

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生）林旻志（台師大數學系研究生）陳啓文（中山女高）彭良禎（麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

■ 魅力無窮的『祖率』： $\frac{355}{113}$

■ 哥廷根學派的領導人—Felix Klein

■ 「中人算學者」李尚熾

■ 畢業感言—李尚熾與我

■ 畢業論文感言

魅力無窮的『祖率』： $\frac{355}{113}$

台師大數學系 洪萬生教授

一、前言

所謂『祖率』，是指中國南北朝時期祖沖之（427-500）所推算出來的圓周率近似值： $355/113$ 。它是日本數學史家三上義夫（Yoshio Mikami）建議使用的稱呼，顯然他是用來推崇祖沖之在這一方面的偉大貢獻。從數學知識本身來看，此一近似值當然有它的過人之處或獨特之美，否則就不須要如此大費周章了。

問題是：『祖沖之知道圓周率 π 是常數或定值嗎？』乍看之下，這個問題簡直是廢話！如果不知道的話，那麼，圓周率『近似值』這個名詞有意義嗎？還有，這一篇文章還需要撰寫嗎？

其實，根據《隋書·律曆志》的記載，祖沖之當然知道圓周率是一個常數！而且，他也正是據此所作的近似值追求，而成就了數學史上的不朽聲名。

熟悉歷史的人，難免都喜歡引經據典！現在，且讓我們一起來看看《隋書》《律曆志·備數》怎麼介紹『祖率』：

圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周數盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率：圓徑七，圓周二十二。

解讀這個文本，最好同時具備『歷史』與『數學』的起碼素養。譬如，我們對於劉歆等人物、乃至於祖沖之的官銜『宋末南徐州從事史』的認識，主要來自一般歷史，至於如何理解上述這些數目字的意義，那就非得懂一點數學不可了。當然，如果想要考察劉徽與祖沖之兩人數學研究之間的關聯（請注意一般的歷史論述無從找起），那麼，『數學史』的素養，就變得不可或缺了。

二、一個教學的插曲

既然說到數學史，我這個專業的數學史家就不免技癢—『老王賣瓜』。最近，我在本系『數學史』教學中，將它設計成爲一個課後作業（參考附錄 I），請選修本系『數學史』課程的學生來回答下列問題：

請問祖沖之的圓周率近似值為何？他的『密法』策略為何？又他知道圓周率是一個常數嗎？為什麼？

結果，赫然發現有少數幾位學生竟然推斷：『祖沖之不知道圓周率是常數！』當然啦，認為祖沖之知道圓周率的學生，還是佔了絕大多數。無論如何，他們對於此一文本的內容，都提供了有趣、合理的解讀，值得有意在將古代數學文本引進課堂的教師參考。

現在，我們先來考察幾位頗有『道德勇氣』的學生，他們如何推論『祖沖之不知道圓周率是常數！』學生甲認為：

因為當時他（祖沖之）測量出來也只有說在 3.1415926 跟 3.1415927 之間，而在後面也有說明圓周率大約為 $22/7$ ，也沒有辦法說出圓周率的確實值，所以他知道圓周率非為一常數。

顯然基於類似的理由，學生乙論述說：

我不認為祖沖之知道圓周率是常數這事實，因為在文本記載中看不到分數這概念，它都是敘述圓徑多少，然後圓周多少，並沒有直接說出圓周長 $= \pi \times \text{直徑}$ 。

他們的困擾，應該是來自數學上所謂『常數』的意義。

其次，我們再看看她（他）們如何認定祖沖之知道此一事實。譬如說，有學生丙說：

圓周率為一個常數，這在祖沖之的心裡一定佔有一份不小的地位，我想他應該是這樣認定的，不然他也不會發了狂似的，付出相當可觀的勞力，埋頭苦幹作了大半輩子。

同樣地，有學生丁說：

我想祖沖之應該已經認為圓周率是個常數了吧，因為如果他不認為圓周率是常數而是個會變的數字，依他的聰明才智，大概不會花那麼大的心力去求圓周率的近似值了吧，而且如果圓周率不是個常數，那他（它）的變動範圍也太小了吧，所以，根據祖沖之求得的結果來看，他應該已經確認圓周率是個常數了吧。

上述這兩個學生的認定，多少依據了歷史的事實來推論，後者當然考慮了近似值變動範圍的數學因素。不過，真正依據數學因素來推斷的，則是像學生戊，譬如他說：

我認為他知道。因為他是用內接正多邊形去逼近圓，圓直徑大小和正多邊形周長成一定關係。且在『以一億為一丈，……』這裡可知。因為『一億』是指一億等分，所以和圓大小無關。因此我認為他知道。

或者學生己：

我覺得他知道圓周率是一個常數，否則當圓的直徑改變時，圓周率也跟著變，那他所作的就不就變成只是作一個特例罷了。

然而，把數學道理說得更透徹的，有可能是學生庚：

從記載中可以得知祖沖之是知道圓周率是一個常數的。因為祖沖之在計算圓周率時是把直徑變大為一丈，然後再使用劉徽割圓術的方式去求圓周，從這樣的訊息可以得知祖沖之知道圓周率是一個常數，為了方便求此常數，他將圓的直徑加大，並將正多邊形的邊數增加，以求更加接近的值。

總之，認定祖沖之知道圓周率是常數的學生認知類型，不外乎是：(1)歷史事實；(2)數學推論，以及(3)兼顧數學與歷史的理解等三種可能的方式。至於認定祖沖之不知道圓周率是常數的學生，則顯然只利用了數學的推論。至於誤判的主要原因，則是誤解了『常數』的意義所致。當然，基於歷史事實來認定祖沖之知道圓周率是常數，不能說是一種數學理解，只是一旦離開數學知識活動場域（譬如數學課堂），我們似乎就很難判斷了。

三、文本解讀

現在，我們有必要說明此一文本的意義。首先，它的作者指出『圓周率三，圓徑率一，其術疏舛』，亦即 π 取成3是個疏陋的近似值。請注意：此處的『圓周率』與『圓徑率』，分別指任一個圓形中，「圓周：圓徑」比（率）中的前、後項。

其實，在《九章算術》中，『率』就是這個意思。『率』的本義是標準、法度準則。因此，上一段中的所指的同一個圓之『圓周率』與『圓徑率』，就可以分別說是『圓周（長）的標準』與『圓徑（長）的標準』。如此說來，中國古代常說『周三徑一』，看起來也是一個蠻符合『標準』的說法吧！

或許，我們可以利用劉徽的注解來幫忙我們澄清：

率者，自相與通。有分則可散，分重疊則約也。等除法實，相與率也。

也就是說，凡是『相與率』的一組數，比如類似本例中圓形中的圓周與圓徑（長），那麼，它們之間一定互為質數。這可以解釋何以魏晉劉徽在求周率近似值時，他先求出徑200，周628，相約之，「周得一百五十七、徑得五十，則其相與之率也。」因此，當圓周作 k 倍伸縮（ $k \neq 0$ ），則圓徑亦作 k 倍伸縮，從而，圓形儘管大小不一，但是，各自的圓周率與圓徑率卻總是一樣。同理，正方形及其內切圓形的各自周長比為4:3（ π 取3），前者稱為『方率』，後者稱為『圓率』，這兩個『率』也與圓形多大多小完全無關。

總之，這裡的『圓周率』與今日的圓周率不同，後者指的是『圓周：圓徑』這一個比值。這是在研讀古代中國數學文本必須特別注意的一個概念。

其次，所謂的『以圓徑一億為一丈』，是指將一丈長的圓徑分開成為一億等份，這在劉徽注《九章算術》時已經運用過了。正如同劉徽的策略，祖沖之的目的，顯然是為了利用當時已知的七個長度單位，說明『圓周率』可以逼近到甚麼程度。這七個單位依序是丈、尺、寸、分、釐、毫、秒、忽：1丈=10尺=10²寸=10³分=10⁴釐=10⁵毫=10⁶秒=10⁷忽。至於『忽』有多長呢？根據祖沖之同時代的《孫子算經》的記載，『忽』代表了蠶絲的寬度。顯然，將1丈分成一億等份時，它的一份恰好是1忽，如此一來，圓周長就可以表現成到『忽』這個單位了。

因此，如果我們現在以『丈』為單位，那麼，『圓周盈數』就等於3.1415927丈，而『圓周朒數』則等於3.1415926。於是，圓率與徑率之比，就介於3.1415926與3.1415927之間了。如用現代數學符號表示，則

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

$$\Rightarrow 0 < \pi - 3.1415926 < 3.1415927 - 3.1415926 = 0.0000001$$

這也就是說， π 的前六個小數位與3.1415926這小數相同，從而以3.141592為 π 的近似值，剛好每一位數都準確。事實上， $355/113 = 3.1415920\dots$ ，足見祖沖之的圓周率近似值的追求工作是相當完整的。

四、祖沖之：數學史上第五世紀的標竿人物

對於很多人來說，祖沖之並不是陌生的中國歷史人物，譬如說，在一些中國古代科學家的傳記書寫中，都可以找到他的故事，似乎不勞我們在此多介紹。不過，為了本文的完整性，我們還是轉述一些他的生平事蹟，並著重在與他的數學成就比較相關的部份。為此，我們也利用夾敘夾議的筆法，來『重建』一下有關他的歷史故事。

祖沖之（429-500）在中國南北朝時代的南朝劉宋朝為官，有關他的傳記相當完整，可以說明他的確作過不小的官。一般來說，平民百姓很難進入官吏檔案。因此，一旦在中國歷史

中找不到有關某人的文獻，我們就幾乎可以斷定他沒有作過甚麼大官。譬如說吧，三國時代數學雙雄——曹魏劉徽與孫吳趙爽，就都可能是名不見經傳的小人物，因此，當然沒有傳記流傳下來供我們拜讀。

祖沖之當然不同！他是范陽□縣（今河北涑水縣）人，曾祖祖台之曾任晉朝侍中，祖父祖昌開始在南朝為官，任劉宋大匠卿，父親祖朔之奉朝請。他自己則在劉宋大明六年（462年）擔任南徐州（現在鎮江）從事史。按此官職大約相當於地方上行政組織的科長或科員，階級最高為七品。看起來，此時他官位不高，然而，他製作《大明曆》，並推求圓周率的精密近似值，卻都是此時的工作。上引《隋書·律曆志》特別指出他此時的官銜『南徐州從事史』，或有意紀錄他的研究生涯之階段。

後來，他又升遷為婁縣（今江蘇崑山）令、謁者僕射，前者是六品與七品不定，後者掌管朝廷禮儀，是五品官。他奉命製造指南車、木牛流馬、千里船與其他奇器，大概都是此時的工作。事實上，按之史籍，南北朝時代可以說是中國奇器製造最風行的時代，至於此時中國人似乎不顧『奇技淫巧』之道德規勸，放縱巧思而製造奇器，或許可以歸之於帝王宮廷的時尚愛好，但是，整體文化的風潮走向重視個體自覺表現，恐怕也是不容忽視的因素之一。

祖沖之的多才多藝，也表現在他『當時獨絕』的『解鐘律博塞』。所謂鐘律，當然是指五音十二律的研究，由於音程與律管長度有關，所以，黃鐘律管長度的訂定，就變得十分重要。相傳祖沖之曾鑄有銅尺傳世，應該與此有關。另外，所謂『博』與『塞』是指古代兩種遊戲，今已失傳。不過，史載稱玩家需要懂一點數學，祖沖之也因善解這些遊戲之奧妙，而馳名於當時。

祖沖之的最後官職是蕭齊朝的長水校尉，是五營教尉之一，比謁者僕射還高一品。終其一生，他的大明曆始終沒有機會使用，直到他兒子祖□在南齊任官時，才獲得頒布使用，這是南齊天監八年（509年），距離祖沖之謝世已有五年，而距離他制定那一年（大明六年，公元462年），則更是長達47個年頭了。

公元462年他已經擔任南徐州從事史了。史家認為在這之前，他應該已經完成有關《九章算術》註解與圓周率的研究工作了，當時他才30歲出頭而已。在那一年之後，他似乎非常努力為官，希望在宦途上有一點作為。這或許可以解釋他何以鏗而不捨地獻上《大明曆》。在這個脈絡中，他與權臣戴法興辯論所寫的〈大明曆議〉，也見證了公元第五世紀中國歷史上的科學爭議。

〈大明曆議〉的第一段文字，說明了祖沖之自己的天文曆法研究心得，底下所引出自數學史家嚴敦傑（1917-1988）的白話文翻譯。一開始是有關數學的反思：

我青年時代就喜歡數學，收集了古代與近代的許多書籍，加以深湛的探討。《書經》中有關的天文資料，都覆核過。周朝和漢朝的曆法，也都檢驗過。凡是能計算的，都計算過了，並且把其中那些比較疏略的，那些比較切合的，也辨別清楚。《九章算術》中的球體積算法是錯誤的，張衡知道有錯誤而不予改正；王莽銅斛銘文上的數字用圓周率推算是有問題的，劉歆卻用錯誤數字來湊合它。這些都是數學上的大毛病。

其次，則是有關曆法的評論：

劉洪的《乾象曆》和楊偉的《景初曆》中推算定朔、定望的方法，不是測候上有問題，那麼就是計算上太繁複。這些又是曆法上的失策。鄭玄、□澤、王蕃、劉徽等人都在科學上有些成就，但他們的工作缺點也很多。我以前曾花些時間，把這些錯誤都一一更正，證據確鑿，無可非議。我是實實在在地探討前人已作過的工作，所以有小小的自信心和

見識，而不凭空地推崇古人。

足見他對當時的數學與曆法，是相當熟悉的。

這裡與《九章算術》及其劉徽注有關的部分，我們有必要進一步說明。祖沖之指出《九章算術》的球體積公式 $\frac{9}{16}D^3$ 有誤（其中 D 是球的直徑），這是正確的描述，也間接說明他的兒子祖暅證明了此一公式之背景。其實，他們父子完全是根據劉徽注解中的提示，成功地計算了『牟合方蓋形』的體積，才得以修正並證明球的體積公式。然則他何以批評劉徽的工作缺點也很多呢？我們實在無從理解，除非劉徽在曆法方面有一些研究成果，入不了祖沖之法眼。值得注意的，此一對劉徽乃至於當時天算家的評論，顯然為《隋書·律曆志》的作者所引用。

另一方面，祖沖之上引文所提及『王莽銅斛』，應該就是劉歆為王莽所鑄造的新嘉量斛。這是王莽新朝的標準量器，共有斛、斗、升、合、鑰等五種量器，其關係如下：1 斛=10 斗=100 升=1000 合=20000 鑰，目前台北故宮博物院收藏了完整的一具，值得大家前往觀賞。至於祖沖之對此銅斛銘文的數字之批評，則記載在《隋書》卷十六《曆律志·嘉量》之中。

根據嚴敦傑的研究，祖沖之在糾正此一錯誤時，運用了他自己的密率： $\frac{355}{113}$ 。

五、祖率 $\frac{355}{113}$ 怎麼發明出來的？

追溯『祖率』這個圓周率近似值怎麼來的，我們有必要回到劉徽註解《九章算術》上。此一注文，可以說是公元第三世紀世界數學史上的重要文本之一，我在〈三國 π 裡袖乾坤〉一文中已有說明。不過，該文只是簡要地介紹劉徽如何利用圓面積公式『半周半徑相乘』與所謂的『割圓術』，來求圓周率的近似值 3.14，而不及說明他更精緻的一些論述。

事實上，劉徽從一個直徑為二尺圓開始割圓，由內接正 6 邊形開始，依序計算了圓內接正 12、24、48 邊形之邊長，然後利用 48 邊形邊長，求得圓內接正 96 邊形之面積『三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四』。如用 S 、 S_n 分別表示圓、圓內接正 n 邊形的面積，

則上述結果為 $S_{96} = 313\frac{584}{625}$ 寸。同理，他又得到 $S_{192} = 314\frac{64}{625}$ 寸。再計算

$2(S_{192} - S_{96}) = 2 \times \frac{105}{625} = \frac{210}{625}$ ，則下列不等式成立： $S_{192} < S < S_{96} + 2(S_{192} - S_{96})$ 或

$314\frac{64}{625} < S < 314\frac{169}{625}$ ，因此，『就一百九十二觚之全冪三百一十四寸以為圓冪之定率，而棄其餘分』，亦即圓面積近似於 314（平方）寸。

接著下來，劉徽「以半徑一尺除圓冪，倍所得，六尺二寸八分，即周數。」亦即，他利用『半周半徑相乘』的圓面積公式，以求得圓周長『六尺二寸八分』： $\frac{2 \times 314}{10} = 62.8$ （寸）。

後來，他又「以 192 邊形之冪作為求率時增減的基礎」，在求得圓面積的另一個近似值： $314\frac{4}{25}$ 寸。緊接著，他

佈置圓直徑自乘的方冪 400 寸，使它與圓冪通分相約，圓冪得 3927，方冪得 5000，這就是方圓之率。如果方冪是 5000，則其內切圓冪是 3927。如果圓冪是 3927，則其內接

方冪是 2500。以圓半徑 1 尺除圓冪 $314\frac{4}{25}$ 寸，將所得數加倍，得 6 尺 2 寸 $8\frac{8}{25}$ 分，就

是圓周長。直徑 2 尺與圓周數通分相約，直徑得 1250，圓周得 3927，就是它們的相與之率。如果取這值的話，大概達到非常精確的境地了。

以上這一段引文，是數學史家郭書春的白話文翻譯。其中出現了『相與之率』：3927/1250。雖然有數學史家猜測這一段文字可能來自祖沖之，但是，郭書春仍然歸給劉徽。

或許祖沖之的《綴術》也有類似的研究成果吧！可惜，本書的失傳，讓我們很難掌握直接證據以評定他的貢獻。然則『祖率』是究竟是怎麼來呢？史家紀志剛認為祖沖之可能利用了連分數的『漸近分數法』。根據此一方法，祖沖之將 3927/1250、3.1415926 與 3.1415927 表徵為連分數展開式，在分別求各自的漸近分數如下：

$$(1). \frac{3927}{1250} = 3 + \frac{177}{1250} = 3 + \frac{1}{1250/177} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{11}{177}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16 + \frac{1}{11}}} ;$$

漸近分數為：3/1，22/7，355，113，3927/1250。

(2). 3.1415926 的連分數展開式與漸近分數：

$$\begin{aligned} 3.1415926 &= 3 + \frac{1415926}{10000000} = 3 + \frac{1}{10000000/1415926} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{88518}{1415926}} \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1415926/88518}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{88156}{88518}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{362}{88156}}}} \end{aligned}$$

漸近分數為：3/1，22/7，333/106，355/113，86598/27565，...

(3). 模仿上述 (2)，3.1415927 之漸近分數如下：3/1，22/7，333/105，355/113，126003/40108，...

因此，紀志剛認為「從中挑選 22/7 為『約率』，355/113 為『密率』，是十分自然的。」為了強化此一推測的合理性，紀志剛特別指出中國古代曆家常用它以推求各種天體會合周期。譬如劉歆制定三統曆時，就利用此一方法。

其實，第五世紀的印度數學家與天文學家阿耶波多，也利用了漸近分數來解二元一次方程 $ax + by = c$ （其中 a, b, c 都是整數）的整數解。不管當時中印數學有沒有交流，連分數展開與漸近分數的概念，似乎是第五世紀數學家都已經掌握到的重要數學方法了。附帶一提，我們今天都運用『尤拉法』來解這種不定方程，但是，此一方法實質上卻是漸近分數的概念，至於如何將一個實數展開成為（或表徵為）連分數，則本質是一種輾轉相除法。最後這個方法，在《九章算術》乃至更早的《算數書》（公元前 186 年）都已現身，可見古代中國人提出『漸近分數法』的歷史條件，到了東漢之後應該已經成熟了。

六、結論：如何書寫、閱讀祖沖之？

由於祖沖之的《綴術》在宋代已經失傳，所以，他如何求得『祖率』，才會成為數學史上的千古懸案。本書在唐初，曾由李淳風等註釋、輯入所謂的《算經十書》，作為國子監太學明算科（有一點像現代的國立大學數學系）的教科書，其他九部有《周髀算經》、《九章算

術》、《海島算經》、《孫子算經》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《五經算術》、《夏侯陽算經》與《緝古算經》。現傳的《算經十書》，則是宋代刊刻時，以《數術記遺》補上前九部而成。至於失傳的原因之一，據說是內容過於艱深所致，它在明算科中必須修習的時間最多——高達四年，讓很多師生望而卻步。

儘管如此，我們從《九章算術》劉徽注以及《隋書·律曆志》的文本，應該足以『重建』祖沖之推求圓周率的過程，尤其是針對他如何找到『祖率』。這些『理性重建』的工作，當然可以幫助我們閱讀祖沖之！問題是：我們的最佳切入點是什麼？

一般來說，傑出人物的傳記如果故事說得動人，對於讀者應該具有人格的薰陶作用，尤其是如果涉及傳主的科學知識活動如何受到『不當』的壓制，則更有科學普及所標榜的『啓蒙』價值。這是敘事的部份，任何一種科學家傳記書寫都不會錯過。然而，以祖沖之為例，他與權臣戴法興有關『大明曆』的科學爭議，恐怕仍有待新的史學觀點與研究才能釐清。平心而論，對於祖沖之來說，『大明曆』的重要性遠遠大於圓周率的推求。這是因為前者絕對是國家大事，至於算學研究呢，請不要忘記（南齊）顏之推的見證，他在《顏氏家訓》中告誡顏家子孫：「算術亦是六藝要事，自古儒士論天道、定律曆者皆學通之。然可以兼明，不可以專業。」

不過，這個社會文化脈絡，倒是反過來更證成了祖沖之算學研究的難能可貴。儘管『祖率』可能並不是祖沖之一生中最想珍視的成就，但是，他畢竟因而在數學史上不朽！所以，如果我們希望通過歷史的書寫與閱讀，向祖沖之『學習』，那麼，他如何推求『祖率』的過程，絕對是最值得還原的題材之一。這也是數學家傳記書寫不可缺少的『認知』面向。只要對這一點無暇顧及，那麼，所謂的『祖沖之傳』與其他一般歷史人物的傳記就很難區隔，連帶地，也就難以呈現相關的數學知識之趣味與特色了。

是的！我們非常希望下次再讀到『祖沖之』時，可以發現書寫者在適當的『脈絡』中討論『祖率』的認知意義，而不只是以『消費文化符碼』的方式，『徒然地』說它準確到小數點後第六位：3.1415926 等等、等等……。

參考文獻

- 洪萬生 (1982). 〈重視證明的時代：魏晉南北朝的科技〉，收入洪萬生主編，《格物與成器》（台北：聯經出版公司），頁 105-163。
- 洪萬生 (待刊稿). 〈三國 π 裡袖乾坤〉。
- 紀志剛 (2000). 《南北朝隋唐數學》，石家莊：河北科學技術出版社。
- 郭書春 (1995). 《古代世界數學泰斗——劉徽》，台北：明文出版社。
- 郭書春 (1998). 《九章算術譯注》，瀋陽：遼寧教育出版社。
- 嚴敦傑 (2000). 《祖沖之科學著作校釋》，瀋陽：遼寧教育出版社。

附錄 I：

如何解讀下列有關祖沖之的文本？

《隋書·律曆志》有如下之記載：

圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。……祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周數盈數三丈一尺四寸一分五釐九豪二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九豪二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率：圓徑七，圓周二十二。

請問祖沖之的圓周率近似值為何？他的『密法』策略為何？又他知道圓周率是一個常數嗎？爲什麼？

名入櫥窗

哥廷根學派的領導人—Felix Klein

三重高中 顏志成老師

Felix Klein 不僅在數學上成就輝煌，並且是一位出色的領導者。他領導哥廷根學派，使其成爲二十世紀初期世界數學的重心。爲了促進應用數學的發展，他創辦哥廷根協會。他並且關懷數學教育品質，努力於數學教育的改革活動。

1849 年 Klein 出生於萊茵河畔的 Dusseldorf，青少年時代正是德國的資本主義經濟迅速發展的時期，以普魯士爲中心的德意志帝國已經形成，經濟實力也趕上了英國和法國。他畢業於 Dusseldorf 的古文中學（Gymnasium），1865 到 1866 年期間他在 Bonn 大學攻讀數學和物理學，1868 年拿到了博士學位。爲了進一步學習，他分別在哥廷根、柏林及巴黎等地遊學好幾個月，直到 1870 年普法戰爭，他被迫離開巴黎回到德國。1871 年初他得到了哥廷根大學的不支費講師（Privatdozent）職位，1872 年他任職 Erlangen 大學的正教授職位，1875 年他又轉往 Munich 工藝高等學校（Technisch Hochschule）任教，1880 到 1885 年期間則在 Leipzig 大學擔任幾何學教授，1885 年之後，一直到去世都待在哥廷根。1913 年因爲健康因素就退休了，1925 年過世。1875 年 8 月他和著名的德國哲學家 Anne Hegel 的孫女兒結婚，並且育有一男三女。（Gillispie et al eds, 1981, p. 386）

嚴格的數學和物理學訓練

在進入 Bonn 大學的第二年，便成了幾何學家同時也是物理學家 Julius Plücker（1801-68）的助手，Plücker 在 1846 年便提出了“線幾何”（Line Geometry）的概念，由此給出射影幾何的對偶性質一個邏輯基礎。然而因爲 Plücker 是利用解析的方法來研究幾何學，爲了避免與當時極負盛名的綜合幾何學家 Jacob Steiner（1796-1863）發生衝突，就全心轉移到物理學的研究，直到 Steiner 過世之後，Plücker 才再回到幾何學的研究上。Klein 在 1865 年進入 Bonn 大學的第一學期，修了比較多的數學課，而從第二學期開始，增加自然科學的選修課程。1865 到 1869 年期間更是熱衷參加自然科學討論班（seminar），¹如物理學、化學、礦物學、動物和植物學，並且在這些討論班都有傑出的表現。例如在物理學討論班上，他就曾經發表過有關磁力線方面的論文，Plücker 也曾經誇獎他不僅在數學物理而且在實驗物理學上也具有天份。1867 年的第一學期過了之後，Klein 決定離開自然科學討論班，想要再多學一點數學之後再回到物理學研究，所以他後來全心參加由 Plücker 和 Rudolph Lipschitz 合開的數學討論班。然而想要回到物理學研究的想法，並沒有馬上實現，對數學的強烈興趣使他成爲一位偉大的數學家，但也由於他在求學時代受過自然學科的嚴格訓練，使他後來不僅只做純數學研究，在應用數學方面亦有貢獻，並且匯入哥廷根的數學物理傳統，自成哥廷根學派，使得哥廷根在二十世紀初期成爲世界數學重心。（Rowe, 1989a, pp. 210-211）

在 Plücker 的指導下，Klein 做的是有關於“線幾何”的論文，而在 Klein 未完成博士論文之時，Plücker 就去世了。剛剛從 Gissen 來到哥廷根的 Alfred Clebsch (1833-70) 便請 Klein 跟他一起做研究，年僅 35 歲的 Clebsch (1833-70) 便成為 Klein 整理 Plücker 生前未完成有關“線幾何”的工作，並且在這段期間 Klein 吸收了 Clebsch 在幾何不變式和幾何函數理論方面的知識。(Aspray & Kitcher, 1988, pp. 146-147)

游學時期

1869 年冬天，Klein 離開哥廷根前往 Berlin。當時的柏林大學由於有 Karl Weierstrass (1815-97)、Ernst Eduard Kummer (1810-93)、Leopold Kronecker (1823-91) 等數學家，所以在數學研究方面特別顯得興旺。在 Berlin，Klein 和挪威來的 Sophus Lie (1842-99) 相識，兩個人很快成為好朋友。在這段期間，兩個人同時活躍於 Kummer 的討論班，他們並且天天見面，交換彼此的研究心得。Klein 還聽了 Kronecker 關於二次形理論的課，研究數論。此外，他也和 Weierstrass 相交往，討論函數論的問題，還寫了複變函數理論方面論著。這段期間他也從他的朋友 Stolz (1842-1905) 學得非歐幾何的知識。在參加 Weierstrass 的討論班上，他也做了關於 Arthur Cayley (1821-1895) 二次絕對形 (absolutes) 決定射影距離的報告。在這次報告裡 Klein 向 Weierstrass 提到非歐幾何具有射影性質的可能性，Weierstrass 認為這兩者根本上是不同的領域，不可能有關係。但是事實上，二年後 Klein 便提出了肯定的答案：非歐幾何是射影幾何的一部份。後來 Klein 在寫《十九世紀數學發展史》，便自覺認為他和 Weierstrass 在數學研究的心理類型上並不同，他提到“Weierstrass 的天賦使得他傾向於謹慎小心的研究，一步一步地建築通往高峰的道路，在本質上他很少清楚地眺望遠處眾山峰的輪廓”，這也使得 Weierstrass 忽略了這個問題。(Klein, 1928, p. 140)

1870 年初，在 Clebsch 的鼓勵下，Klein 和 Lie 一齊到法國巴黎跟 Camille Jordan 學習群論。Jordan 在群論上的造詣甚高，他是第一位將 Galois 理論整理得最清楚的數學家，並且出版了巨著《置換群理論》(Traite des substitutions)，Klein 和 Lie 從 Jordan 那裡得到不少的啟發。這期間也經常與 Darboux (1842-1917) 討論微分幾何的知識，不久因為發生普法戰爭 (1870-1871)，Klein 馬上回國，投入戰爭的行列，而 Lie 則繼續留下來，不幸因為間諜嫌疑的罪名入獄，後由於 Gaston Darboux 全力的營救下，才獲得釋放，之後，Lie 便回到挪威了。(Yaglom, 1988, p.24)

幾何學上的成就

戰爭結束之後，Klein 在 1871 年 1 月獲得了哥廷根大學的不支費講師資格，同年夏天 Stolz 也在 Göttingen 擔任講師，Klein 便和 Otto Stolz 繼續地討論 Lobachesky 和 Bolyai 在非歐幾何上的作品。8 月份，他在 Mathematische Annalen 發表了非歐幾何是射影幾何一部份的具體研究成果，他推廣 Cayley 利用絕對形來定義歐氏幾何空間的角和點間距離，來肯定歐氏幾何具有射影性質的方法，把非歐幾何在橢圓、雙曲線、拋物線等幾何學的名目下統一起來。Klein 稱 Lobachesky 的幾何為雙曲幾何，稱 Georg Friedrich Bernhard Riemann 在正的常曲率曲面上的幾何為橢圓幾何，而稱歐氏幾何為拋物幾何。在這篇論文裡，Klein 也提供了一個完整的雙曲幾何模型，在二維的情況，Klein 的非歐幾何模型是普通歐氏平面上一個圓的內部，其中非歐幾何的點是圓的內點，非歐幾何的直線是圓的弦（不包括處於圓周上的點），所以整個非歐幾何平面是圓的內部，Klein 並且利用 Cayley 的射影度量概念定義了角度和點間距離，圓內的點、弦、角及其他圖形，滿足雙曲幾何的公設。並且對應於平面上的

雙曲幾何的每個定理都是圓內歐氏幾何的事實，若雙曲幾何的公設有矛盾，那麼歐氏幾何本身也會有矛盾，所以 Klein 的雙曲幾何模型解決了非歐幾何創建以來，公設的一致性（consistency）問題。

在 Klein 二十歲剛過的這段時期是成果累累的時期，除了在非歐何的成就外，陸續還有和 Lie 發現著名的 Kummer 曲面的漸近線性質（1870）、微分方程式這一領域的研究（1871）、關於剛體力學和線幾何關係的研究（1871）、關於線幾何學基本定理的研究（1872）、關於拓樸學的研究等等，所以這段時期幾何學成為他的主要研究對。德國幾何學家 Clebsch、Plücker，還有 Möbius、Steiner、Von Staudt 在 1867-1872 年間相繼去世，Klein 在年僅二十三歲儼然已成了德國幾何學家發展的接棒人。

發表 “Erlanger Programm”

1872 年，在 Clebsch 的幫助下，Klein 年僅二十三歲的年紀便成為 Erlangen 大學的正教授。依照 Erlangen 大學的規定，每一位新進的教授除了就職演說外，還要出刊一份綱領，Klein 便提出了著名的 Erlanger Programm。在綱領中他揭示群論在幾何學研究的重要性，並且用群的概念將當時幾何學各分枝統一起來，一種幾何學和一種群相對應，所謂的幾何學就是探索在所對應的群的變換下，圖形性質不變的理論。同一年，Clebsch 突然間因患白喉病而去世，Klein 立即接下由 Clebsch 所創刊的 *Mathematische Annalen* 的編輯工作。

函數論的成就

在 Erlangen 大學三年之後、他和 Alexander von Brill 一道繼 Ludwig Otto Hesse 之後，成了 Münich 工藝高等學校的數學教授。這時期和在 Leipzig 時代（1880-1886），Klein 不但在幾何學方面繼續發展，函數論也成了他的主要研究對象，其中最主要是橢圓模函數（elliptic modular function）和自守函數（automorphic function）。（Gillispie et al eds, 1981, p. 396）

他和 Fricke 在橢圓模函數方面作了一系列的研究，從模函數理論，Klein 進一步研究新的數學領域，也就是自守函數的研究。而在這同時，比 Klein 年輕 5 歲的法國數學家 Poincaré 也從不同的方向研究自守函數，1881-1882 年間，Klein 和 Poincaré 兩人彼此在自守函數的研究上競賽。Klein 由於過度的勞累，健康情況受到嚴重的影響，導致在往後的幾年無法再從事原創性的研究活動，一直到 1884 年秋天，健康情況才好轉，但是以後 Klein 在數學研究的原創性研究，卻把重心移到了研究制度、應用數學和數學教育方面，確實地發揮他領導組織的能力。

一段令人玩味的插曲

在離開 Leipzig 轉往哥廷根任教之前，Klein 和美國 Johns Hopkins 大學之間的一段故事是頗令人玩味的。Johns Hopkins 大學在 1876 年成立之初，即延聘英國代數學家 James Joseph Sylvester（1814-1897）來領導大學的數學研究。Sylvester 不但帶動 Johns Hopkins 大學的數學研究氣氛，並且在 1878 年創辦 *American Journal of Mathematics*，確實地帶動了美國的數學研究（Duren et al, 1989, pp. 3-10）。1883 年秋天，當 Sylvester 想要辭去這個職位回到英國去，大學董事會唯恐這所新大學在數學研究上失去原動力，有意延攬 Klein 來領導大學的數學研究。Johns Hopkins 大學的研究環境良好，並且是一所新大學，對 Klein 而言，是足以讓他發抱負，一展長才的地方。但是由於 Klein 的健康當時尚未完全康復，並且他從 Cayley 那邊得知 Sylvester 在 Johns Hopkins 的年薪是 6000 圓，然而 Johns Hopkins 給 Klein 是 5000

圓，所以 Klein 在回覆 Johns Hopkins 的信中提出兩個條件：第一是大學能給他和他的家庭經濟保障（退休金和撫卹金），第二是年薪 6000 圓。Johns Hopkins 對於 Klein 的條件並不能完全同意，關於第一點，他們只給 Klein 像一般美國公民一樣有保險的權利，而第二點，他們表示年薪 5000 圓是教授級中最高的薪水，Sylvester 有 6000 圓，主要是因為某些原因，但是他們還是非常希望 Klein 能到這所大學來。Klein 堅持自己原先的決定，既然他們無法允諾這兩個條件他就不再考慮到 Johns Hopkins 大學去了（Reid, 1978, pp. 21-23）。從 Klein 後來成功地領導哥廷根學派的數學研究來看，Johns Hopkins 大學未能延攬到 Klein 來繼續 Sylvester 的事業，確實是一大損失。

領導哥廷根學派

1885 年 Klein 來到具有 Causs、Dirichlet、Riemann 數學傳統的哥廷根大學。自 Gauss 以來，哥廷根的數學研究便兼重純數學和應用數學的發展，這跟 Berlin 大學只注重純數學理論的研究是不同的。1892 年 Schwartz 離開哥廷根到柏林大學繼承 Weierstrass 的職位後，Klein 開始領導哥廷根的數學研究，從 1892 年開始在 Klein 的領導下哥廷根大學的數學、物理學教育制度、教育計劃進行了很大的改革，1895 年他從 Königsberg 請來當時已頗具盛名的 Hilbert 來繼承 Heinrich Weber 的職位。1902 年他向當時的教育部長 Altoff 提議增設一個數學教授席位，請來 Hilbert 的朋友、數論大師 Minkowski 來擔任數學教授。

Klein、Hilbert 和 Minkowski 三人的數學成就吸引了許多外國留學生到哥廷根來學習數學，至此哥廷根已經成為了世界數學中心，並且在數學研究的水準上超越了柏林學派。1900 年在哥廷根留學的日本數學家便提到：“為這裡和柏林的完全不同而感到吃驚，這裡是來自世界各國的少壯派集合。實際上這裏是數學世界中心”。由於哥廷根大學的聲名遠播也吸引了不少的科學家來到哥廷根，值得一提的是著名的物理學家 Max Born（1882-1970），他是哥廷根大學物理研究所的領導人，並且也是諾貝獎得主。他領導哥廷根理論物理學派，並且培植了量子力學創始者 Werner Heisenberg（1901-1976），還有後來指導原子彈計劃的美國物理學家 J. Robert Oppenheimer（1904-1976）。（Yaglom, 1988, p.135）

編輯《數學科學百科全書》

1890 年代，Klein 特別有興趣於數學物理和電子工程，而他在這一方面的成果之一，便是與他的學生 A. Sommerfeld 一齊合編了一本有關迴轉器理論的教科書。1895 年積極參與《數學科學百科全書》的編輯工作，他並且和 K. Muler 編輯了四卷有關力學的部分。從 1902 年開始、參加《現代文化》的編輯工作，八年之間和他的學生 W. V. Dyck 一齊共同負擔其中的數學部分。此外他更著手於 Gauss 遺稿的刊行工作。

桃李滿天下

Klein 不僅是一位偉大的數學家，還是一位優秀的數學教育家。1872 年 11 月 Clebsch 死後，他的學生轉移到 Erlangen 大學來跟 Klein 一齊做研究，這些學生包括 Axel Harnack 和 Ferdinand Lindemann（1852-1939）。Harnack 後來證明了勢論（potential theory）上一個著名的定理，Lindemann 後來給了 π 是超越數的第一個證明。在 Leipzig 時代，很多美國學生來聽 Klein 講課，並且參加 Klein 的討論班，其中包括 F. N. Cole 和 H. B. Fine。Cole 後來為 Columbia 大學教授，從 1896 到 1920 年間一直是美國數學學會的秘書。而 Fine 後來領導普林斯敦成世界數學重心之一，在哥廷根時代，1892 年之前就已經吸引了大批的美國留學生來到哥廷根，包

括 M. Bôcher、H. S. White、E. B. Van、M. W. Haskell、H. D. Thompson，其中前三位後來成為美國數學學會的主席（Aspray & Kitcher, 1988, p.136），所以 Klein 對美國的數學研究發展上，應該也有他的影響力存在。²

重視數學教學法

Klein 能夠吸引那麼多的學生來跟他一齊做研究，除了他的聲名遠播之外，另一方面是因為他上課的方式是很有魅力的。他習慣在上課時間的一個小時之前先到課堂上，將他原本準備好的講義重新看過一遍，在自己的心中再整理一遍，等到上課的時候，他有條不紊的將數學式子和圖形列在黑板上，因此上完課之後，整個黑板所呈現的是完美的數學結構。對於上課的主題，他會介紹給學生很多可供參考的資料，他教學的原則是讓學生自己去證明定理，他只提示一些方法，並且認為要學好課程的話，在課堂上一小時，在課堂外就需要花四小時來研讀（Reid, 1986, p. 48）。此外，他講課擅長於綜觀全局，“他能在絕然不同的問題中，洞察到統一的思想，並有一種集中必要的材料來闡明其統一見解的藝術。”（Reid, 1986, p. 48）。而他的學生 R. Fricke 在他 70 歲生日的紀念文上，也同樣提到他的講義組織嚴謹、確實、清晰和優美，並且以統合的精神為基調來介紹數學知識的方法，是非常受學生歡迎的。事實上，Klein 認為討論班可以刺激學術研究，討論班的主要課題，通常是他正從事研究的問題。在討論班上，他那豐富而多采的思想以及處理問題的方法完整的傳給了學生。

促進應用數學的發展

十九世紀下半葉德國的工商業迅速發展。1875 年 Klein 到慕尼黑工藝高學校之後，開始了解到自然科學和工商對數學的需要，體會到發展應用數學的重要性。在對未來教師的講課中，就曾經包括畫法幾何學、統計學、力學等。此外，1880 年在 Leipzig 大學的就職演說中，也強調應用數學的重要性。在哥廷根時期，Klein 和一些自然科學，以及工業界人士同創立哥廷根協會來發展應用科學。這個協會在哥廷根創立了許多一流的研究所，使得這個組織成為德國在二十世紀初期的主要科學研究中心，Klein 對於應用數學的關心，往後在他發起的數學教育改革運動中進一步表現出來。

改革中學數學教育

1892 年開始，兩年一次在哥廷根召開的教師自然科學講習班，也包括數學在內。1895 年，數理科學教育促進會的年會在 Klein 的建議下，在哥廷根召開。Klein 以深入淺出的方法，為其講授古希臘幾何三大問題，1898 年成立哥廷根協會之後，在這裏加講習班的教師們接觸到工業技術的尖端，協會並向他們提供應用數學和物理學教育和研究的方法。同一年，也在 Klein 的建議下，更新了中等學校教職考核測驗規定，應用數學從純粹數學脫離而獨立出，從此應用數學在大學教材裏乃占據著鞏固的地位。1900 年之後，Klein 意識到數學教育改革，除了力強師資的培育工作之外，中學數學課程的改革也是相當重要的一環。1900 年在學校會議（Schulkonferenz）上，由於 Klein 的主張，強調了應用數學的重要性，並要中等學校講授微積分和解析幾何。1904 年 Klein 在哥廷根對參加講習班的中學教師的演講中，更主張函數概念必須成為數學教學的中心，以後更成為“函數的思考方法”這樣的一種口號而廣泛的傳播開來。同一年，自然科學家會議在 Breslau 召開，由於在 Klein 的提議下，決定成立數理教育委員會，並且委託包括 Klein 在內的十二人，寫下在翌年 1905 年 Meran 會

議上公布的中學數學課程大綱。它的主要精神是：

- (1) 教材的選擇、排列，應適應於學生心理的自然發展。
- (2) 融合數學的各分科，密切與其他各學科的關係。
- (3) 不忽略邏輯訓練，實用方面也應置為重點，以便充分發展學生對自然界和人類社會諸現，能夠進行數學觀察的能力。
- (4) 為達到此等目的，應養成函數思想和空間觀察的能力，作為數學教授的基礎。

為了連繫初等數學課程和高等數學之間的關係，1908 年 Klein 出版了他的數學教育名著《從高觀點看初等數學》(Elementary Mathematics from an advanced standpoint)，內容中包括了他的數學教育思想。

第一任 ICMI 的主席

這些成就使得 Klein 不僅成為數學界的權威，在數學教育領域內也是成就非凡，事實上 Klein 在數學教育界的影響已經從德國延伸到國際了，1908 年第四屆國際數學家大會在羅馬舉行，會上正式通過一項提案，決定成立國際數學教育委員會 (ICMI)，第一任主席就是 Klein。從 1908 到 1914 年中，在 Klein 領導下的 ICMI 做了大量的工作，這六年累積的各國數學教育情報告、以及在會議上的專題報告，乃是極為寶貴的數學教育史資料，至今仍不失其重要價值。(張，1990，p. 52)

非凡的行政管理能力

從 Klein 領導哥廷根大學的數學發展，以至哥廷根協會的成立，到後來的數學教育改革運動，都獲極大的成就，我們不免對於這位偉大人物的個性感到興趣。Hilbert 傳的作者 C. Reid 便描寫 Klein 是一位不苟言笑、嚴肅的人，據說他一學期只開一次玩笑。他的權威性，使得學生用 “the great Felix”、“the divine Felix” 之類的語彙來稱呼他 (Reid, 1986, p. 46)。他的接棒人 R. Courant 認為他有超乎一般人的能力，主要是因為他不為私利地往既定的目標前進，並且他個性正直，從不虛榮和自命不凡，所以後來都會有新的追隨者，他的夥伴也很願意跟他一齊工作 (Reid, 1986, p. 325)。事實上，Klein 在哥廷根哲學院並沒有正式的行政管理的權利，但是他的同事都很願意配合他的決定。Hermann Weyl (1875-1955) 曾經寫道：Klein 像一位上帝般地統治哥廷根，他如神般的權利主要來自於他的個性，他對工作的熱心奉獻以及做好事情的能力 (Reid, 1986, p. 307)。Klein 領導能力的表現，值得一提的是延攬人才方面，1904 年國際數學家會議在德國 Heidelberg 舉行，Klein 在聽了當時尚未知名的德國工師 Ludwig Prandtl (1875-1953) 做了有關熱傳導論文的專題報告之後，印象非常深刻。1905 年應用數學研究所成立之後，立即延攬 Prandtl 領導應用數學研究所，後來這個研究所在 Prandtl 的領導下成為國際知名的力學中心。(Yaglom, 1988, pp. 135-136)

晚年的榮耀

晚年的 Klein 在科學上獲得極高的榮耀，1913 年他被選為德國科學院的院士。並且獲得 “Herr Geheimrat” 的頭銜，這是像英國科學家獲得 “sir” 稱號一樣的尊貴。

註解

1. 柏林大學於 1810 年設立，首創「討論班」制度。一般教授在「討論班」可提供討論主題，但不得預作假定之結論。學生討論時，每有正反兩種不同意見時，凡能列舉事實，充分

說明理由時，始可視為正確之結論。

2. 關於 Klein 對美國早期數學研究發展的影響，可參考 Karen Hunger Parshall 和 David E. Row 所合寫的：“American Mathematics Comes of Age: 1875-1900” (Duren, 1989, pp. 3-28)

參考資料

張奠宙 等著 (1990), 《近代數學教育史話》，北京：人民教育出版社。

顏志成 (1993), 《Felix Klein 的數學教育思想》，台師大數學所碩士論文。

Aspray, William & Philip Kitcher (eds.) 1989, 《History and Philosophy of Modern Mathematics》, Minneapolis: The University of Minnesota Press.

Duren, Peter et al (eds.) 1989, 《A century of mathematics in America Volume III》, American mathematical Society.

Gillispie, Charles Coulston et al (eds.) 1981, 《Dictionary of Scientific Biography》, Vol. 7, 396-400, New York: Charles Scriber's Sons.

Klein, F. 1928, 《Development of Mathematics in the 19th Century》, (英譯自 1928 年德文版), 凡異出版社翻印。

Reid, Constance. 1978, “The Road Not Taken: A Footnote in the History of Mathematics”, The Mathematical Intelligencer, Vol. 1, pp. 21-23.

Reid, Constance. 1986, 《Hilbert-Courant》, New York: Springer-Verlag.

Rowe, D. (ed.) 1989a, 《The History of Modern Mathematics Volume I: Ideas and their Receptions》, San Diego: Academic Press, Inc.

Yaglom, I.M. 1988, 《Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century》, Birkhauser. (Translated from the Russian by S. Sossinsky.)

「中人算學者」李尙燮

台師大數學研究所教學碩士 宜蘭國華國中 吳秉鴻老師

一、前言

根據史家研究，在朝鮮李朝時代，「中人算學者」所屬的「中人階級」(chungin)在世界史上是一個絕無僅有的技術官僚團體，他們通過與同一階級者通婚，形成一個封閉且緊密的社會結構，譬如慶善徵與洪正夏的家族系譜圖，¹就是很好的例證。相對於日本各流之間的競爭，朝鮮的中人算學者以慶善徵與洪正夏為例，在技藝上固然可以精益求精，然而，他們的視角也可能容易窄化成所謂的「中人習氣」(chungin uisik)。正因為如此，他們與「兩班階級」的合作，就變得十分重要。根據韓國數學史家金容雲的說明，「中人算學者」李尙燮就曾與「兩班階級」南秉吉共同研究過，故本文除了介紹「中人算學者」李尙燮外，亦簡介「兩班階級」南秉吉，並初步探討在十九世紀中葉，貴為「兩班階級」(yangban)和「中人算學者」這兩個人如何互動的梗概。

本文是筆者碩士論文的部份內容，以下就重點簡略陳述，請讀者不吝指教！

二、李尙爌的生平簡介

有關李尙爌的生平事蹟，筆者至今並未找到任何傳記，因此，我們必須從其它的資料中去拼湊出來。所幸，一些韓國書籍中還存在有他個人零散的資料，可供我們參考研究。目前筆者收集所得大致如下：

- 1、金容雲編，《籌學入格案》，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(10)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁1~364。
- 2、金容雲編，《籌學先生案》，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(10)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁365~514。
- 3、金容雲編，《籌學八世譜》，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(10)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁515~621。
- 4、黃元九、李鍾英編，《本廳完薦案》，收入《朝鮮後期曆算家譜·索引》，漢城：韓國文化社，1993年。
- 5、黃元九、李鍾英編，《雲科榜目》，收入《朝鮮後期曆算家譜·索引》，漢城：韓國文化社，1993年。
- 6、黃元九、李鍾英編，《雲觀先生案》，收入《朝鮮後期曆算家譜·索引》，漢城：韓國文化社，1993年。
- 7、李榮基主編，《奎章閣圖書韓國本綜合目錄上》，漢城：漢城大學校圖書館，1981年。
- 8、李榮基主編，《奎章閣圖書韓國本綜合目錄下》，漢城：漢城大學校圖書館，1981年。
- 9、俞景老，〈《量度儀圖說》解題〉，收入《韓國科學技術史資料大系·天文學篇(10)》(漢城：驪江出版社，1986年)，頁5~6。
- 10、金容雲、金容局共著，《韓國數學史》(日文)，東京：楨書店，1978年。
- 11、金容雲，〈《算術管見》解題〉，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁2~4。
- 12、金容雲，〈《借根方蒙求》解題〉，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁4~6。
- 13、金容雲，〈《翼算》解題〉，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985年)，頁6~7。

其實，後三篇為李尙爌算學著作的介紹，但未對其生平多加著墨。第九、十篇雖有涉及李尙爌的生平說明，但其資料所本的，不外乎是前八篇的內容，而前六篇的內容，又以首篇最為詳盡。現在，根據上述這些文獻，筆者試圖還原李尙爌的算學生涯。

李尙爌，又名尙赫，字志叟，陝川人，生於純祖十年(1810)，卒年不詳。於辛卯式年(純祖三十一年·西元1831年)《雲科榜目》有名，²同年，與堂兄著爌(1809~?)於辛卯三月初一同被薦入《本廳完薦案》，³但只有尙爌列名其中。不過，李尙爌也是經過三次完薦才得以進入的。隔年，⁴即純祖三十二年壬辰(1832)八月入《籌學入格案》，⁵於後，亦曾入《雲觀先生案》。⁶由此可見，李尙爌早期的官運尙稱順遂，晚年則官至別提(從六品)。

李尙爌是一位中人算學者，曾任「計士」、「別提」，其父秉喆、祖晚求亦曾任「計士」，

而曾祖鼎祥則任「籌別提」，這些名稱都可以在《經國大典》(1485)算學職的官職中找到。⁷而《經國大典》中的算學職，是「中人」經由科學獲得官職的途徑之一。由附錄一可知，李尙懌的家族的確是所謂的「中人」家族，經記載統計，在朝鮮時代《籌學入格案》的陝川李氏人數，為同時期的第七名，⁸而此陝川李氏的組成人員，均是李尙懌的家族。故身處於以算學為主的「中人」家族，⁹李尙懌長期受此環境薰陶，也難怪有「**李君簡慧卓犖，凡所寓目，必究其源而後已，而其於曆算，實有天份焉，故其妙悟如此也**」之評論了。¹⁰相同的，李尙懌於 1840 年所生的兒子李時用，亦深受家族環境影響，於「中人」階級中也有不凡的表現。¹¹

至於這些出身於中人階級的技術官僚的任用資格，則是先就學於相關的教育養成機關——亦即「雜學」，然後再通過「雜科」考試後取得。所謂「雜學」，是指設在漢城與全國各處的技術官養成機關，學生來源是中人階級子弟。雜學共包括了「醫學」(典醫監管轄)，「算學」(戶曹管轄)，「畫學」(圖書署管轄)，「律學」(刑曹管轄)，天文地理學(教風俗地理，觀象監管轄)，「道學」(教道教)，「譯學」(教語學，司鐸院管轄)等七門。至於卒業之後的「雜科」考試，則分初、複試兩個階段，但卻只有四科——「譯科」(主考漢語、蒙古語、女真語和倭語)、「醫科」(主考醫學)、「陰陽科」(主考天文學、地理學和命理學)以及「律科」(主考律學)，分別在司鐸院、典醫監、觀象監以及刑曹舉行。在這種情況下，算學者的任用資格考試最有可能歸到「陰陽科」，如此一來，他們在學時所修科目，當然不只是算學了。¹²

「算學」既然是技術官僚的專業之一，且算學職的充員又以科學來取才，那麼算學取才所測驗的《詳明算法》、《算學啓蒙》與《楊輝算法》三書，¹³對通過國家算學考試後，任職天文台預算官的李尙懌來說，¹⁴應是相當熟悉這三本算書的。有此算學基礎，再考慮其家族的算學背景，李尙懌對於算學知識的追求，應是相當熱烈的，也才能從英祖十七年(1741)傳入朝鮮的《數理精蘊》一書中，¹⁵以自己的算學素養擷取精華，於 1854 年出版自己的著作——《借根方蒙求》，而這也是他的第一本數學著作。

除了《借根方蒙求》(1854)外，¹⁶李尙懌其它的著作尚有《揆日考》(1850)、《算術管見》(1855)、《陝川李氏世譜》(1863)與《翼算》(1868)。其中，《揆日考》是一本天文學書，¹⁷而《陝川李氏世譜》是一本譜系類著作，¹⁸另三本則是算學書。¹⁹底下，則簡介其三本算學著作。

三、李尙懌的數學著作簡介

《借根方蒙求》分為上冊上卷(乾)和下冊下卷(坤)共兩冊，李尙懌撰此書的目的，在該書自序中有如下的說明：

借根方，泰西算術也。本名阿爾熱八達，譯云：「東來法，則中國之立天元一法耳。」夫天元一，中國之法也，以唐荊川、²⁰顧筭溪之巨儒，²¹尚不能知其術焉，²²暨得借根方法以算《測圓(海鏡)》、《益古(演段)》、《授時厯艸》等書，無不通釋吻合，此豈非失諸朝而求諸野者乎？我東於吏綴之學，甚疎其能，知有是術者，惟賴《律厯淵源》一書。²³以我輩不能數一二，得知唐、顧所不知，豈不大幸也哉！苟欲使是術傳久垂永，要在布廣是書，俾學者轉相肄習，而原編備載各部卷帙甚大，有難家度戶弄，²⁴又原書過於詳核，覽者反有支離之慮。故今以本法算線、面、體諸部，若干條另為一部，且畧其句讀，令初學便覽而易知，以公同好云爾。歲在閏逢攝提格仲呂之月志叟自序。²⁵

換言之，《借根方蒙求》是李尙懌在「天元一即借根方解」的認知下，用《數理精蘊》中的

「借根方」，來解「《測圓(海鏡)》、《益古(演段)》、《授時厯艸》等書」的「天元術」，在發覺「無不通釋吻合」後，想要將此一方法保存給後代學習，但「原書過於詳核，覽者反有支離之慮」，故以「借根方比例」會通全書，而「以本法算線、面、體諸部，若干條另為一部，且畧其句讀，令初學便覽而易知」的原則下所編成的。

由此可知，《借根方蒙求》是韓國數學史上，第一本嘗試用「借根方比例」來運算《數理精蘊》各卷內容的一本著作，因此，該書以「借根方」方法來統御全書是無庸置疑的。

《算術管見》共分〈各等邊形拾遺〉、〈圓容三方互求〉、〈弧線求弦矢〉、〈弦矢求弧度〉和〈附·不分線三率法解〉五個部份，而其著述的主要目的，則可從南秉吉為該書所做的序文中得知：

《算術管見》余友李君志叟所著也，書為三種。其一以各邊形之每邊求面積及內容、外切圓徑，與以面積求各等邊形之每邊法，而《數理精蘊》則止用定率比例，故以此補其闕也；其二圓內容三小方形，以圓徑、方邊相求之法，而古無其法而勑立也；其三以西人杜德美割圓及弦矢捷術推演為弦矢定率，又反求弦矢求弧之術，而杜法不言其入算之根，故《赤水遺珍》及《疇人傳》等書所載之說亦不分曉，是以推以詳之，使人易知也。蓋此三種，實創前賢所未發之旨，我東昧於算學何足與論，而雖中國之精通如王、梅、江、戴者見之，必服其深造而精詣也。李君簡慧卓犖，凡所寓目，必究其源而後已，而其於曆算，實有天份焉，故其妙悟如此也。²⁶

由此可知，《算術管見》內容包含「各等邊形中，因『《數理精蘊》則止用定率比例，故以此補其闕也』」、「圓容三方互求」、「弧線求弦矢的入算之根」及「弦矢求弧度」所做的研究心得，其後尚有「斜弧三角形之不分線三率法的緣由與圖解」的附錄。其中，對於方程式的列式與解法來說，該書是用「天元術」的，與《借根方蒙求》用「借根方」是大不相同的。換言之，《算術管見》是李尙燮關於算學的研究著作，其中涵蓋了《數理精蘊》下編卷二十至卷二十二、《赤水遺珍》與《天步真原》等算書的研究心得與評論，它可以說是在朝鮮數學著作中，對數學有創造性研究的書籍之一。

《翼算》共分〈正負論〉和〈堆垛說〉兩個部份，至於其著述的主要動機，亦跟《算術管見》一樣。不過，其書內容的開創性較《算術管見》多，先看南秉吉為此書所做的序文：夫自皇明隆萬以來，算家論述不下十百，幾盡探賾無有餘蘊。至若方程及立天一之正負術無所發明，抑或未遑而然歟？法不知正負之別，數難辨損益之變，其於開方尤為親切；且堆垛之法，積累成體，虛實按排，自有條理，此最關於差分者也。余友李君志叟著〈正負論〉、〈堆垛說〉二編，余弁首而名之曰《翼算》。蓋錯綜論解，洞見根底，發前人不傳之秘，苟非高明特達，安能有此精微之論哉！²⁷

由此可知，《翼算》內容包含「開方」、「方程」、「天元」、「多元」的正負術和堆垛與差分的關連，亦是一本關於算學的研究著作。而〈正負論〉涵蓋的算書為《九章算術》、《測圓海鏡》、《益古演段》、《四元玉鑑》、《算學啓蒙》、《方程論》、《少廣拾遺》、《數理精蘊》、《赤水遺珍》和《算學正義》；〈堆垛說〉涵蓋的算書為《楊輝算法》和《四元玉鑑》。以李尙燮編成此書的年齡已有 59 歲來說，能有此開創性的研究成果，除了好學不倦外，對算學的熱情應是支持他的動力來源，尤其於〈正負論〉的精采論述，在在都說明了李尙燮博「古今算書」的算學素養。

四、李尙燮與南秉吉

李尙燮與南秉吉是韓國十九世紀中葉著名的數學家。他們兩人對「借根方」與「天元術」的認知，有著異於中國算學者的解讀方式，其自在的態度，令人印象深刻。不過，本小節只論述兩人的互動情形。底下，請先容許筆者介紹南秉吉。

南秉吉(1820~1869)，字元裳，號六一齋，晚香齋，亦名相吉。在朝鮮李朝哲宗一年(1850)時，他曾在科學考試中的增廣文科殿試中以丙科及第，²⁸後來分別擔任吏曹參判與刑曹判書。哲宗十三年(1862)又升任議政府左參贊，這些官位都是『顯職』。他的哥哥南秉哲(1817~1863)，擔任吏曹判書兼大提學，也是當時的高官。²⁹兄弟倆儘管雖然都貴為兩班(yangban)士大夫(sadaebu)階級，³⁰但都喜愛研究數學與天文學，堪稱是韓國數學史上的一段佳話。³¹

南秉吉不僅數學著述頗豐，在天文學方面也有《中星新表》(1853)、《恒星出中入表》(1854)、《量度儀圖說》(1855)、《時憲紀要》(1860)、《星鏡》(1861)、《推步捷例》(1861)、《春秋日食攷》和《太陽更漏表》，³²另一本著述為《選擇紀要選》。³³在此，我們只略論他的算學著述。他在這一方面的著作計有《無異解》(1855)、《測量圖解》(1858)、《算學正義》(1867)、《勾股述要圖解》、《九章術解》、《緝古演段》與《玉鏡細草詳解》，³⁴而南秉吉的《無異解》甚至於被史家推許為韓國數學史上的第一篇數學論文，其內容是論述「借根方」與「天元術」是相同的。³⁵

關於李尙燮與南秉吉互動的最早記載，依筆者目前手上的資料來看，是前者於哲宗一年(1850)所編纂的《揆日考》一書，內有後者為之作序。³⁶於哲宗六年(1855)，李尙燮為南秉吉《量度儀圖說》做校正時，即在書的序文中自白：

尚燮膏肓於東綴之學者也，固陋寡聞，徧求疇人，訖未有可語者，而公以餘事寓目，其獨見超詣有如此，豈非天知之能歟？³⁷

於是，他「特年來叨遊，承聞緒言，深有所悅服者，故序其夙所景仰者，而不能自己云！」³⁸或許李尙燮也被南秉吉的愛好數學所感動，所以，他們後來成為數學研究的莫逆之交。儘管李尙燮這一邊，由於「中人算學者」的身份，始終「以不佞承誨有日，嚮慕惟勤」自稱，³⁹然而南秉吉卻待之以朋儕之輩。

至於貴為「兩班階級」的南秉吉，為何肯視「中人算學者」李尙燮為朋儕之輩呢？或許我們可以從他為李尙燮所寫的兩篇序文窺知一二吧！在《算術管見》序文，他說：「蓋此三種，實創前賢所未發之旨，我東昧於算學何足與論，而雖中國之精通如王、梅、江、戴者見之，必服其深造而精詣也。李君簡慧卓犖，凡所寓目，必究其源而後已，而其於曆算，實有天份焉，故其妙悟如此也。」又在《翼算》序文中，他說：「余友李君志叟著〈正負論〉、〈堆垛說〉二編，余弁首而名之曰《翼算》。蓋錯綜論解，洞見根底，發前人不傳之秘，苟非高明特達，安能有此精微之論哉！」在這兩篇的序文中，南秉吉對李尙燮均有著高度的評價，不只於其算學素養，更對其算學研究的創見，衷心的讚賞。而這大概也可以解釋何以他們相援引對方著述，以及互邀對方為自己的著作校正或寫序了。⁴⁰

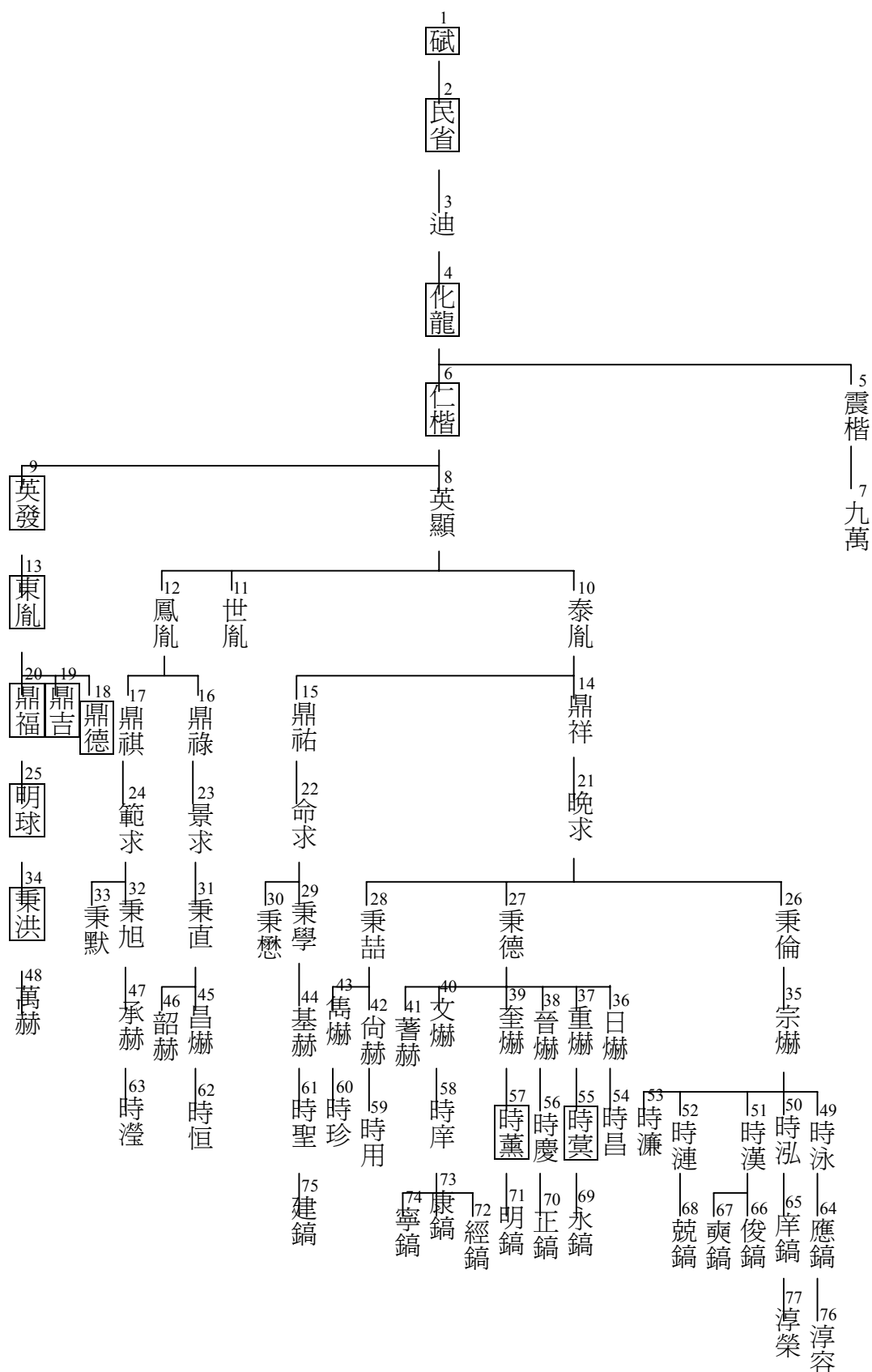
令人好奇的是，李尙燮的《借根方蒙求》為何沒有邀得南秉吉作序，而只是自己寫序呢？按照兩人的互動情形來推斷，筆者認為南秉吉於哲宗一年(1850)為李尙燮所編纂的《揆日考》寫序，應只是下屬的著作呈給長官的單純理由而已，直到李尙燮的《借根方蒙求》於哲宗五年(1854)成書後，南秉吉才折服於李尙燮的數學能力，並不時和李尙燮做書藉與知識互動，於是才有李尙燮於哲宗六年(1855)，為南秉吉《量度儀圖說》一書校正時，書中序文的自白。至此，兩人才成為莫逆之交。故《借根方蒙求》沒有南秉吉的序文，亦就不難理解了。

五、結論

李尙燦和南秉吉兩位，對十九世紀中葉的韓國來說，應算是傑出的算學家。李尙燦是中人階級的算學家，而南秉吉出身於兩班家庭，兩人在算學上的合作，正是「中人」與「兩班」合作的象徵，而這兩人在彼此的互動中，均為自己的數學生涯找到輝煌一頁，且為彼此的數學成就相輝映。因此，關於這一類階級互動的研究，仍值得進一步的去探討。

附錄一：陝

川李氏籌
學入格族
譜



備註：框起來的名字，代表不在《籌學入格案》中。

註解

1. 參閱川原秀城，〈東算と天元術 - 一七世紀中期~一八世紀初期の朝鮮數學〉。
2. 記載朝鮮時代雲科(陰陽科)合格者的榜目，年代從 1713 年至 1879 年。其中定期科舉稱為式年，每三年一考，以子、卯、午、酉為式年，又得第一、二、三名者分別給官職從八品階、正九品階及從九品階。參閱金良洙，〈朝鮮後期曆算家譜九種解題〉，收入黃元九、李鍾英編，《朝鮮後期曆算家譜·索引》(漢城：韓國文化社，1993 年)，頁 3~20；蔡茂松，《韓國近世思想文化史》，頁 223~235。
3. 朝鮮時代，三曆廳完薦天文、曆算、觀象監等官員，入屬生徒房本業學習的記載。參閱金良洙，〈朝鮮後期曆算家譜九種解題〉。
4. 根據前後記載，李尙燦的第二任妻子，應於 1831 年至 1832 年八月間娶入的。
5. 朝鮮時代，技術職中人具有算員入格者的記載。參閱金良洙，〈朝鮮後期曆算家譜九種解題〉。
6. 參閱金良洙，〈朝鮮後期曆算家譜九種解題〉。
7. 算學職成為朝鮮的制度，是世宗為修正《經國大典》而施行的。參閱川原秀城，〈東算と天元術 - 一七世紀中期~一八世紀初期の朝鮮數學〉。
8. 朝鮮時代籌學入格案的十大姓氏為(1)慶州崔氏 203 共位佔 12.5%；(2)全州李氏共 169 位佔 10.4%；(3)井邑李氏共 121 位佔 7.4%；(4)南陽洪氏共 111 位佔 6.8%；(5)泰安李氏共 103 位佔 6.3%；(6)朱溪崔氏共 82 位佔 5%；(7)陝川李氏共 64 位佔 3.9%；(8)慶州李氏共 59 位佔 3.6%；(9)新平韓氏共 57 位佔 3.5%；(10)川寧玄氏共 45 位佔 2.8%，此十大姓氏共佔籌學入格者(1014 位)的 62.3%。參閱金良洙，〈朝鮮後期曆算家譜九種解題〉。
9. 金容雲指出：「中人一語，肅宗在位(1675~1720)時始為官方所用。作為一種專門人才，中人乃自錄用較低級別的文官考試取才中招募而來。事實上，他們大多採自中人家庭，但這種沿襲現象並不意味著子承父職，倒是中人階層的內部聯姻造就了此一傳統。數學家這種關係最為明顯。據《籌學入格案》(數學考生錄取名冊)，十五到十九世紀共錄取了 1627 名生員，而這些生員的父職，除了 124 名醫師、75 名譯員和 65 位天文家外，其餘都是數學家。中人數學家生活在一個封閉緊密的社會群體之中。」引金容雲，〈泛範式與李朝數學〉，收入劉鈍、韓琦等編，《科史薪傳》(瀋陽：遼寧教育出版社，1997 年)，頁 185~200。
10. 此為南秉吉(1810~1869)於李尙燦所著《算術管見》(1855)序文中的讚賞。參閱南秉吉，〈《算術管見》序〉，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985 年)，頁 233~235。
11. 參閱附錄一。
12. 參閱洪萬生，〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs. 何國柱〉；簡江作，《韓國歷史》，頁 259；蔡茂松，《韓國近世思想文化史》，頁 233~234。
13. 關於這三本書的簡介及對朝鮮算學的影響，參閱葉吉海，《李朝世宗時期的朝鮮算學》，頁 51~75。
14. 此職隸屬觀象監。據《大典通編》及《大典會通》的記載，觀象監「掌天文、地理、曆數、占籌、測候、刻漏等事」。引李相澤編，《大典通編上》(漢城：漢城大學校奎章閣，1998 年)，頁 97；鄭玉子編，《大典會通上》(漢城：漢城大學校奎章閣，1999 年)，頁 100。
15. 參閱申在永主編，《增補文獻備考上》，頁 21；張存武，《清代中韓關係論文集》(台北：臺灣商務印書館，1987 年)，頁 334~335。
16. 筆者以金容雲主編本做為研究的文本。另奎章閣藏有寫本，共 2 冊，參閱李榮基主編，〈子部〉，收入《奎章閣圖書韓國本綜合目錄下》，頁 1394。

17. 李尙燮於哲宗一年編纂，共 1 冊 36 張，南秉吉爲之作序。參閱李榮基主編，〈子部〉，收入《奎章閣圖書韓國本綜合目錄下》，頁 1378。
18. 李尙燮於高宗一年編纂，共 2 卷 2 冊。參閱李榮基主編，〈史部〉，收入《奎章閣圖書韓國本綜合目錄上》，頁 329。
19. 參閱金容雲、金容局共著，《韓國數學史》，頁 273。此三本文本均收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》。
20. 唐順之(1507~1560)，字應德，號荆川，武進人。參閱王連發，《明代顧應祥之研究》(台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2002 年)，頁 26~27。
21. 顧應祥(1483~1505)，字惟賢，號箬溪或箬溪道人，湖州長興人。其生平參閱王連發，《明代顧應祥之研究》，頁 17~27。
22. 元中葉與明朝，中國古典數學急劇衰落，不僅沒有再出現可與《數書九章》、《四元玉鑑》等媲美的數學巨著，而且，宋元數學的傑出創造如增乘開方法與天元術、四元術亦無人通曉。明朝所有的著作，都恢復了賈憲以前的開方法。像顧應祥、唐順之那樣的明朝大數學家，卻全然不懂天元術。例如顧應祥在《測圓海鏡分類釋術》自序：「……晚得荊州唐太史所錄《測圓海鏡》一書，乃元翰林學士欒城李公冶所著。雖專主於求容圓容方一術，……凡所謂以積求形者，皆盡之矣。但其每條下細草，雖徑立天元一，反覆合之，而無下手之術，使後學之士茫然無門路之可入。輒不自揆，每章去其細草，立一算術，又以其所立通勾邊股之屬，各以類分之，語義稍繁者，略如芟損，名曰《測圓海鏡分類釋術》。非敢僭改前賢著述，惟以便下學云爾。」說明了寫書的目的，同時也說明顧應祥已無法理解天元術，故刪去有關天元術的內容。參閱郭書春，〈中國科學技術典籍通彙敘〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1~26；馬翔，〈《測圓海鏡分類釋術》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》數學卷第二分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 993；王連發，《明代顧應祥之研究》，頁 71~73。
23. 經筆者仔細核對後，應是《數理精蘊》一書，不過，亦有可能是作者的總稱。
24. 「庋」音「ㄎㄟˋ」，意爲「收藏」；「弄」音「ㄋㄨㄥˋ」，意爲「密藏」。故「有難家皮戶弄」爲「不方便收藏」之意。參閱教育部重編國語辭典編輯委員會編，《重編國語辭典》第三冊，台北：臺灣商務印書館，1981 年。
25. 引李尙燮，〈《借根方蒙求》序〉，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985 年)，頁 349~350。
26. 引南秉吉，〈《算術管見》序〉。
27. 引南秉吉，〈《翼算》序〉，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系·數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985 年)，頁 561~562。
28. 文科及第者，第一至三名爲甲科，第四至十名爲乙科，第十一至三十三名爲丙科。甲科第一名爲「狀元」，授從六品職，第二名爲「榜眼」，第三名爲「探花」，各授正七品職。乙科和丙科則分別授正八品職及正九品職。原有科者，甲科第一名加四階，第二、三名各加三階，乙科加二階，丙科加一階。參閱蔡茂松，《韓國近世思想文化史》，頁 223~227；李成茂著(楊秀芝譯)，《朝鮮初期兩班研究》，頁 88~94。
29. 參閱韓相夏主編，《朝鮮人名辭書》(漢城：景仁文化社，1796 年)，頁 1147~1148；洪萬生，〈數學文化的交流與轉化：以南秉吉的《算學正義》爲例〉；金容雲，〈《算學正義》解題〉，收入《韓國科學技術史資料大系·數學篇(5)》(漢城：驪江出版社，1985 年)，頁 1~3。
30. 兩班之名，原指朝廷朝會東西文武兩班列之稱。然韓國史上之稱兩班者，一指文武人員品官之在職或未在職者，一指士大夫、士族、士類、士林。英祖(在位年 1725~1776)時人李重煥(1690~?)所著《擇里誌》，則分兩班、中人、下人三級。(1)兩班：宗室、大家、名家、品官、士大夫、鄉曲品官、中正功曹。(2)中人：士大夫庶孽、外方閑散人、譯官、

- 算員、醫官、將校。(3)下人：京外史胥、軍戶、良人、公私賤奴婢。故兩班乃指官僚層及知識層之人物及其家門。引蔡茂松，《韓國近世思想文化史》，頁 173~174。
31. 參閱洪萬生，〈數學文化的交流與轉化：以南秉吉的《算學正義》為例〉。
 32. 參閱李榮基主編，〈子部〉，收入《奎章閣圖書韓國本綜合目錄下》，頁 1387、1392、1384、1382、1382、1389、1389、1391。其中《恒星出中入表》又名《推步法》；《太陽更漏表》又名《太陽出入表》。
 33. 參閱金雲泰，《奎章閣韓國本圖書解題(經·子部)1》(漢城：漢城大學校圖書館，1978 年)，頁 299。
 34. 參閱金容雲、金容局共著，《韓國數學史》，頁 268~272。
 35. 關於此一論述，參閱洪萬生，〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉。
 36. 參閱李榮基主編，〈子部〉，收入《奎章閣圖書韓國本綜合目錄下》，頁 1378。不過，該目錄並未收錄此篇序文。
 37. 引李尙燮，〈《量度儀圖說》序〉，收入俞景老編，《韓國科學技術史資料大系·天文學篇(10)》(漢城：驪江出版社，1986 年)，頁 525~526。
 38. 引同上。
 39. 引李尙燮，〈《測量圖解》序〉，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系·數學篇(5)》(漢城：驪江出版社，1985 年)，頁 367~369。
 40. 李尙燮為南秉吉校正的書有《量度儀圖說》及《算學正義》，作序的書有《量度儀圖說》及《測量圖解》；南秉吉為李尙燮作序的書有《揆日考》、《算術管見》及《翼算》。

畢業感言 - 李尙燮與我

台師大數學系教學碩士班 吳秉鴻老師

懷著一顆忐忑的心，期許能順利的完成碩士論文寫作，毫無反顧的投入洪萬生教授門下，幸運地，在洪教授的諄諄教誨與耐心指導下，筆者終於能將研究的結果加以呈現！

回想當初的論文研究 - 李尙燮《借根方蒙求》初探，實是無心之舉，完全不知如何著手研究，只好先收集相關的資料加以涉略，從無到有，慢慢地揭開李尙燮的神秘面紗。隨著對作者的進一步瞭解，筆者心頭激起了點點的漣漪，並充滿著驚奇與喜悅，一位如此不平凡的韓國算學家，筆者何其有幸能與他有所接觸！或許，點點的漣漪已漸漸擴大，心靈的深處正響起深刻的共鳴，不知不覺中，筆者真正喜歡上他的故事，甚至想要對其有更深入的探索。

抱著此種熱切的心情，趨使筆者大量閱讀相關的書籍，幸運地，在極短的時間內已有初步的研究成果，不過，隨之產生的問題也變多了。在無法求得這些問題更進一步的結論後，因自我要求甚高及所依靠資料不足的壓力之下，讓自己的心情不甚穩定，曾幾何時，筆者也正式加入了夜貓一族，在幾個輾轉難眠的夜裡，獨自的思索與工作，不過這樣並未得到滿意的解答，反而受到閉門造車之苦。為此，筆者拋開畏懼的心情，勇敢地向洪教授做問題的溝通，也因而跨出心中最大的障礙，讓筆者在往後的寫作上更加勇於自我肯定，另外，透過與洪教授的討論，以往阻塞難通之處，往往有柳暗花明、茅塞頓開之感，同時也拓展筆者對數學史的認識，並得以徜徉在哲人的智慧中，盡情分享精采的篇章。

在這次的研究中，最令筆者感到興奮的事是完成了李尙燮的族譜，雖然花費了許多的時

間，不過卻令人獲益良多，譬如在紛雜的資料中，如何擷取出想要的部份並加以統合的能力，以及見證韓國中人階級的封閉性……等等，都使筆者的論文寫作有著加分的作用。因此，筆者認為在論文的研究過程中，如果時間能夠配合時，宜採各方面的深入探討，因為將各點分別突破後，往往會連結成論文的主要架構，並使論述的內容更有深度且具有說服力，另外，意外的收穫是培養出自己寫作時應具備的能力，而這只能在實際的學習中去累積。

一路走來，要感謝的人不勝枚舉，首先要感謝洪教授的啟蒙與引領，筆者方能浸潤於數學史的領域之中，一窺堂奧，含英咀華。還要謝謝學長錫琦、連發的經驗分享，研究所二十四位同窗的長期扶持，有他們的不時勉勵與鼎力協助，才能順利突破研究的瓶頸。最後，由衷地感謝家人的支持，以及妻子淑鸞代盡父職，悉心呵護女兒庭甄與兒子家濬，讓我得以全心致力於專題的研究和論文的寫作上，謝謝你們！

畢業論文感言

海山高中 董芳成老師

回想當初，原本沒有來考教學碩士班的打算，只因為想報考的同事要我去了解考試的內容，以便準備隔年的考試，想不到竟上了榜，也因此與數學史結下這一份緣。很感謝上天與師大教授們的教導，尤其是洪萬生教授的指導，讓我得以完成學業。這期間有許多酸甜苦辣，論文寫作時，更有一些慘痛的經驗。以下提出三個例子，或許與芳成一樣寫作能力不好的同好，能引以為借鏡。

其一是剛開始論文的寫作時，芳成想先有整體的構想後才要下筆，可是書看來看去，想法總是斷斷續續無法連貫，一個月、兩個月過去，依舊無法組織一個好的結構來，論文也一直沒有進展。後來改變作法，先大致分為時代背景(含作者生平)、內容分析、結構與體例及對後世的影響幾個部分，不去考慮其中小節的內容，將書中看到的相關重點或對於文本的了解打到電腦中，再一面整理、一面思考如何組織整體的結構，如此，一方面對文本內容逐題了解，一方面將借來的相關書籍一篇一篇地閱讀，逐漸把手邊的書看完，這也大概有了以論文為主題的資料庫，再來做第二次的資料整理分析，加上自己的看法，漸漸成為章節，論文的基本初稿也就這樣地形成。芳成發現這樣的改變很適合一面寫論文又得一面教書的我，如果能重來一次，芳成會希望跳過最前面兩個月的原地踏步期。

第二個經驗是有關資料的參考註腳，當初第一次寫的時候並未隨時列出參考註腳，書籍陸續歸還圖書館後，又得重新借書才能將註腳列出，並且有些內容要花許多時間才找到原出處，更慘的是部分書籍短期間根本借不到書。這個慘痛經驗告訴芳成，寫文章要養成隨時記下參考註腳的習慣。

第三是關於定時請教老師，因為芳成對自己寫的東西一直不滿意，所以一直不敢寄給洪老師，每次都等了很久才寄給老師，進度也就會一直拖下去了，到了要提論文時，反而能給老師的批閱時間就變少了，自己修改的時間也就變得更趕。其實，論文寫作過程最好能定期給指導教授過目及批改，或請老師給修正的方向。將寫好的章節內容寄給老師，請老師大致看過，給一些大概的修改方向，這樣就可以減少很多的麻煩，否則，方向不對，論文的主題

就無法烘托出來，最後匆匆忙忙反而會顧此失彼。

除了上述三點外，論文中參考資料、章節段落及圖表的格式與一般文章或書籍的格式略有出入，芳成參考學長、學姊的畢業論文，又請教同學文珮後，總算得以解決。這段期間實在很感謝大家對芳成的幫忙，尤其是洪老師在論文寫作上的指導與批改，讓我論文得以完成，得以將這份的喜悅與生病的父親分享，這對芳成有極大的意義。


前年母親罹患癌症，三個月內便駕鶴西歸了。在去年暑假前父親又突然病倒，經核磁共振檢查後發現是肺癌末期，癌細胞已轉移至腦部，以至頭痛、嘔吐、走路無法平衡、重聽、無法發聲等。後經放射線治療與化學治療，病情獲得暫時的控制。這段期間中，腦中經常空無一物，悲傷的情緒揮之不去，經常前面放著手提電腦，卻久久未能寫出一語。由於如此，論文口試通過的當天，芳成與父親都感到相當的高興。

論文雖然完成了，可是對於文章寫作仍有很大的進步空間，對於很少寫作的我，這段期間對於寫作有了許多進步。對於主題的描寫、語句的傳達，也有初步的認識。當然變化最大的是對於數學史的認識，有了更深層的了解，以前總是將較為有趣的數學故事當作是數學史的應用教學，其實，這樣的教學是較為表面與膚淺的，數學史有著能讓教學更加活絡的作用，這雖然不容易設計，卻是可以幫助學生了解與讓學生明白許多概念的演進，這樣對學生記憶的持久性也是有幫助的。也發現對於一個主題的探討，要從某個觀點或面向來分析，而不是全面有關的都列入。因為芳成的思考的醞釀期較長，也較緩慢，所以原先加入的一些討論團體，只好取消了。這段期間較為舒緩後，會再重新開始。

影響：對於文本的分析與對於論文的架構的要求，讓我也逐漸學習到如何分析一本書的基本架構，如何從一本書中看其中的發展與轉換，甚至於是比較。去除不能烘托主題的內容。

特別：入門後才發現之前對數學史的概念是相當表面的，數學史除了提昇學生對數學的興趣外，還可以增進對數學的了解，而後者也是芳成今後努力的目標。芳成的論文題目是「從『啓蒙』觀點看朱世傑的《算學啓蒙》」，一開始，國內沒有專門介紹此書的書籍，寫到一半，國內突然出現大陸方面有人專論的書籍，這時不知道該高興還是該傷心，因為有人寫出來就容易參考別人的東西來了解文本中的內容，但是有人寫出來後，要寫出別人沒有的東西就更難了。

熬夜的艱辛，但論文印出來的當時，也有相當的成就感。

- 
1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
 2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
 3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
 4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>