《怎樣解題》一書，才能深刻體會爲什麼有這麼多數學系教授推薦學生詳閱此書，心中所得到的共鳴，是外人所無法領會的。

坡里雅教授將數學解題策略分爲上述四個步驟，相信這是許多人所耳熟能詳。學生在學習數學的思考過程中，如果能常常溫故此四原則，那麼，一定能很快掌握住數學精神所在。在此，我想特別強調瞭解問題的重要性。近年來，由於學生的中文造詣普遍下降，[1]學生往往因爲不明白題意而喪失得分的條件，所以，在教數學的過程中，有必要要求學生務必要先

看清楚題目（也稱爲審題能力），弄清楚題意中的主要概念，其中再分別已知數與未知數的條件。回頭過來看坡里雅教授的數學解題策略，他強調教學過程中啓發推理的重要性，他認爲：

> 啟發推理本身是好的，壞的是把啟發推理和嚴格證明混同起來，更壞的是為了嚴格證明而丟棄了啟發推理。

我想這是值得各位省思的一句話，固然每個人對於啓發式教學都會有正面的看法，但是，如果時間上不加以控制的話，往往會造成教學上的耽誤。[2]至於老師此時所扮演的角色，就是在學生思維的活動中，提供正確且可行的途徑，因爲人類在大腦中的思維過程中是看不見的、摸不著的，大致都循序著『觀察－聯想－轉化』的步驟進行，如果老師能在聯想及轉化的步驟中，提出適合學生的解題模式，無疑是最佳的教學策略，可由下圖看出。[3]



學習數學最好的方法，就是實際上去做、去了解問題其中的意涵，而最好的教法，就是能使學生有反應，問問題，解問題，可不要一味的灌輸，傳道式的講事實－要富刺激性、啓發性才好。[4]而其中的問題探索，往往才是數學思想的本源，因此，數學老師一定要學習如何引導學生，從問題中來思考一些數學性質，正如坡里雅教授所言：

> 在所有的數學領域中，問題皆處於一極為重要的地位。藉由解決問題，學生才能充分的了解教材。而授課的教員也方可由學生們的解題過程，獲得評斷學生程度高下的依據。雖然高年級的學生可以作些其他種類的功課（例如參加研論會），但對大部份的學生而言，解題是學習過程中的主要部份。[5]

所以，如何將問題引導到更引人入勝，更吸引學生的注意力，就成爲數學老師必修的一個課題了。至於數學解題也不要拘泥於一條思路、一種方法。一般而言，初等的數學問題（包含數學競試問題），都有多條思路，及多種解法，只有一條蹊徑的解題模式是極少的。所以，當一個學生累積足夠的解題思路後，若遇上較大的困難時，就會立刻轉移思維方式，這就是思考的多樣式原則。[6]

至於在啓發式的過程後，教師們應適當地引入『反思概念』，因爲在解題過程完成之後，

學生可能不完全了解此題的意義，或者全部遵照老師的引導而行，缺乏自己的概念與想像，因此，藉由『反思概念』以達到自我察覺的能力，同時可以防止思考中的謬誤，並且養成數學思維不受一解、一法、一式的規範，培養數學思維的靈活性，同時將數學題材加以推廣與修改，從而獲取新知，我想這其中的訓練過程，就是數學最迷人之處了。最後，我想引用《幹嘛學數學》中一段話做爲總結：

> 如果生涯規劃的目標很明確，要決定高中時期修多少數學課。數學念太多總比念太少好得多，生涯規劃的目標會變，但如果念的數學不夠，在接受新的教育或職業訓練時，就購成很大的障礙。而且數學能力越強的人，不但可以選擇的就業機會越多，也越能把工作做好。[7]

這一段話是不是很有鼓勵作用？也希望站在第一線的數學教育工作者，不要灰心，Keep going！

註解：

1. 以筆者的高中生數學教學經驗來說，學生在學習『排列組合』時困擾最大，例如：七人中，ABC 三人完全相鄰、完全不相鄰、不完全相鄰的排列數。
2. 一般而言，中學數學的啓發推理格式有五種：綜合法順證格式、分析法逆推格式、反證法三步格式、窮舉法討論格式、數學歸納法格式等五種，每一種使用起來均需要頗多時間。
3. 參考胡炳生，《數學解題思維方法》（台北，九章出版社，1991），第 8 頁。
4. 引自 Paul R. Halmos，〈論數學教學（上）〉（黃文濤譯），《數學傳播》第一卷第一期：第 49 頁。
5. 引自張漢珍譯，〈坡里雅教授的一封信〉，《數學傳播》第二卷第四期：第 86 頁。
6. 參考胡炳生，《數學解題思維方法》，第 17-18 頁。
7. 引自 Stein, Sherman K（葉偉文譯），《幹嘛學數學》（台北：天下遠見出版股份有限公司，1999 年），第 90 頁。

參考文獻：

Renyi, A. (1992)，《數學對話錄》，戴久永譯，新竹，凡異出版社。

Stein, Sherman K. (1999)，《幹嘛學數學》，葉偉文譯，台北：天下遠見出版股份有限公司。

九章出版社編著(1992)，《如何培養數學能力》，台北：九章出版社。

坡里雅著(1978)，《怎樣解題》，張憶壽譯，台北：長橋出版社。

胡炳生(1991)，《數學解題思維方法》，台北：九章出版社。

閱讀及教學心得

中山女高 陳啟文老師

波利亞 (George Polya) 認爲教學並不像一般科學，可以按既定的理論或是事實的規律一成不變的進行，也許更像藝術家的工作。教師必須對他所授的內容具備充足廣闊的知識背景，清楚某些數學思想發展的歷史，能明白教學的重點所在，看得出各個不同模式蘊涵的實質意義。克萊因 (F. Klein) 認爲科學的教學方法，只是誘導人去作科學的思考，而不是一開頭就教人去碰冷漠的，經過科學洗鍊的系統。

波利亞在〈課堂上的目的〉一文的開頭，點出了上述他的理念與信仰，在這思維與概念下，大致說明其教學經驗如下：

一、 鼓勵學生主動參與教學活動，作者以排列組合的問題：「有甲、乙、丙、丁、戊、己等 6 人分配住進 A、B、C 三個房間，規定每個房間最多住 4 人，若甲、乙同房，有多少種分法？」爲例，希望老師不必急於解答，讓學生說明自己的想法，即使學生在討論中逐漸形成數個小團體，各自堅持自以爲是的結論，老師亦不需焦急於判決是非，而在於知道學生某些偏向的思考以及在整個活動的如何進行。

二、 過於乏味的教材，欠缺探索的學習過程，都會帶給學生疲倦，失去學習興趣。因此.，他將數學問題轉成行星軌道的問題，要學生計算以$y = x^2$爲軌道的慧星，行進中距離　　直線$x-2y-2=0$ 最近多少？讓學生感受到不與實際生活脫節，從猜測、嘗試中，引導學生找出最近的位置。

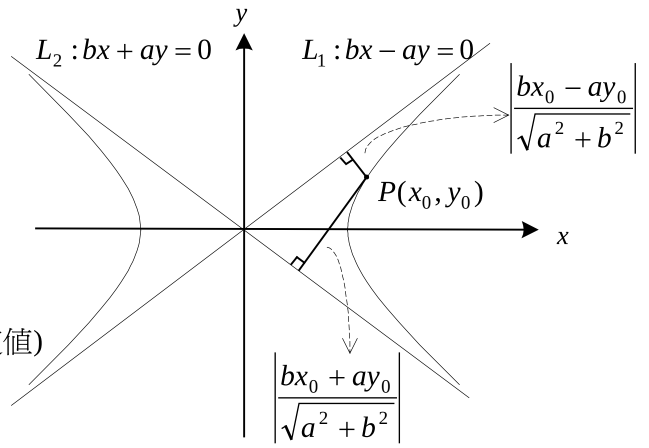
只是上述所提，大底離不開所謂教材教法的的改變，也是從事數學教育工作者一般探討的問題。但是，如果我們把此理念，拉到更高的一個層次，回到前段所謂「教師必須對他所授的內容具備充足廣闊的知識背景，清楚某些數學思想發展的歷史」的標準，而且還要做到儘量避開「經過科學洗鍊的系統」來教學，那麼，許多教學問題就會變得很有意思，值得我們深入探討。例如，在高二的『圓錐曲線』之教學中，筆者曾提出下列幾個問題與同科老師討論：

1. 平面上拋物線、橢圓、雙曲線的準線是在空間上圓錐截痕的那一條線？有需要在課堂上補充？
2. 圓錐曲線的深入探討源於圓錐被平面所截的定義，爲何課本定義這些曲線：「到一直線與到一定點距離相等的點軌跡」就是拋物線，若存在「到兩定點的的和或差爲一定值時」，則軌跡分別是橢圓或雙曲線？如此方式引入與由準線引入，有何差異？
3. 圓錐曲線的中文命名，完全取決於其圖形外觀，學生在認知上會與其定義做何種連接？西方用 parabola、ellipse、hyperbola 與中文的命名角度十分不同！有需要切入這個話題嗎？
4. 爲何要知道圓錐曲線的正焦弦長？它扮演何種角色？如果不重要，那爲何所有教科書一再計算它？又爲何老師們總要學生背起來？難道背起來就代表達到教學目標？
5. 爲何知道雙曲線有漸近線？目前的教材內容大都以雙曲線的代數表徵，來證明雙曲線的圖形，的確會逼近所指定的一條直線。有的更是反客爲主，在學生對極限概念尚未能成熟了解前，運用雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上任的一點到兩直線 $bx \pm a\,y = 0$ 距離的乘積等於一定值$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$性質說明「的確愈來愈接近....」，如下圖。

證明：設$P(x_0, y_0)$是雙曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上的一點，則$\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

由右圖知

$$d(P, L_1)\times d(P, L_2)$$
$$=\left|\frac{bx_0-ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\left|\frac{bx_0+ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{(bx_0-ay_0)(bx_0+ay_0)}{a^2+b^2}\right|$$
$$=\left|\frac{(b^2{x_0}^2-a^2{y_0}^2)}{a^2+b^2}\right|=\left|\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right|=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\text{(定值)}$$



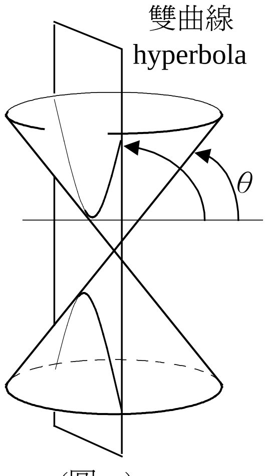
$\therefore$ 當$d(P, L_2)\to\infty$時$d(P, L_1)\to 0$

這樣的安排是否妥當？難道為了教學時數的關係，可以省略了讓學生察覺數學中「存在」的重要性？教師在教學上是否要引導學生猜測或觀察？才去證明是那一條！

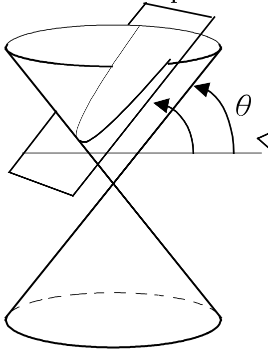
關於第一個問題，令人出乎意料！原先以為很簡單的主題，還是花了大夥一些時間，才找到答案，最後還是藉由模型的觀察，才確定準線的所在位置，而且讓圓錐曲線的基本性質的證明變得非常直觀，可見，由我們這一群所謂「專家」來看圓錐立體的截面都已有一定難度，想要拿來教學似乎有待考慮。因此，筆者在提供模型給學生輪流觀察時，便只是抱著嚐試的心情，讓學生有新鮮感就好，約略點出一些重點，惟有部分有興趣的同學會於課後與筆者討論。

對於第二個問題，有人認為從圓錐曲線一些等價的性質來當定義其實都可以，有的人認為以準線出發來定義再來探討性質比較好，而且可以將圓錐曲線做連結。此項討論不禁令筆者想到，有一版本的高中教材，在介紹三階行列式時，它避開用二元聯立方程式的行列式解，來推廣三元聯立方程式的行列式解，而直接將三階行列式定義成三組不同平面的向量展開的平行六面體體積是一樣的！孰是孰非，並無一定的道理，但重要的關鍵，在於用不同方式來介紹數學知識，哪一個較能引起共鳴才是首要之務。

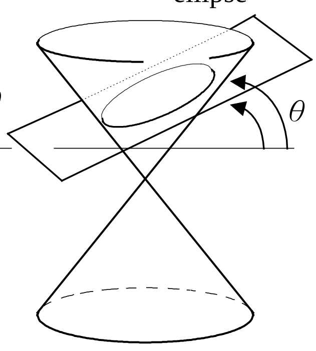
至於第三個問題，所有老師都表示未曾深思過。當然這是正常的，如果不是這些年參與數學史融入教學的活動探討，筆者也是無法耳聞圓錐曲線命名的來由。在以下圖說明後，幾位老師頗感興趣，表示挺有意思的，甚至一位較熟識的好友還帶著玩笑的口吻問：「這是真



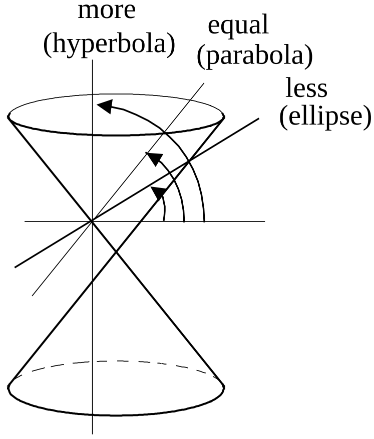
(圖一)



(圖二)



(圖三)

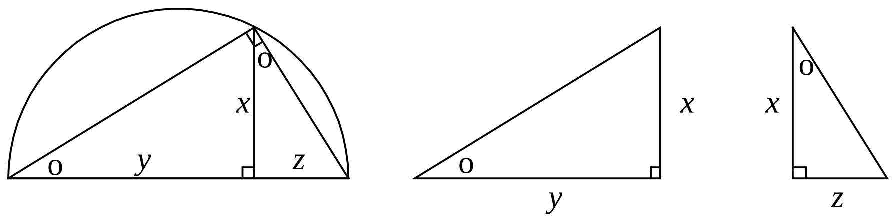


(圖四)

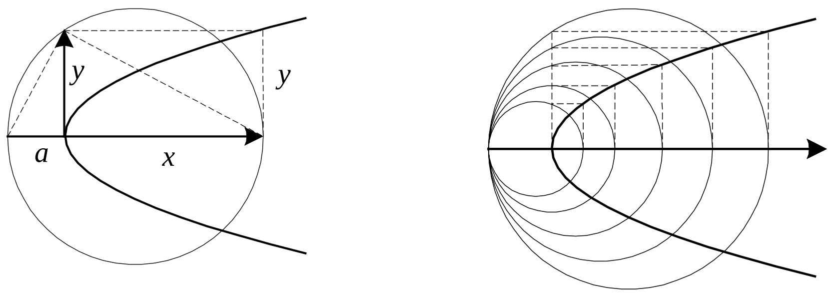
的？還是你自個兒編的？」這是由於這位老師太了解筆者上課喜歡話天說地，最直接的反應而已。只是，大夥的結論還是：「那有時間教這個？難怪你的教學進度總是太慢？」的確！

要不是這一次的單元的段考試題輪到筆者命題，試題的的難度、鑑別度由自己掌控，否則，還真的不敢在課堂上談論這些內容呢。因為有些老師教學與出題已被那些厚厚一本的參考書給綁架，害得現教學都沈溺於「題型」的講解，如果在課堂上討論一些學生認為不會考的東西，又加上本來師生互動不甚理想，那麼，老師原本的美意就被學生扭曲。這也正是筆者將數學史融入教學時，一直非常小心切入點的問題。

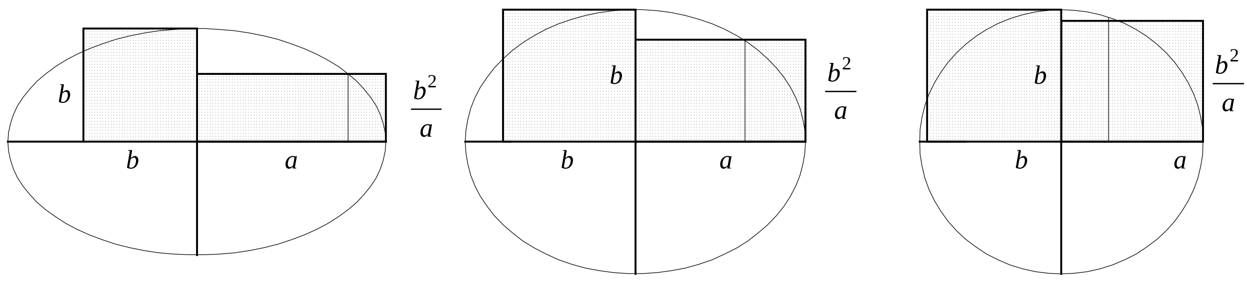
談到第四個問題，沒有人知道為什麼要教『正焦弦』？ 當反問「連我們都不知道，甚至教科書都未談及的時候，那如何去介紹這個東西？ 」大夥也只好一笑置之。在還沒有找到史實佐證之前，筆者只好暫時跳開，僅就正焦弦的結果，從學生既有的「化圓為方」，亦即「幾何平均」的先備知識如下：



引入約西元前 4 世紀的Menaechmus利用將長方形化成正方形的作圖方法，描繪出$y^2 = ax$的大致圖形。

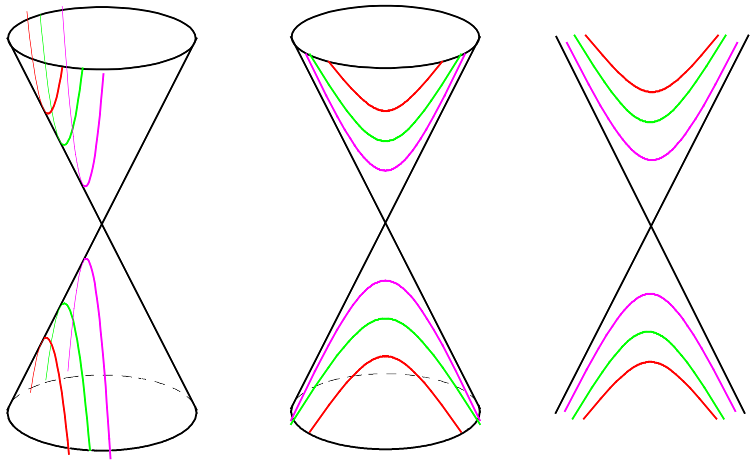


最後，再來看看橢圓長軸、短軸、正焦弦的比例關係，如下圖：

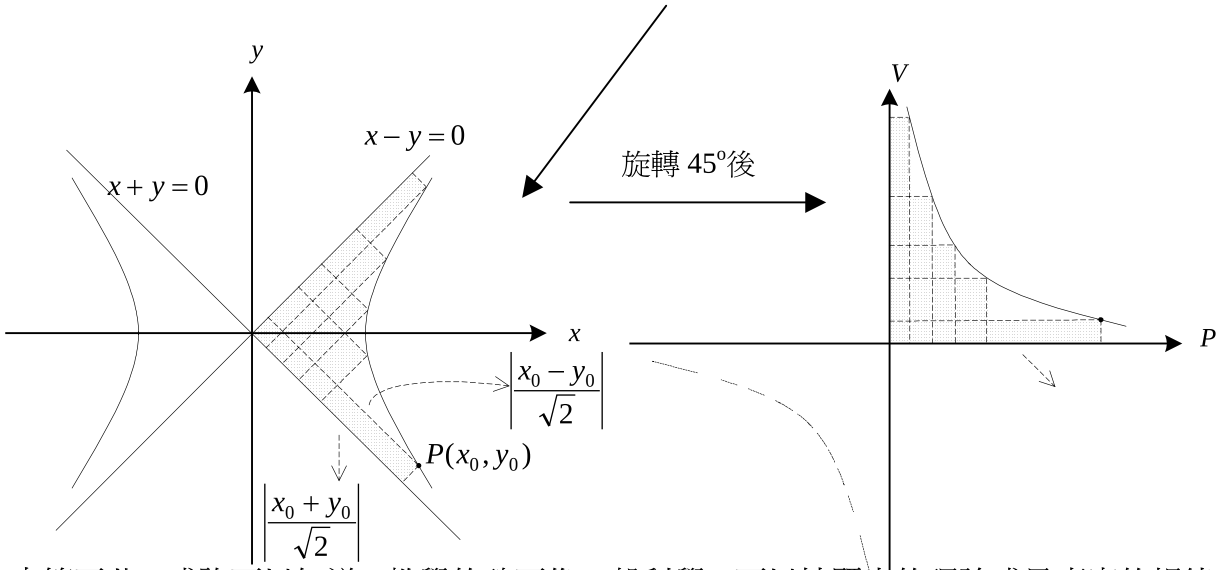


顯然，短軸長是長軸長與正焦弦長的幾何平均數。上述說法雖然有點自圓其說，不過，這也是目前筆者唯一能暫時「說服」自己的想法。這樣的論述正確與否，筆者無法推斷，不過巧妙的安排一些數學史，相信應該是無傷大雅才對。

最後，如何在教學中引導學生認識漸近線「存在」，老師們皆認為是個棘手問題。請教大家的教法，大抵都仿教科書介紹的逼近之方法證明。筆者在苦思後，還是回歸圓錐截面的觀察，藉由筆者製作的截面動畫以及底下板書的呈現，來進行教學。



其中穿插學生了解的波以爾定律 $PV = k$ 以及距離公式概念，輔以下圖補足課本的說明。



走筆至此，或許可以知道，教學的確不像一般科學，可以按既定的理論或是事實的規律一成不變的進行。如果我們說教學是一門藝術，那麼，如何讓講台變成舞台，其實還是需要教師不斷地準備與彩排。或許「老歌新唱」可以告訴我們，教學中多一點編曲或略加入另一種樂器，可以讓我們的教學避免流於形式，而且，更可以讓老師在講台上像藝術家在舞台上盡情的揮灑。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng**

書名：Japanese Temple Mathematical problems

作者：*Nobuya Nakamura* 等九人

出版社： *Kyōikushokan* ，*Japan*。

出版時間：2003 年

出版資料：共 261 頁，定價 30 美元

日本寺廟的算額介紹

台師大數研所博士班 蘇意雯

日前日本學者，也就是本書作者之一－*Nobuya Nakamura* 先生寄贈了《算額への招待》一書的英文翻譯本與洪萬生老師，使得筆者能有機會一窺有關算額問題之堂奧。算額奉納和遺題承繼是促使和算發展的兩大元素。所謂的遺題承繼就是某和算家在自己所著的和算書卷末，會提出一些數學難題。他的弟子、門人、或其他讀者在經過努力研究，解決了難題之後，一般要著難題解答之書，並在卷末更加深入的揭示問題，提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，從而進一步更深入的研究。另外，早期日本的寺廟及神社兼有教化的功能，因此和算家常把算題放在寺廟裡，供有心人士演練，這就是所謂的算額奉納（蘇意雯，2000）。以下筆者就針對 *Japanese Temple Mathematical problems* 書中有關算額的描述加以整理，以饗讀者。

首先讓我們先對「算額」二字做一番解釋。無庸置疑的，「算」字有計算、數學的意含。至於所謂的「額」，指的就是木製的書版。早期的時候日本人會獻上馬匹給神社或寺廟表示崇敬，但由於馬隻昂貴難以擁有，逐漸地，他們就用畫有馬隻的繪板代替，而所畫的對象也逐漸由馬匹延伸到他種物件。江戶時代（1603-1867）的日本人信仰虔誠，他們會設計各種式樣的匾額到鄰近的寺廟或神社酬神，如果是把數學問題和答案用漢字書寫在板上，這種還願的書板就叫做算額。奉納算額的意義有三，一是感謝神佛的恩賜、另外也表示對和算教師的尊崇以及展示研究的成果。這是因爲神社和寺廟，是當時的人們交流的一個最佳場所。

在算額上所呈現的數學風貌是幾何問題多於代數問題，這是因爲前者有美麗的圓形或多邊形，因此顯得更有吸引力。典型的算額問題是求邊長或者圓的直徑，當然也包含了直線、三角形、內切圓、圓周長等問題。漸漸地題目難度越來越深，甚至牽涉到球、橢圓、微分、積分等相關問題。每一塊算額含有由一個到十個不等的問題。在整塊算額的配置上，通常其上方是安排彩色的圓或三角形等幾何圖形，接下來的部分是題目、答案及解法。位於下方的則是流派、教師、展示者的名稱及奉獻的日期（請參考蘇意雯，1999）。

奉納算額的高峰期是十九世紀，到了明治維新時代就逐漸式微。不過，有些地區仍維持這項傳統到二十世紀初期。奉獻算額的年代可由下表所示：

年代	算額數量
十七世紀晚期	8
十八世紀早期	33

十八世紀晚期	284
十九世紀早期	1184
十九世紀晚期	795
二十世紀	133
不明年代	188

根據作者的介紹，總計這段時期於日本總共呈獻了 2625 塊算額，但由於火災、氣候、損毀或遺失等因素，時至今日僅存 884 片。以奉獻數量最多的東京而言，本有 385 片，但現存不過 17 片。有關算額最古老的記錄可回溯至 1657 年，但最古老之算額是存於 1683 年。由於擔憂現代日本人已不知算額爲何物，在急切希望保存此文化遺產的理念之下，*Nobuya Nakamura* 等九人以長野縣內所存之算額，運用現代數學術語一一對其內容加以解說，於是有了這本書的誕生。

行文終了，有關算額的介紹就此打住。但是對於本書算額的實際內容，親愛的讀者，您是不是很想一睹爲快呢？

參考資料

洪萬生 (2002).〈中日韓數學文化交流的歷史問題〉，收入王玉豐主編，《科技、醫療與社會學術研討會論文集》(高雄：國立科學工藝博物館)，頁 61-70。

蘇意雯 (1999).〈日本寺廟內的算學挑戰〉,《HPM 通訊》第二卷第八、九期合刊，頁 13-18。

蘇意雯 (2000).〈天元術 vs. 點竄術〉,《HPM 通訊》第三卷第二、三期合刊，頁 2-6。

自然對數的底數 *e*

台灣師大數學系二年級　趙國亨

滄海桑田世事非 始終不變未曾悔

高中教師常常用這麼一則笑話,幫助學生記憶一個很特別的微分公式,故事是這麼說的：

> 在一家精神病院裡，有個病患整天對著別人說，「我微分你我微分你」，也不知為什麼，這些病患都有一點簡單的微積分概念，總以為有一天自己會像一般多項式函數般，被微分到變成零而消失，因此對他避之唯恐不及，然而某天他卻遇上了一個始終不為所動的人，他很意外地問他為何不會害怕，這個人淡淡地對他說，「我是 *e* 的 x 次方。」

這個微分公式就是：e^x不論對x微分幾次，結果都還是e^x，一絲不變！難怪數學系的學生會用e^x，來比喻堅定不移的愛情！

熟悉數學的人都知道，在 π 之後，第二個最重要的數學常數是e。但是不同於 π 的歷史輝煌，它擁有「由 π 的準確位數可以看出一個文明當時的數學水準，甚至是文化水準」這般地位，自然對數的底數e的出現幾乎不可考，我們僅知道人們發現數列 $(1+1/n)^n$在n趨近於 ∞

時，會趨近於一個常數。這個數列是由於金融業的發達，爲了處理複利的計息週期而出現，然後這個常數的估計值，則要等到對數出現後，才能被真實地評定。

對數函數無所假 天文學家延生涯

十七世紀初，蘇格蘭數學家 John Napier『發明』了對數 (logarithm)。其實，筆者也不知道該不該稱呼 Napier 爲數學家，畢竟他是個對宗教狂熱、具有機械天份、喜歡用鬼點子解決問題的有趣貴族。更讓人意外的，是他居然紮實地做了廿年的苦工，完成了史上第一張對數表。

與我們現在所熟知的對數不同，這張對數表的底數是 $1-10^{-7}$而不是 10，以 10 爲底的常用對數在Briggs與Napier見面之後，才在Briggs的手中誕生。可敬的Napier在做出對數表的三年後，便與世長辭，而這門不假其他數學研究的學問，才正要席捲數學界。在此，容我用西北雨來形容對數這項發明的出現：

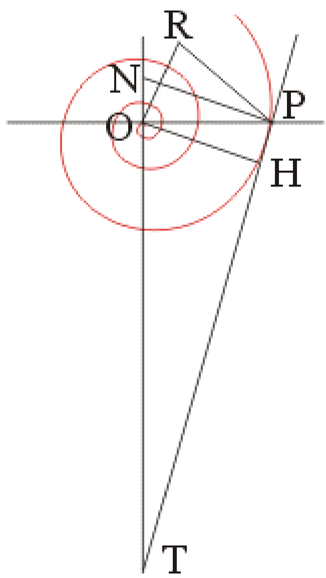
> 埋首計算那煩悶一如夏日午後的龐大乘法，毫無預兆地幾滴名爲「對數」的斗大雨滴落下，轉眼整個數學界的天空變了顏色，狂洩的雨水淋濕了厚重的計算紙，雨過天青，計算紙上繁複的乘法變成加法，簡單一如雨後的清爽空氣。雨後，天文學家，減少了計算時間，延長了學術生涯。

充斥於天地萬物 閃爍在晨曦蛛網

在一片空曠的草地上，有甲、乙、丙、丁、四隻狗，分別站立在一個正方形的四個頂點 *A*、*B*、*C*、*D*上。狗主人要甲狗緊盯著乙狗、乙狗緊盯著丙狗、丙狗緊盯著丁狗、丁狗緊盯著甲狗。一聲令下，四隻狗以相同的速度，同時衝向目標。假定每隻狗在每個時刻，都是正面朝向它的目標，那麼，這四隻狗所跑過的路徑是什麼形式呢？

上述題目出自趙文敏老師的文章〈等角螺線及其他〉，有興趣的人可以參考下列網站：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_09_1/index.html。他的答案是等角螺線，如果用極座標表示，等角螺線的基本形式就是$r = ae^{\theta \cot \theta}$。

等角螺線有著驚人的美妙相似性質，大自然中許許多多的生物身上，都顯示等角螺線的存在，鸚鵡螺的截面線條、鳳梨、向日葵的螺旋紋，都是這種形式。另一方面，等角螺線在數學上，也有許多神奇的性質，如右圖中，做一過 P 點的切線截 y 軸於 T 點，則從 O 點沿著螺線到 P 點的距離恰好等於PT的距離，這是由伽利略 (Galileo Galilei) 的學生托里切利 (Torricelli) 證明出來。



另一方面，有個經常被誤認爲是拋物線的曲線，也跟e分不開來，它被稱爲懸鏈線，源自開始大量使用極座標研究螺線的Jakob Bernoulli提出來的問題：「把一條細繩掛在兩定點上，讓他自由懸垂下來，求：這細繩會構成怎樣的曲線。」這個曲線的基本形式是$(e^{x} + e^{x}) / 2$，同時，它也是相同條件下位能最小的曲線。當然，這個答案在當時不是這個樣子的，因爲要等到尤拉 (Euler) 來爲自然對數命名。

隨手拈遊戲之作 遺我以美麗結果

相對於 π 是希臘文字中圓周的第一個字母，e是由來的是較不為人所熟知的。一般咸認為尤拉是建議將 e 作為自然對數的底數之數學家，因此，偶爾總會有人認為：根本就是尤拉 (Euler) 取自己名字的第一個字母作為自然對數。但是，別忘了大家稱呼 e 為自然對數的底數，而不是 Euler 對數或 Euler 常數 (注 1)。

尤拉選擇 e 的理由較為人所接受的說法有二：一為在 a, b, c, d 等四個常被使用的字母後面，第一個尚未被經常使用的字母就是 e，所以，他很自然地、毫不避嫌地選了 e 這個符號，代表自然對數的底數；一為 e 是指數 (exponential) 的第一個字母，雖然你或許會懷疑瑞士人尤拉 (Euler) 的母語又不是英文，很不幸地法文、德文的指數都是 exponential (注 2)。

不論如何，我們已經接受 e 代表著自然對數，現在，讓我們先拋開折磨人的嚴謹性，一起來感受一下 Newton 與 Leibniz 創造微積分之後，屬於數學界的大航海時代精神：

1. 首先大家都知道 $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + \cdots$
2. 用 ix 代替 x
3. $e^{ix} = 1 + ix + (ix)^2/2! + (ix)^3/3! + (ix)^4/4! + (ix)^5/5! + \cdots$
   $= 1 + ix - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! + ix^5/5! + \cdots$
   $= (1 - x^2/2! + x^4/4! + \cdots) + i(x - x^3/3! + x^5/5! + \cdots)$
   $= \cos x + i \sin x$ (注 3)
4. 如果你寫下另一個用 $-ix$ 代替 x 的式子，就可以加減得到Euler三角函數公式 $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix}) / 2$ 、 $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / 2i$
5. 如果你將 π 代入 x ，就會看到 $e^{i\pi} = -1$，也就是$e^{i\pi} + 1 = 0$

感謝 Lagrange、Cauchy、Weierstrass 等等後來許多數學家們的努力，Euler 的『遊戲之作』，在今日已經成了人們眼中最美麗的數學式！至於這個過程的『嚴謹性』，就讓大家等著看他怎麼出現在數學系的分析學課程之中了！

寫在最後…

很遺憾地刪掉了很多東西，像是許多可以讓文章更加生動的圖片、提到等角螺線就讓人自然而然聯想到的黃金比例及 Fibonacci 數列、e 身為一個超越數對數學界的影響等等，但這是很難得的經驗。看了很多書，也學到很多過去沒注意的知識，很累、但很有充實感。

註解

1. 事實上 Euler 常數γ 是另一個跟對數有關的常數。
2. 不過，筆者在懷疑會不會是 l 這個對數的開頭字母的書寫體壓扁的結果？畢竟 l 常常拿來代表長度，所以要將它變體一下囉~~
3. 在Euler之前，有一位英國數學家Roger Cotes計算出那個常數是 2.7182818，同時，再提出以那個常數作為底數，得到$i\phi = \log(\cos\phi + i\sin\phi)$ ，其中 $i = (-1)^{1/2}$ 。

參考書目：

American Council of Learned Societies (1991). *Biographical Dictionary of Mathematicians*. New York：Scribner。
Eli Maor (2000)，《毛起來說 e》，鄭惟厚譯，台北：天下文化。
Ian Stewart (2000)，《大自然的數學遊戲》，葉李華譯，台北：天下文化。
Ian Stewart (2000)，《生物世界的數學遊戲》，蔡信行譯，台北：天下文化。
吳文俊等編 (1995)，《世界著名數學家傳記》，北京：科學出版社。
曹亮吉 (1996)，《阿草的葫蘆》，台北：遠哲科學教育基金會。
趙文敏撰，〈等角螺線及其他〉，《科學月刊》第二十卷，第九、十期。

閒話圓周率

台灣師大數學系二年級　許勝溢

每個圓都有喔！

如果我問你：每個圓不管大小，都具有的相同不變量是什麼？照道理來講，每個人都會回答我 π 才對。圓這種東西，我們的老祖宗們不曉得打哪時開始就用到現在了，他們就著經驗、直覺，發現圓這種完美對稱的事物，不管他大還是小，直徑：周長＝常數。公元前兩千年左右，巴比倫人跟埃及人分別運用他們各自的公式計算圓面積。假設他們已經知道圓周率的意義，那麼，我們可以說巴比倫人得到 π =25/8，埃及人則得到 π =4(8/9)2。至於他們的可能做法呢？大概是在地上畫一個很大的圓，該量的量一量，一算就出來了。說起來簡單，如果我要你不可以用現代的除法、丈量工具、十進位，也許就難了吧。更重要的是，換做是我們，我們怎麼發現這樣的一個每個圓都具有的量呢？這是很困難的事吧，不過祖宗們辦到了，也許是比例的概念再加上一點猜測，再一點點的運氣，不過也只是也許啦，搞不好是外星人講的咧！(這句純屬筆者胡言亂語，但也不失爲一種可能性)

近似值的進步

知道 π 的存在以後，人們開始在找他到底等於多少。前面已經提到公元前兩千年的巴比倫人跟埃及人的可能近似值。大約在公元前 1000 年前吧，中國人以 3 作爲 π 值；550B.C. 舊約聖經也說 π 等於 3；公元前三世紀，阿基米德算出 π 介於 223/71 及 22/7 之間，並以 211875：67441=3.14163 爲 π 的近似值。公元三世紀，劉徽得到 π 約爲 3.14159；公元五世紀，祖沖之算出 3.1415926＜ π ＜3.1415927，並給出兩個近似值：22/7 與 355/113。更重要的是，阿基米德和劉徽都發現了算 π 的方法，你可以用一樣的方法，想算到多精確，就算到多精確。十七世紀，牛頓發明微積分，並算 π 值至 16 位以上。接下來就是瘋狂計算魔人的驚人成就了，這些魔人們靠著驚人的毅力耐力，沒有計算機，憑著腦袋、雙手、紙筆，前仆後繼地算

到了 620 位小數。如果你看到這裡還不知道爲什麼我稱他們爲『魔人』，那請你徒手算算π值到 10 位小數即可。後來有了計算機(現普稱電腦)，π值動輒千萬小數(魔人們也許會瘋掉吧！)，求π的工作，漸漸就變成了測試電腦精確度的工具了。據《神奇的π》說，現今已知至 510 億位小數。這個持續了幾世紀的π值精確戰，雖然在數學上至今沒有比較特殊的意義 未來也許有喔)，但也算是π的故事中，相當有趣的一頁。

從何而來？

記得高中的時候，我曾經試過自己去找出π值來，我得到的答案是

$\lim_{n\to\infty} 10^{n+2}\sin(1.8\times 10^{-n})^{\circ}$，大家有興趣的話，可以用電腦的小算盤算算看，應該是沒錯才對。

那到底我是怎麼找的呢？其實，我用的方法跟阿基米德他們沒差到哪去，就是圓內接正多邊形，當正多邊形的邊越多的時候，周長就越趨近圓周長 這是很直觀的，事實上應該拿出ε-δ那一套來驗證)，把周長算出來再除以圓直徑，答案就出來啦！但我用的是三角函數喔，而且我用未知數，其他就交給電腦處理。話說如此，古代的人們，哪有這種東西，於是，紙筆上的苦工就免不了啦。祖沖之算到 16384 邊，已經很可怕了，前面沒提到的魯道夫(Rudolph，1539-1610)，竟然用 60*229 邊形算到小數點後 20 位！後來又更推進到 35 位！可怕！爲了紀念他，在德國圓周率也叫做魯道夫數。

大家應該對泰勒展開式這個名詞不陌生吧？另外一個求π的方法，正是利用展式求得的。爲何會發展出展式來算π值呢？因爲多邊形等方法逼近的速度實在太慢了，而且計算過程繁複。在 1706 年，英國人Machin (1680-1752)發現了如下的展式：$\pi=16(1/5-1/3.5^3+1/5.5^5-\cdots)-4(1/239-4/3.239^3+1/5.239^5-\cdots)$，他大約用了第一個括弧內的前 70 項，第二個括弧內的前 20 幾項，就算到π的第 100 位小數。其實創造求π的展式似乎並不困難，利用微積分的方法，加上反三角函數，在靠近值是π的地方做泰勒展開，就可以得到了。我所見過π最簡單的展式是：$\pi = 4(1-1/3+1/5-1/7+\cdots+(-1)^n/(2n+1)+\cdots)$，但收斂速度相當緩慢，《神奇的$\pi$》有說到：若你想用這條展式算至小數點 100 位，那麼你計算的項數將比全宇宙的原子數目還多！

求π的方法歷史上還有很多，在此就不再多做介紹了。

不但無理，而且超越！

實數有兩種，一種叫做代數數，而另外一種叫做超越數。所有的超越數都是無理數，簡單的說，超越數是無理數的 subset。而π就是最著名的超越數了，讓我們從化圓爲方這個歷史有名的問題談起吧。看字面也知道，化圓爲方就是要做一個正方形跟已知的圓等面積 (限尺規作圖)，這個問題好像還頗有趣，要試的話就去試試看吧，但別花太久時間，因爲這是無解的問題啊。這一個問題從公元前第五世紀就被提出，直到 1882 年，Lindemann 終於證明了π是超越數 (利用了傳說中『數學界最美的式子』)，也就是說，根本別想化圓爲方了，因爲超越數的長度是無法用尺規作圖完成的。但事情沒那麼簡單就結束了，有許許多多的『業餘數學家』們，自認成功的解出了化圓爲方的問題，歷史上甚至有議會 (美國印第安那州州議會) 要爲這莫名其妙的結果立法，竟然還一讀通過！好在被一位數學教授給挽了回來。還有個叫做 Heisel 的人更是誇張，出版了化圓爲方一書，自以爲成功的解出來。這些不勝枚舉的故事，無法細說，希望大家能去查書看看，真的相當有趣，如果你有一點專業數學素養的

話，你一定會覺得又好氣又好笑的。

總之，π 的發展有許多意義，從一開始的發現，到推進小數位數，證明其超越性，這些可以看出人們數學知識的進步，例如利用展式求 π 值，用代數方法證明了尺規作圖。一路走來還有許多有趣的小插曲，誠心建議大家有空時不妨多接觸，會有相當的收穫的。如果還想再更了解 π 的話，強力推薦大家看看《π 的故事》及《神奇的 π》。

參考書目

Beckmann, Peter (1970)，《π 的故事》，姜家齊、朱建正、林聰源譯，新竹：凡異出版社。
Blatner, David (1999)，《神奇的 π》，潘恩典譯，台北：商業週刊出版。
曹亮吉 (1997)，《阿草的葫蘆》，台北：遠哲科教基金會。
梁宗巨 (1995)，《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

高中教材中的數學故事分析

萬芳中學 郭嘉慧老師

因爲手中的教材版本並不齊全，所以，每種版本的教材只拿出一本，對於數學故事書寫作比較。經比較後發現大致上有兩種趨勢：一、以課程主題爲主軸（如：大同課本、正中及龍騰的教師手冊），介紹某一主題的歷史背景，從發現（發明）的時間順序，依序提起相關的數學家在這個主題中所扮演的角色。二、以數學家爲主軸（如：龍騰、南一課本及三民的教師手冊），分別以「悲慘的青/少年及偉大的成就」、「立論著述」或「對數學的某項貢獻」爲主。

我個人認爲，數學故事本身，除了從上述兩方面著眼之外，還可以考慮它們的相輔相成，因爲這兩方面各有利弊。就課程主題而言，除了主要敘述的主題（如：指對數發展史）之外，提到數學家兼天文學家（譬如納皮爾和布立格茲）的時候，可以順便提一下他們同一時代學者在天文學上的貢獻。就數學家而言，除了應以「事實」爲主，盡量避免過多的形容詞之外，還可以加上這位學者（譬如牛頓）在某一主題（譬如微積分）上，與其他學者的互動情形。

當然，數學課本的主要閱讀者是學生。在主要傳授的數學知識當中，數學故事並不應該佔太多篇幅。如果只是讓學生認識數學家、陶冶數學性情，則不但不需要太完整的故事內容（事實上，原來每個版本中的故事也稱不上完整），更不應該做條列式的介紹。反而放上較有人性的故事片段（也就是「軼事」啦！如加羅瓦致命的決鬥的來龍去脈)，更容易引起學生的興趣。至於詳細而充實的數學故事，則可以補充在附錄或教師手冊上。