HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生）陳啓文（中山女高）彭良禎（麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第六卷 第二、三期合刊 目錄（2003年3月）

南秉吉《九章術解》卷七校勘

台北縣福和國中　黄清揚老師

朝鮮南秉吉《九章術解》卷七「盈朒」共收錄二十個應用問題，「盈朒」的意思即爲「盈不足」。利用盈不足術，即雙設法，來解決線性與非線性問題是本卷的特色，也是古代中算家特出的成就之一。[1]綜觀全卷，盈不足術的應用相當廣泛，其對線性問題給了精確解、非線性問題給了近似解。而從《九章算術》的整體來看，此卷在介紹線性方程組的〈方程章〉之前而，在相關比例算法的〈粟米〉、〈衰分〉、〈均輸〉三章之後。按劉徽的說法（以御隱雜互見），「盈不足術」乃比例算法的推廣與應用。[2]《九章算術》中，劉徽的解釋對於我們了解其思想具有深刻的啓發。但經過長時間的推移，南秉吉著《九章術解》時是否從劉徽注中得到更進一步的發展，亦或是另闢蹊徑自尋桃花源，都將是我們關注的焦點。另外，從文化交流的角度來看，探究《九章術解》的底本，將對我們了解南秉吉的學術背景有初步的認知。

第一節　底本探討

作爲《九章術解》的讀者，我們很自然的提出了一個看法：南秉吉在著《九章術解》時所憑依的母本爲何，是清代中韓文化交流時所流傳過去的版本，抑或是更早的版本？爲解決這一問題，筆者在此卷對文字部分做了對比，並得到初步成果。以下的說明分爲題目順序、單一文字及段落差異三方面。

1. 題目順序。首先筆者將《九章術解》「卷七」依順序編號，再依各題中之關鍵字予以名稱，接下來便是對照各版本的差異（見附錄表格四）。經過初步的對照，《九章術解》與微波榭本及李潢本在題目順序上是一樣的，文淵閣四庫本及武英殿聚珍本則缺了第七問「共買豕」，南宋本則缺第七卷。

2. 單一文字。經過對題目順序作比較之後，筆者再逐字比較。此部份可分爲四點來說明《九章術解》與其他版本的不同，之後並嘗試探索其所採用母本的可能性：

(1). 卷名。南秉吉在本卷中所使用的卷名爲「盈朒」兩字，相關文獻採用『盈朒』作爲卷名者似乎僅出現在《數理精蘊》，其他版本皆使用「盈不足」。（事實上南秉吉採用了《數理精蘊》中的數學知識來解釋《九章算術》，見下文。）

(2). 在第六問術文中最後一句「減盈，增不足即物數」之「數」一字，其餘各版本此處皆作「價」。

(3). 第十二問術文中，「大鼠所穿合尺五寸」，正確應爲「四尺五寸」，南秉吉在注中曾給予修正。相互對比之下，各版本中唯有微波榭本與李潢本脫落「四」字（在李潢本中，李潢對此錯誤有加註以說明，但他並沒有更改術文；微波榭本則未加註解）。筆者認爲，南秉吉所採用的母本也一定脫落了「四」這個字，不然，作者不會去作校正的工作。也正因爲作者做了校正，這裡留下了重要的蛛絲馬跡，讓我們得以繼續探究下去。

(4). 數字寫法。以「13」爲例，在各版本中多少會有著「十三」或「一十三」兩種書方式的差別，但是微波榭本及李潢本與《九章術解》在此則寫法完全相同。

因此，從上述四點看來，後兩點讓我們有理由懷疑《九章術解》的母本爲微波榭本或是李潢本，而不是其他的版本。當然，光憑這兩點還不夠充分，我們還需要更多證據來支持。

3. 段落的差異。這部分主要針對第四、六、十二及十九問四處的「術曰」來做說明。因爲這四問的處理皆是類似的，所以只討論第四問即可。首先來看第四問的「術曰」：

> **盈不足相與同共買物者，置所出率盈、不足各居其下。令維乘所出率，并，以為實。并盈、不足為法。有分者通之。副置所出率，以少減多，餘，以約法、實。實為物價，法為人數……。**

在文字編排上，武英殿聚珍本、文淵閣四庫本、微波榭本及李潢本與之相同。比對各文本之後，進一步發覺上述「術曰」內容實爲戴震私心自用的產物。因爲依據武英殿聚珍版，戴震在《永樂大典》中輯錄《九章算術》時，已將《永樂大典》中的順序調動過。就以此問來說，戴震將《永樂大典》中「實如法而一」五字刪去，而將「盈不足相與同其買物者」十字移到「術曰」之下，並將「其」改爲「共」，又在第二個「置所出率」之前添一「副」字。[3]經過這樣的調動及更改，所得到的結果就是我們所見第四問的「術文」部分。這種情形同樣出現在題六、題十二與題十九。這種情形之下，基本上我們便排除《九章術解》的母本爲戴震之前的版本了。

綜合上述，我們先排除武英殿聚珍本之前的文本做爲《九章術解》母本的可能性，加上從文字及題目順序的證據，進一步排除了武英殿聚珍本及文淵閣四庫本這兩種可能，因此便剩下微波榭本與李潢本可供我們細究。尤有進者，我們經過逐字比對後，發覺《九章術解》與這兩個版本在卷七只有「朒」及「價」兩字的差異。這樣一來，微波榭本與李潢本作爲母本的可能性應是相當高的。

第二節　南秉吉注解的特色

對於卷七注解之數學知識部分，南秉吉與前面幾卷的做法相同，他並未採用劉徽及李淳風注之術語－「齊同術」，而是用了另一種術語－「四率比例法」。其寫作風格較爲貼近《數理精蘊》，且與劉徽之注截然不同。再者，從《數理精蘊》在當時清國、朝鮮兩國的流傳情形看來，推論南秉吉有可能是看了《數理精蘊》之後，再用其中的數學知識來解釋《九章算術》。此論點有以下幾點證據：

1. 在採用「四率法」之注中，其書寫模式及語氣與《數理精蘊》相似。今取《九章術解》卷七中第一問「共買物」與《數理精蘊》卷八之第一問「有人分銀」（一盈一朒）爲例來做對比。《九章術解》「共買物」題在求人數的做法及說明如下：

> **以出八出七相減，餘一為一率。一人為二率。盈三不足四相加，共七為三率。求得四**

率七，即為人數。……。夫一人多出一，而總價差七。則一為一人之所多，而七為七人之所多可知矣。故一與一人之比，同於七與七人之比也。

《數理精蘊》在「有人分銀」題中求人數之做法及說明則爲：

法以七兩與九兩相減，餘二兩為一率。一人為二率。盈四兩與朒十二兩相加，共十六兩為三率。推得四率八，即為人數。...夫一人多分二兩，而總價差十六兩。則二兩為一人之所多，而十六兩為八人之所多可知矣。故二兩與一人之比，同於十六兩與八人之比。而為比例四率也。[4]

更相對比之下，我們很難抗拒兩者在書寫上相似的說法。

2. 各版本對「盈不足」所給的注提供我們一部份訊息，使我們得以了解南秉吉的說法比較接近何者。首先見《九章術解》卷七在第四問對「盈不足」所給的注爲：

盈者，有餘；不足者，朒也。設有餘不足以求適中，而亦為因較而得正數。

劉徽的注（見楊輝本、武英殿聚珍本、文淵閣四庫本、微波榭本及李潢本）則爲：

盈者，謂之朓；不足者，謂之朒。所出率謂之假令。盈朒維乘兩設者，欲為齊同之意。

《數理精蘊》的寫法則是：

盈，有餘也；朒，不足也。設有餘不足以求適中，亦為因較而得正數之法。[5]

從上述對比來看，《九章術解》與《數理精蘊》兩者在文字上幾乎相同，而劉徽的注除第一句與《九章術解》有部分類似之外，第二句就不相同了。所以，這個部分南秉吉應該是採用了《數理精蘊》的說法。

3. 《九章術解》卷七第六問注中有這樣一個問題：

假如眾人輪班。四人值五日，盈二十日；八人值九日，盈八日。求人數？

相同數字之問題見於《數理精蘊》卷八「雙套盈朒」之「兩盈」:

設如眾人輪班值日。不知人數，亦不之日數。只云每四人值五日，則盈二十日；每八人值九日，仍盈八日。問人數及日數各若干？[6]

兩者相同的程度自然不在話下。實際上，要能在不同的時空背景之下，能夠寫出相同數字及情境的問題，除了文化交流一途之外幾乎不可能達到。因此，此題之內容，南秉吉應得自於《數理精蘊》。

從以上的討論來看，我們了解南秉吉相當程度的採用《數理精蘊》中的知識。所以接下來，筆者就南氏之注概略介紹，以便說明「四率法」在卷七所扮演的角色，並進一步比較劉徽與南秉吉注解的異同。南氏在本卷第一問至第四問給了相當的注解（其注解形式見上述第 1 點），注解內容採用「四率法」，計算與說明兼有但較強調計算過程。相較之下，劉徽在第四問之後才給出了注，並且其注乃爲全章而設，計算雖有之但重點在說理。例如，在第四問對「有分者通之」之注，南秉吉的說法爲：

謂并不足為法。以七家、九家相乘得六十三，又通之得二萬二千六百八十。

劉徽的說法則爲：

若兩設有分者，齊其子，同其母。此問兩設俱見零分，故齊其子，同其母。

兩者的解釋方向就不同了。第五問至第八問南秉吉則未給詳盡算式過程，有趣的是在第六問後的注中，作者特別給了與《數理精蘊》中相同的題目（見上述第 3 點），並對該題有詳細的解讀，其考量值得令人玩味。第九問在本卷中具有關鍵地位，因爲南氏特別給了三種解法，這在其他題中並未得見。並且在題九之前，南秉吉大篇幅解釋「四率法」，題九之後則對「雙假令」較多著墨而對「四率法」較少提到。雖然如此，然其本質依然爲「四率比例法」，因

為作者在題九注中清楚的說到「以下諸術接仿此」。以上所述種種，皆針對南秉吉註解的特色而立，其評價留待下節說明。

第三節　南秉吉注解的評價

總結本章內容來說，南秉吉有可能採用微波榭本或李潢本為母本，並且正文部分參照《數理精蘊》作注，劉徽及李淳風之說法則未被採納。作者在本卷所呈現之數學素養，當然主要受到《數理精蘊》的影響，且其算法詳盡為一大特色。若採用現代的觀點，我們可以這樣說，南秉吉著書風格重在算術上，陳述算術過程之每一步驟皆非常詳盡，甚至會給出多種解法（題九）。相較之下，劉徽採用「齊同術」，其注則是較多說明，先說明方法再陳述算式或是算式與說明互相交錯，算術部分則不若南秉吉詳細。再從現代符號來對比，雖然兩人並無不同，但從 HPM 的觀點來看，兩人所採用的「修辭」進路相異且各有所長：南秉吉採用「西法」（「四率法」首見《同文算指》一書）來解釋《九章算術》，著重在詳述算式，試圖讓讀者知道每一步驟；而劉徽的進路則為傳統「中法」（「齊同術」），強調於解釋說明。除此之外，南秉吉會特別地在注中另給例子（題六）。以上即為筆者之看法，也希望這些內容的解讀，能對中韓文化交流有所貢獻。

註解：

1. 除了中國之外，古埃及與印度曾用「單設法」來解線性問題。
2. 劉鈍 (1993) .《大哉言數》(瀋陽：遼寧教育出版社)，頁 173。
3. 魏・劉徽注、唐・李淳風釋，《九章算術》，上海商務印書館縮印微波謝刊本，收入《四部叢刊》，頁 169。
4. 清・康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙・數學卷三》（鄭州市：河南教育出版社，1993），頁 344。
5. 同上，頁 344。
6. 同上，頁 362

《九章術解》卷八校勘

林倉億（服兵役中）

《九章算術》第八卷〈方程〉共十八問，皆是線性方程組的問題。「方程」即今所謂的線性方程組，《九章算術》中用來解方程的方法，稱為「方程術」，這是中國古代數學中十分突出的一項成就，[1]但在明清之際，「方程術」卻被各式歌訣所取代，以致「方程」幾至不可用之地步。梅文鼎對此提出嚴厲的批評：

> **至若方程，別無專書可證，所存諸例，又為俗本所亂，妄增歌訣，立為膠固之法，印定後賢耳目，而方程不復可用，竟如贅疣！**[2]

儘管如此，梅氏仍「竊以方程算術，古人既特立一章於諸章之後，必有精理」，[3]但當時「中西各書所載，皆未能慊然於懷」，[4]因此，在未見《九章算術》〈方程〉之情形下，作了《方程論》一書，而此書即成為《數理精蘊》〈方程〉的主要依據。「方程」雖為中國古已有之，

但在此時空背景之下，造成《數理精蘊》與《九章算術》在「方程」上有了很大差異。因此，南秉吉在他的《九章術解》中，如何以《數理精蘊》注《九章算術》的〈方程〉，以及其注解中透露了哪些有趣的訊息等等，這些議題都是本文所討論的對象。但在對南秉吉之注進行分析之前，實有必要探究其《九章算術》〈方程〉的底本。

第一節 底本探討

筆者將南秉吉《九章術解》〈方程〉中的術文，分別與武英殿聚珍本、文淵閣四庫本、微波榭本與李潢本中的〈方程〉術文作比對，發現雖然這些版本中的題目數目與順序皆一致，但術文中仍有許多相異之處。從這些相異處，筆者獲致兩點結論：

1. 《九章術解》〈方程〉中的術文與武英殿聚珍本、文淵閣四庫本互異之處遠比微波榭本與李潢本多，因此，南秉吉應不是以武英殿聚珍本或文淵閣四庫本爲底本。
2. 儘管《九章術解》〈方程〉中的術文與微波榭本與李潢本的相異處最少，都只有八處，但從第 1 問的相異來看，亦不能斷定南秉吉是以這兩個版本爲底本。

第二節 南秉吉注解的特色

在前幾章的分析中，可以看到南秉吉受《數理精蘊》很深的影響，往往援《數理精蘊》注《九章算術》。不過，若要分析《數理精蘊》如何影響南秉吉注《九章算術》〈方程〉，那就不能單看《數理精蘊》〈方程〉中的內容，還必須考慮《數理精蘊》〈借根方比例〉的內容，因爲南秉吉結合了這兩者來注解《九章算術》的〈方程〉（見下文分析）。至於劉徽與李淳風注究竟影響南秉吉多少，從南氏之注解無法明顯地看出來，南氏之注最主要仍是受《數理精蘊》的影響。以下就是南氏之注的主要特色。

首先，對「純正」方程的強調。[5]筆者認爲所謂的「純正」方程，指的是在解題過程中，毋需用到「正負術」的方程，也就是在整個解題過程中所出現的數字皆爲正，因此不必標其正負，這應該就是南秉吉名爲「純正」的意涵。《九章算術》〈方程〉中的第 1、2、7、9、10、11 問皆爲「純正」方程，南秉吉在注解中也都明白地指出。

其次，對「正負術」的注解。方程是「以御錯糅正負」，因此處理正、負數加減的「正負術」，自然是《九章算術》〈方程〉的主要核心之一，南秉吉亦在此下了很大的工夫。此外，對南秉吉「正負術」注解的分析，更是居研究南氏〈方程〉注解的關鍵地位，其原因有二：一是此注解的特殊性，在整卷的注解中，多是對解題程序的說明，也就是說明如何列數字、如何運算以求出答案，真正稱得上是在解釋算理的，獨有「正負術」的注解。二是透過對南秉吉「正負術」注解的分析，可以發現南氏在注解〈方程〉時，的確深受《數理精蘊》的影響。下表便是南氏對「正負術」的注解：

正負術	南秉吉之注[6]
同名相除，異名相益，	正與正相當、負與負相當爲同名，正與負相當爲異名。夫正者多算，負者少算。以此行之多算減彼行之多算，則以此行之少算加彼行之多算，然後此行之實數適得減盡。蓋多算之減去也，已過實數，故以此之少加彼之多，以相報補也。若此行之少算值彼行之少算，則固當直減；而此行之多算值彼行之少算，則必加之，蓋少算之加，即

	實數之減也。
正無入負之，負無入正之；	無入者，即無相當加減之位也。無可加減，則以此之多算，作彼之少算，即同名相減之理也；以此之少算，作彼之多算，即異名相加之理也。摠之實數直減之義也。
其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。	此實數相加之義也。凡方程之法，務去頭位，而若值頭位異名，則必須實數相加，然後減去頭位，惟其實數相加也，故其法一切相反也。

由上表中「夫正者多算，負者少算」一句可明白地看出，南秉吉以多、少來解釋正、負，而這正是《數理精蘊》〈借根方比例〉的用詞。[7]這種利用借根方的術語來解釋〈方程〉的情況，在南氏之著作中並非孤例，吾人可在其《無異解》中發現相同的情形：

> ……而正為多，負為少也，多少之全變，便是不變。故相消法之負從、負隅，為加減法之多根、多平方；至於實數歸之一行而為正者，分為兩邊則為負，〈方程篇〉所謂此多則彼少，彼多則此少是也。[8]

上面這一段文字是南秉吉在說明天元術之相消法與借根方之加減法無異時所寫的，其中「〈方程篇〉所謂此多則彼少，彼多則此少是也」正是指《數理精蘊》〈方程〉中的「蓋此多則彼少，彼少則此多也」，[9]類似的文字亦出現在南秉吉〈無異解序〉中：「〈方程篇〉所謂此正則彼負，彼正則此負是也」。[10]對照之下，我們可明顯地看出南秉吉將《數理精蘊》〈方程〉中的多、少理解成〈借根方比例〉中的多、少，但是，這樣子的理解非但不符合《數理精蘊》〈方程〉的原意，而且以此來解讀《數理精蘊》〈方程〉時，將會遇到無法自圓其說之處。[11]不過這種障礙在《九章術解》中並未出現，因此，南秉吉在注解「正負術」，甚至是在解題時，皆大量使用了這樣子的說法。

此外，「正負術」中「同名相除，異名相益」只說明了如何作兩行數字的相減，並未說明何以這樣做是對的。而南秉吉在注中，不僅利用借根方的多、少來說明其所當然，更用來解釋其所以然：

> 以此行之多算減彼行之多算，則以此行之少算加彼行之多算，然後此行之實數適得減盡。蓋多算之減去也，已過實數，故以此之少加彼之多，以相報補也。若此行之少算值彼行之少算，則固當直減；而此行之多算值彼行之少算，則必加之，蓋少算之加，即實數之減也。

不過，從今日的角度來看，南氏對其所以然的解釋不但未切中要領，還有語焉不詳之憾。即便如此，南氏對其所以然的解釋，仍深具開創性的意義，因爲無論是劉徽、戴震、李潢，或是《數理精蘊》、《算法統宗》、《同文算指》乃至《方程論》，皆未曾對其所以然作出解釋。[12]或許正是如此，南秉吉才特意在此作出解釋。

至於「正負術」的後半，「其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之」，乃《數理精蘊》之所無，南秉吉亦簡單以「其法一切相反也」帶過。值得注意的是，南氏雖說「若值頭位異名，則必須實數相加，然後減去頭位」，[13]但在實際解方程時，南氏並未使用此法，詳情見下文。

在南秉吉解方程的過程中，第一個特色就是南氏是利用「互乘相消法」來解方程，而非《九章算術》的「直除法」，[14]且從南秉吉的注中，我們可明顯地看出他對「直除」的理解，

是與戴震「古人文多省略」的看法一致，[15]而非劉徽的「令少行減多行，反覆相減」，不過，目前並沒有證據顯示南秉吉是受了戴震的影響。第二個特色，在於利用借根方的多、少來解釋題意。在前 3 問中，由於所列數字皆爲正數，故南秉吉未對題意多作說明，然而從第 4 問起，當列數字出現負數時，南秉吉便會引入借根方的術語，以第 5 問爲例：

今有上禾六秉，損實一斗八升，當下禾十秉。下禾十五秉，損實五升，當上禾五秉。

問上、下禾實一秉各幾何？

答曰：上禾一秉實八升

下禾一秉實三升

術曰：如方程，置上禾六秉正，下禾十秉負，損實一斗八升正。次置上禾五秉負，下禾十五秉正，損實五升正，以正負術入之。[16]

且看南秉吉之注：

上禾六秉之實少下禾十秉之實，餘為一斗八升。下禾十五秉之實少上五秉之實，餘為五升。故正負交列也。……[17]

明顯地，南秉吉利用「借根方」的術語，使得題意更加貼近後來所列的數字，而且每個數字之正負也連帶地決定了，可說是一石二鳥之計。不過，此種方式難免會得到與《九章算術》術文不同的數字，例如第 8 問中，南秉吉所列第三行的數字就與《九章術解》正負相異。面對此互異之處，南氏只是輕描淡寫：「左行正負雖變置，而乘減則一也。」。[18]至於爲何「乘減則一」，[19]則未作說明。

此外，前文中提及南秉吉並不使用「其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之」，這在第 5 問的注解中便可一目了然。第 5 問由於頭位（或稱首位）異名，所以當用此法，這南秉吉不但在注「正負術」時說過，在第 5 問的注解中亦明白說：「當用異名相除例也。」然而，他卻緊接著說：

方程以首位為正，故次行正負悉變之。[20]

「正負悉變」後，便不是用「異名相除例」，而是用「同名相除例」了。此種作法雖與南秉吉自己的說法矛盾，但卻是與《數理精蘊》的作法一致，[21]從此處，我們亦可以看出南秉吉深受《數理精蘊》之影響。

第三節 南秉吉注解的評價

從上一節的分析中可知，結合《數理精蘊》的方程與借根方，是南秉吉注解《九章算術》〈方程〉的最主要手法，[22]而之所以採取這種手法，應是南氏認爲這樣將能夠「使好學者庶其易曉」。[23]不過南氏並非一味地遵從《數理精蘊》，最顯而易見的例子就是並未依《數理精蘊》方程的分類方式，[24]而是只強調了「純正」方程。此外，南秉吉在「正負術」注中的獨創性工作，縱使水準不高，但足以顯現他並非只是個墨守成規的注解者而已。

不過，從南秉吉對「以正負術入之」此句的注解，我們可以看出南氏在注《九章算術》〈方程〉時並不十分嚴謹，因爲南氏對此句注解，不但前後不一，還顯得莫名其妙。例如第 12 問與第 14 問中，術文分別是：

如方程，各置所借，以正負術入之。[25]

如方程，各置所取，以正負術入之。[26]

南氏亦依術文列出皆爲正的數字，但對「以正負術入之」此句，南氏竟天外飛來一筆：「此乘減後，正變爲負也」，[27]並未如同其在第 3 問中作出正確的解釋：

此始列純正，而加減之後變有負算，故以正負術入之。[28]

會有如此大的差別，應是南秉吉並未仔細核算，而只單就術文字面之意，妄加解釋所致。因爲若南秉吉做過核算的話，他將會發現乘減後便成了頭位異名，而依他的算法，原先正變爲負那一行，就要「正負悉變之」，那不就又回到原來皆爲正的情形了！由此，我們可以看出南秉吉在注解時，確有十分草率之處。類似的草率之舉，亦出現在第 6 問中，南秉吉該問中所列之數字，無論如何地「變置正負」，都不能與術文相符，但南氏仍說「乘減則一也」。

總而言之，南秉吉之注《九章算術》〈方程〉，雖稱不上經典之作，但也還有其可取之處，而且南氏亦在其注解中反映了朝鮮當時的算學研究受《數理精蘊》影響這一現象，而更細緻的歷史圖象，則仍有待更多的研究去還原。

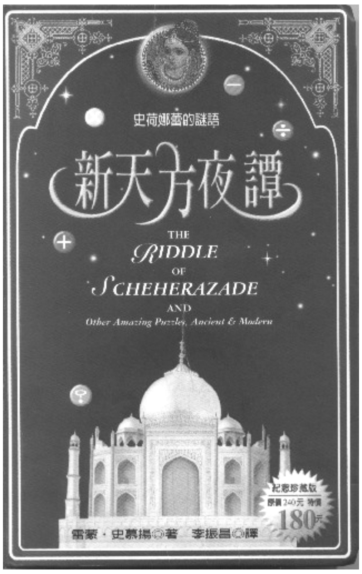
註解：

1. 郭書春推崇方程術爲《九章算術》最高的數學成就，參閱郭書春 (1995) .《古代世界數學泰斗—劉徽》(台北：明文書局)，頁 38~51。
2. 引清 • 梅文鼎，《方程論》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙 • 數學卷四》(鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 325。
3. 同上。
4. 同上。
5. 「純正」一詞並非是《九章算術》或《數理精蘊》之用詞，有可能爲南秉吉所創。
6. 引南秉吉，《九章術解》，收入金容雲編《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985)，頁 458~459。
7. 參閱清 • 康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙 • 數學卷三》(鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 940~964。南秉吉在所著《無異解》中亦明確寫出「正爲多，負爲少也」，見南秉吉 (1855)，《無異解》，收入金容雲編《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985)，頁 203。
8. 引南秉吉 (1855) .《無異解》，收入金容雲編《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985)，頁 203。
9. 引清 • 康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙 • 數學卷三》(鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 397。
10. 引南秉吉 (1855) .〈無異解序〉，收入金容雲編《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985)，頁 193~194。
11. 無法自圓其說之處在此段文字：「**其始也，任以首色為正，互乘眾色，與首色同類者皆正也，與首色異類者皆負也。其繼也以互乘所得之數，視正負之同異而加減之。然加減之餘，又有正變為負、負變為正者，總之因彼此而分正負，由多少而成虛實。互乘之後，任以一層為主，凡異號相加者，悉依本層，其號皆不變也。若同號相減者，本層多，其號亦不變；本層少，反減者，則正變為負，負變為正，蓋此多則彼少，彼少則此多也。**」筆者在此必須說明一點，從南秉吉《九章術解》、《無異解》與《算學正義》三本著作中，並無法得知南氏是否曾意識到此一不圓滿之處。
12. 《算法統宗》爲明朝程大位所著，《同文算指》由西洋傳教士與明朝李之藻合著，這兩本書在南秉吉之前已傳入朝鮮，不過筆者並不確定南氏是否讀過。《方程論》爲清朝梅文鼎所作，《數理精蘊》〈方程〉深受此書之影響，不過，此書是否有傳進朝鮮、南秉吉

是否見過，仍有待考。

13. 參閱南秉吉，《九章術解》，收入金容雲編《韓國科學技術史資料大系・數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985)，頁 459。
14. 所謂「互乘相消法」與「直除法」，請參閱郭書春譯注(1998).《九章算術》(瀋陽：遼寧教育出版社)，頁 403、414~415。
15. 參閱《九章算術》文淵閣版與武英殿聚珍版之戴震注。
16. 引同上，頁 460~461。
17. 同上，頁 461。。
18. 同上，頁 464。
19. 「乘減則一」應是南氏自創之語。
20. 引清・梅文鼎，《方程論》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙・數學卷四》(鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 461。
21. 《數理精蘊》〈方程〉中皆以「首色爲正」，而在「較數類」的第 8 問中，在消掉首色之後，便出現首位異名的情形，《數理精蘊》便謂：「重列二色之際，不能一體，須俱變其號，然後為順。」。參閱清・康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙・數學卷三》(鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 418。
22. 雖然筆者說南氏結合了《數理精蘊》的方程與借根方，但筆者並不確定南氏是否能夠清楚地區分這兩者的不同，例如在《無異解》中，南氏是引《數理精蘊》〈方程〉來解釋借根方(見本章第三節)，但從今日的眼光看來，卻是南氏以借根方理解《數理精蘊》〈方程〉在先，而後再反過來用〈方程〉解釋借根方。
23. 雖然南秉吉於〈九章術解跋〉中表示此書「未敢爲覺後覺而使好學者庶其易曉」，不過「未敢」二字只是謙遜之詞，希冀《九章術解》一書能夠「使好學者庶其易曉」才是南氏著書之目的。
24. 《數理精蘊》利用和、較將方程分爲和數類、較數類、和較兼用類、和較交變類。參閱清・康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙・數學卷三》(鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 396。
25. 引南秉吉，引南秉吉，《九章術解》，收入金容雲編《韓國科學技術史資料大系・數學篇(6)》(漢城：驪江出版社，1985)，頁 466。
26. 同上，頁 469。
27. 同上。
28. 同上，頁 457。

《新天方夜譚》



國立蘭陽女中數學　陳敏皓老師

《新天方夜譚》（The Riddle of Scheherazade and other Amazing Puzzles, Ancient ＆ Modern）
作者：雷蒙．史慕揚（Raymond Smullyan）
譯者：李振昌
出版公司：良辰出版有限公司
出版日期：1998 年 8 月第一版
頁數：304
價錢：180 元

近來於閒暇時閱讀學生介紹的《新天方夜譚》(Alf Lailah wa Lailah)，該書是阿拉伯文學的代表作，大部份完成於八、九世紀之間。初讀未聞其味，只覺得書本封面圖案顯明、人物造型有趣、建築物華麗，極像孩提時代的童話書籍。等到看完第一章、〈緣起〉後，倏忽觸發起筆者的閱讀神經，所以，就讓筆者帶領著各位進入奇幻的阿拉伯世界、馳騁在一望無盡的數學天地中，藉由此書來再度豐富讀者的想像力，你會深刻察覺數學魅力的存在！

〈緣起〉－故事相傳起源於波斯王宮，話說在《天方夜譚》的故事裏，有位國王因爲皇后的出軌行爲，不僅將皇后處死，並遷怒所有女子，憤而發誓每夜必選一美女爲妃，待天明時即刻處死，以報復皇后的不當行爲，城中的居民莫不驚慌，深怕家中有女初長成，此時，首相的長女史荷娜蕾（Scheherazade），卻志願入宮爲妃，憑藉她的聰明才智，利用每夜說故事的方式，企圖改變國王的想法，同時講到最精彩的地方，就賣個關子，因爲故事說完時就已經天明了，而國王很想知道答案爲何？所以，便賜她緩死一天，而等到第二晚上，史荷娜蕾又講另一故事，可是故事說完時又天明了，國王只好再下詔書緩刑，如此日復一日，過了一千零一夜，國王早已忘記自己的誓言了，國王因此被她迷住了，不但不殺她，反而十分愛她，她還替國王生了一個可愛的小孩。作者雷蒙．史慕揚（Raymond Smullyan）爲美國印第安那大學哲學系退休教授，他利用《天方夜譚》的故事架構，將數理邏輯、簡單代數問題、推理思考題目安排其中，並穿針引線串起一系列的故事，成爲現代版的《天方夜譚》，非常值得各位欣賞。

接下來，就由筆者來代替史荷娜蕾說故事給各位聽了：

✧　走失的小馬

史荷娜蕾：「有一天，一匹小馬再沙漠中走失了五天。第一天，牠不知道走了多遠？以後，牠每天都比前一天多走一里。到了第五天，剛好回到家裡，總共走了五十五里。」
「請問牠最後一天走了幾里？」

✧　什麼顏色

史荷娜蕾：「有一天哈珊碰到三個小男孩，哈珊談到他的驢子，『驢子是什麼顏色啊？』

其中一個男孩問道。」

這個嘛！哈珊回答說：「讓我們來玩個猜謎遊戲，這驢子可能是棕色、黑色、灰色，你們先隨便猜猜看，我會告訴你們猜得如何？看看你們能否推得正確答案。」

「我猜牠不是黑色的。」有個男孩說。

「我猜牠不是棕色的，就是灰色的。」另一個男孩說。

「我猜牠是棕色的。」第三個男孩說。

「『停！』」哈珊說：「猜的夠了，至少有一個人猜對了，也至少有一個人猜錯了。」

哈珊的驢子到底是什麼顏色？

✧ 聰明的法官拉西德

阿里是一位虔誠的回教徒，有一天阿里跟他的朋友阿米要去麥加朝聖，途中他們到了一個小村莊，停下來吃午餐。阿米有五片麵包，而阿里只有三片。就在他們開始吃的時候，有位富人走過來，聲稱他很有錢，但是身上卻沒有帶糧食，能不能分他一點東西吃。吃完之後，富人謝謝他們並且留下八個等值的錢幣離開。現在的問題是如何公平分此八個錢幣？

阿米的提議：「他應拿五枚錢幣，阿里拿三枚錢幣。因爲我出五片麵包，而阿里出三片。」可是阿里覺得不公平，他覺得他應該分得比三枚多一點，但他也不知道該分多少。他們無法解決這問題，於是他們去請教村長，但是村長也想不出如何解決，於是村長建議：「去問聰明的法官拉西德吧！，他應該可以給你們公平而圓滿的答案。」

於是，村長帶他們去找拉西德，許多村民也聞風而至，急切地想要知道聰明的拉西德要如何判決。結果出乎阿里與阿米的意外之外，圍觀的群眾也都頗感驚訝，因爲聰明的法官拉西德說：「有五片麵包的人分得七枚錢幣，有三片麵包分得一枚錢幣，就此結案。」

究竟法官是如何得出這答案的？

上述這三個問題是不是很有趣？第一題是有關於簡單的等差級數，你當然可以使用級數的想法，但是，此書最特別之處在於其解答，且看其詳解：「5 天走了 55 里路，平均每天走了 11 里。由於小馬固定每天增加一里，所以，第三天正是牠的平均數，亦即牠在第三天走 11 里，因此，第一天走 9 里，第二天走 10 里，第三天走 11 里，第四天走 12 里，第五天走 13 里。」作者利用平均的概念及中位數的想法，值得大家思考！

第二題是有關於數理邏輯的想法，其詳解：「如果驢子是黑色，這三人都猜錯了，如果是棕色，這三人也都猜錯了，因此，驢子一定是灰色。」我想此提的想法在於作者利用驢子的顏色當出發點思考，有別一般人總是容易討論三個孩童的情況，這種「逆向」思索問題的方式，是制式化數學教學所最欠缺的。

第三題的問題就更有趣了，聰明的法官拉西德的解法是：「將每片麵包分成三等份，這樣就有 24 小片麵包。阿米有 15 小片，阿里有 9 小片。24 小片由三個人平分，每個人分得 8 片，因此阿米貢獻 7 片，而阿里只貢獻 1 片，所以得法官的答案。」妙哉！妙哉！

總之，推薦大家閱讀此書，一定是對各位思考有益的，所謂：「開卷有益！」大概就是這個道理吧。套一句台大數學系楊維哲教授的引言：「這種數學謎題的書，是非常重要的教育珍寶！我奉勸聰明的家長們，買這本書給你的孩子，其實你自己也可以享受一下！」

中東古文明數學巡禮

系列之三：巴比倫代數學隅及其『張本例』(generic example)的特性

中原大學數研所碩士生　英家銘

先看一個記載於巴比倫泥板上的題目：（考量到忠於原味，以下的數字我們使用六十進位法的格式。爲了不致混淆，我們用『,』來區隔不同的位置，而用『;』來表示他們沒有的小數點。例如，(2,3)表示 $2(60)^2+3(60)^1$，而(4;5)則表示 $4(60)^1+5(60)^{-1}$。）

例一　**若一個正方形的面積減去它的邊長，我們得到(14,30)，求邊長。**

解法：**取(1)，將它折半，得(0;30)；將(0;30)乘(0;30)，得(0;15)；將(14,30)加上(0;15)，得(14,30;15)，此數爲(29;30)的平方。現在將(29;30)加上(0;30)，得(30)，此即爲正方形之邊長。**

這個題目等價於解方程式：

$$x^2-x=(14,30)\text{ 。}$$

所以，處在 21 世紀的我們，會用我們熟知的方程式解法求出答案，而對於巴比倫人的做法，乍看之下應該難以了解。事實上，這個例題是某一類問題不斷一般化的其中一個環節，我們現在從這個脈絡的開頭來看起。

巴比倫人從未使用與我們現代相同的代數思考模式，但他們的算術方法可以解決許多非常困難的問題。在公元前 2000 年之前，巴比倫人已經發展出許多系統性的方法，來解決等價於二次方程式的問題，一部分三次和四次方程式也被解決。在此同時，他們可能也已經知道如何解出等價於線性方程組的問題。上面的問題，就是其中一個可化爲二次方程式的問題。這種問題最簡單的形式是這樣的：（以下我們使用現代代數符號來說明他們的方法）

例二　**找出兩個數，他們的和爲 14，積爲 45。**

解法：兩個和爲 14 的數一定可以寫成 7 + a 和 7 - a 的形式。所以

$$(7+a)(7-a)=45$$
$$49-a^2=45$$
$$a^2=4$$
$$a=2$$

故兩數爲 9 與 5。

使用上面的方法，巴比倫人可以解出等價於二次方程式的問題。

例三　解 $x^2+6x=16$。

解法：此方程式可化爲　$x(x+6)=16$。

令　$x+6=y$。

則我們必須找出 x 與 y 使得　$y-x=6$　且　$xy=16$。

令　$y=a+3$，$x=a-3$，

則　$(a+3)(a-3)=16$

$$a^2-9=16$$
$$a=5$$

故　$x=2$

現在我們把例一的解法用現代符號逐行對照，這樣就可以看出巴比倫人是如何解出這個

問題。

巴比倫解法	現代符號
取(1)，	令 $x-1=y$ ，則 $x-y=1$ 且 $xy=(14{,}30)$.
將它折半，得(0;30)；	令 $x=a+(0;30)$ ， $y=a-(0;30)$.
將(0;30)乘(0;30)，得(0;15)；	$[a+(0;30)][a-(0;30)]=(14{,}30)$. $a^2-(0;15)=(14{,}30)$.
將(14,30)加上(0;15)，得(14,30;15)，	$a^2=(14{,}30)+(0;5)=(14;30;15)$.
此數為(29;30)的平方。	$a=\sqrt{(14{,}30;15)}=(29;30)$.
現在將(29;30)加上(0;30)，得(30)，	$x=(29;30)+(0;30)$.
此即為正方形之邊長。	$x=(30)$.

例一中 x^2 的係數為 1，但他們也能解 x^2 的係數不為 1 的方程式。

例四　解 $7x^2+6x=1$

解法：將方程式兩邊同乘以 7，可得

$$(7x)^2+6(7x)=7 \text{ 。}$$

令 $$z=7x \text{ ，}$$

則方程式轉換為

$$z^2+6z=7 \text{ 。}$$

使用前面例子的方法我們可解出 $z=1$，所以 $x=\frac{1}{7}$ 。

綜上所述，我們知道巴比倫人能解決等價於方程式

$$ax^2+bx=c$$

的問題，其中 a 與 c 必須為正。他們將此方程式化簡為「標準型」

$$y^2+px=q \text{ ，}$$

其中 q 為正。他們解標準型的方法用公式表示，可以寫成

$$y=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}-\frac{p}{2} \text{ ，}$$

他們只找了一個解，因為他們的觀念中並無負數。最後， $x=\frac{y}{a}$ 。

從上面的幾個例子看來，巴比倫人由例二的方法出發，去解決例一與例三這一類的問題，再將這種方法推廣到例四這樣比較一般的問題。事實上，這不是巧合，在其他許多泥板上，我們發現許多用同樣方法解決的問題，此外，經整理過後也發現另外一些類似的題組，把一些較簡單的方法推廣到一般的問題上。還有，許多題目在開始解之前會寫一句「你遵照這個方法」（英譯 *You follow this method*），在結束時還會寫「以上即為解題過程」（英譯 *Such is the procedur.*）。以上種種都顯示，這些問題是要示範一些解題的一般方法。

所謂的「張本例」，就是以一個特殊的例子來說明一般的方法。John Mason 與 David Pimm 說：「張本例固然是一個真實的例子，但是它卻以被刻意要求成為『承載一般性』的角色來呈現。」雖然巴比倫人沒有與我們相仿的代數系統與方程式論，但他們在數學上的成就絕不

止於解決實際生活中所遇到單獨的特例。由上面的例子中，我們可以相信，他們知道某一些題目可以用相同的方法來解決，而且用實際的問題來說明這些一般的方法，從這個角度來看，我們也可以說他們是使用了數學史與數學教育中頗為常見的張本例。

參考資料

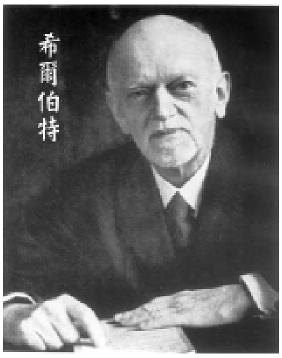
洪萬生 (2002).〈中算史中的『張本例』(generic example)〉,《HPM 通訊》5 卷 12 期，頁 1-3。

Bunt, L.N.H., Jones, P.S., Bedient, J.D. (1988). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood, Cliffs, N.J.：Prentice-Hall.

Eves, H. (1975). *An Introduction to the History of Mathematics*, (4th ed). New York：Holt, Rinehart and Winston.

再談無窮

高雄師大數學研究所畢業生　胡凱華



在《HPM 通訊》第五卷第十一期發表的〈無窮 VS. 教學 123〉一文中，黃茄峰運用了希爾伯特（David Hilbert, 1862-1943）的『無窮旅社』比喻，來介紹無窮這個抽象觀念。本篇將回應黃老師的文章，並對『無窮旅社』這個有趣的問題，做進一步的介紹。

首先，將原問題敘述如下：有一間無限旅館，這個旅館有無限多個房間，每個房間都依自然數的順序由小到大編號，而且每個房間只可以住一個人，老闆可以要求原來的房客換房間，但是必須要明確的告訴原房客換到幾號房（房間號碼可用次方與四則運算表示）。目前旅館的狀態是客滿，也就是每個房間都住了一個人，當發生下列情形時，聰明的老闆是如何安排旅客的房間，各位讀者在看文章的同時，不妨也想一想如果你是老闆的話，該如何來處理呢？

情形一：旅館外面來了 1 個人要住宿？

老闆請 1 號房的人搬到 2 號房，2 號房的人搬到 3 號房，依此規則 n 號房的人搬到 n+1 號房，新來的那個人住進一號房，這樣每個人都有房間住了。

情形二：旅館外面來了 10 個人要住宿？

有了剛剛的經驗，老闆請 n 號房的搬到 n+10 號，這樣 1~10 號房就空出來給新來的 10 個人住。至此我們可以知道只要是有限個人來，都可以依樣畫葫蘆的處理，但是馬上又有新的狀況發生了。

情形三：旅館外面來了一個旅行團要住宿，這個旅行團有無限多個人，每個人都有依序編號，老闆必須要明確的指出第幾號的人住第幾間？

老闆想了想，就把全部的人先請出房間，然後請原來 1 號房的人搬到 2 號房，2 號房的人搬到 4 號房，依此規則 n 號房的人搬到 2n 號房，這樣所有的單數號房都空出來了，接著就請旅行團第 m 號的人住進第 2m-1 號房，這樣所有的人也都有房間住了。

情形四：旅館外面又來了一個有無限多個人的旅行團，但是老闆覺得要大家一直換房間很不好意思，所以就決定想一個辦法，只要百分之一的人更換房間就好。

首先老闆將房間號碼為 100 倍數的房客都請出來，然後請第 100 號房的搬到 200 號房，200 號房的搬到 400 號房，依此規則 100n 號房的人搬到 200n 號房，而旅行團第 m 號的人就住進 100（2m-1）號房。

啊哈，又解決了一道難題！

情形五：這時旅館外面人聲鼎沸，老闆一看，哇哇哇，來了無限多個旅行團，每個旅行團有無限多個人，旅行團跟人也都有依序編號，這些人全部都要住宿，這下該怎麼辦？

老闆想一想，搬出數千年前老祖宗就已經知道的知識：質數有無限多個，利用質數的性質，這問題就迎刃而解了。首先將原有的房客都請出來，住 1 號房的的改到 2^1號房，n號房的改到 2^n號房，這樣原本的房客就都有地方住了，然後再安排第一個旅行團的第 1 個人住到 3^1號房，第 2 個人住到 3^2號房，第m個人住到 3^m號房，依此方法，第x個旅行團的第y個人安排到第x+1 個質數的y次方號房，因為質數有無限多個，而且次方彼此都不會重複，所以這問題又解決了，但是不久之後有人來抗議了，代表發言的是是第 9999 個旅行團的 9999 號，他跟老闆說：我要住第 10000 個質數的 9999 次方號房，但是第 10000 個質數是多少阿？老闆聽了也楞一下，糟糕了，這樣下去一定會亂七八糟，趕快換個新方法，他先將自然數中 10 的倍數去掉，剩下的數字由小到大排列，第n個數字以A_n表示，例如A_1=1、A_2=2...A_{10}=11、A_{90}=99，然後請原來住 1 號房的人還是住 1 號房，2 號房的改到 10 號房，3 號房的改到 100 號房，n號房的改到 10^{n-1}號房，接著再安排第一個旅行團的第 1 個人住到A_2號房，第 2 個人住到$A_2 \times 10$ 號房，第m個人住到$A_2 \times 10^{m-1}$號房，依此方法，第x個旅行團的第y個人安排到$A_{(x+1)} \times 10^{y-1}$號房，這樣大家也都有房間住了，而且絕對不會有重複的情形。

藉由以上的小故事，相信你一定對無窮這個抽象的概念，有進一步的認識了。希爾伯特曾經說過：『無窮！再沒有其它的問題如此深刻地打動過人類的心靈。』而在一九００年巴黎國際數學家代表大會，希爾伯特所提出的二十三個重要的數學問題中，第一個問題就是關於集合論的連續統假設(註)，由此可見，無窮觀念在數學的發展上有其重要的地位。

如果我們用一般的直觀的想法來思考無窮的問題，那麼，這些問題將會變得不可思議。試想分佈在數線上的自然數，它雖然有無限多個，但是在數線上的分佈卻是零零散散的，再想想數線上的有理數是那樣密密麻麻的佈在數線上， 但是集合論的創始者康托（Georg Cantor, 1845-1918）卻證明了有理數是可數的，也就是有理數跟自然數可以作一對一對應。接著，誕生了偉大的定理：『連續統是不可數的』，之後，他輕易地獲知：『（0,1）區間中的點，可以跟整條數線上的點作一對一對應』，並且在 1877 年他證明了（0,1）區間中的點，可以跟由（0,0）、（1,0）、（1,1）、（0,1）四點圍成正方形中的所有點作一對一對應。

事實上，一個無限集合可以定義爲：一個能跟本身的真子集合（proper subset），有一對一對應關係的集合。以上的情形在直觀上似乎有違常理，但是當您踏入無限的國度，它卻是那樣的自然且真實。

註：連續統（continuum）是指實數的一個區間，如（a,b）＝所有實數 x 的集合，使得 a＜x＜b。1874 年，康托猜測在可數集基數和實數基數之間沒有別的基數，即著名的『連續

統假設』(continuum hypothesis)。

參考資料

William Dunham (1995).《天才之旅》，台北：牛頓出版社。
黃茄峰 (2002).〈無窮 VS. 教學 123〉,《HPM 通訊》第五卷第十一期。
葛登能 (2001).《跳出思路的陷阱》，台北：天下文化。
張錦文、王雪生著 (1993).《世界數學名題欣賞叢書(4)：連續統假設》，台北：九章出版社。
蘇惠玉 (2002).〈從一個問題說起：無窮〉,《HPM 通訊》第五卷第一期。

數學史融入教學--以對數為例

中山女高 蘇俊鴻老師

對數單元的教學安排與呈現，一直是老師教學上的一大挑戰(如果您有感受到學生在此單元學習的痛苦與無奈的話)。課程中一直冀望用“對數曾是在計算器或電腦未發明前，天文學家或是數學家所用來處理大數字運算的有用工具”的理由，說服學生在擁有便利的輔助工具之後，仍能耐著性子處理那些龐雜的數字計算。

事實上，對數發展時的那種最初數字處理的刺激與需求已經從每個人的經驗中消失，教學上也難以再呈現。現行的教材中所下的「對數」的定義是採行十八世紀數學家尤拉所下的定義：

給定一個正數當作底數，則一個數的對數，就是這個底數的次方與這個數相等時的指數/指標(index)(按：以現在的數學符號表示，就是$b=a^c$，則$\log_a b=c$)

對學生而言，這種透過指數的定義方式，太過於抽象與形式化，是無法帶給學生任何的啓蒙。難以透過定義了解對數是如何計算，以及最初它是如何被蘊釀；也很難說服學生爲何必須學會這些早就被輔助的計算工具所取代的計算技巧。John Fauvel 就認爲尤拉的形式化定義，造成學習者在對數概念學習上兩種內在洞察力的喪失：(1)藉由級數的探索，更深一層地了解究竟對數是怎麼一回事；(2)學習對數如何由實用性的(practical)工具奇妙地轉變成理論性(throretical)的工具。本文則是希望能藉由學習單的活動設計，說明數學史在此一主題學習上可能的幫助。學習單共四張，說明如下：

＊第一張學習單(Chuquet 的觀察)：介紹文藝復興時期法國數學家 Nicholas Chuquet(死於1487 年)將巴比倫人級數研究的成果延拓，將 2 的次方由$2^0=1$寫到$2^{20}=1048576$，並觀察任兩個 2 的次方相乘的結果。主要說明兩個平行的數列之間運算關係對應的發現。

接著介紹 John Napier（1550～1617）如何產生對數的概念。根據數學史家的研究，Napier 對

數概念的形成受到三種影響：(1)算術(等差)級數與幾何(等比)級數的比較；(2)將乘法看成加法；(3)運動學的幾何性質。正是第二張學習單到第四張學習單的內容。

＊第二張學習單(算術(等差)級數與幾何(等比)級數的比較)：在 Chuquet 研究的基礎上，向學生介紹等比數列中兩數相乘與等差數列兩數相加相對應的現象，可以讓人在這兩個數列之間建立起一種對應關係 $na \Leftrightarrow r^n\ (\forall n > 0)$

＊第三張學習單(將乘法看成加法)：舉例說明在對數尚未發明之前，對於大數字的乘除計算，人們是藉助三角學中的積化和差公式(統稱爲加減規則(prosthaphaeretic rule)來幫助，而 Napier 是熟悉三角學的。

＊第四張學習單(運動學的幾何性質)：藉由 P，Q 兩點在直線上不同的運動方式，使得這兩點與 0 點的距離恰好也產生等差數列與等比數列的對應關係。由此引出 Napier 的對數定義，並可進一步推導對數律的性質。

筆者希望經由此一學習單的活動，能使學生重新了解對數概念的歷史發展上，並非經由指數而來，反倒是等比數列與等差數列扮演著決定性的角色。進一步深化對數概念的認知。

Workcard 1　Chuquet 的觀察

在 1484 年，文藝復興時期法國數學家 Nicholas Chuquet (死於 1487 年) 將巴比倫人級數研究的成果延拓，將 2 的次方由 $2^0 = 1$ 寫到 $2^{20} = 1048576$ ：

Numbers	Denomination
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20

並進一步研究 Numbers 與 Denomination 之間的關係，寫下他的觀察：

……. Likewise whoever multiplies 2^1 by 4^2, it comes to 8^3. For 2 multiplied by 4 and 1 added with 2 makes 8^3. And thus whoever multiplies first terms by second terms, it comes to third terms. Also, whoever multiplies 4^2 by 4^2, it comes to 16 which is a fourth number, and for this reason whoever multiplies second terms by second terms, it comes to fourth terms. Likewise whoever multiplies 4 which is a second number by 8 which is a third number makes 32 which is a fifth number.

問題與討論

1、請試著說明 Chuquet 觀察到 Numbers 與 Denomination 之間的什麼現象？

2、由上表，你能否推算出 $2^5 \times 2^9 =$ ？

3、試著評論 Chuquet 這項數學研究的啓發爲何？不足的地方爲何？

Workcard 2　Napier 的對數(1)

$\boxed{\text{算術(等差)級數與幾何(等比)級數的比較}}$

John Napier（1550～1617），蘇格蘭的業餘數學家，對數的發明者。據數學史家的研究，Napier 的對數形成受到三種概念的影響：(1)算術 (等差) 級數與幾何 (等比) 級數的比較；(2)將乘法看成加法；(3)運動學的幾何性質。讓我們細說重頭吧！

我們考慮一個這樣的等差數列，首項爲 0，公差爲 $a(a>0)$；以及一個首項爲 1，公比爲 $r(r>1)$ 的等比數列。首先請寫出這兩個數列的前 8 項：

等差數列	0							
等比數列	1							

在等比數列中兩數相乘與等差數列兩數相加相對應的現象，可以在這兩個數列之間建立起一種對應關係 $na \Leftrightarrow r^n (\forall n>0)$ ，我們用兩個記號來表示這個對應關係： $f(na)=r^n$ ； $g(r^n)=na$ 。我們可以得到一些有用的關係式：

(1) $\forall m,n>0$, $g(r^n)+g(r^m)=g(r^n r^m)$. $Let\ x=r^n, y=r^m$, $g(x)+g(y)=g(xy)$.

(2) $g(x)-g(y)=g(x/y)$

(3) $g(x^n)=ng(x)$

(4) $g(\sqrt[m]{x})=g(x)/m$ (以上均在有意義的情形下討論)

問題與討論

1、請利用 g 的性質，寫出下列關係式 f 的正確結果：

(1) $f(x)f(y)=$ ______________

(2) $f(x)/f(y)=$ ______________

(3) $[f(x)]^m=$ ___________

(4) $\sqrt[m]{f(x)}=$ ___________

2、如果將上述等比數列與等差數列延拓至負整數的範圍，也就是說

等差數列	$\cdots$	$-3a$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$\cdots$
等比數列	$\cdots$	$1/r^3$	$1/r^2$	$1/r$	1	r	r^2	$\cdots$

則上述關係是否繼續成立？為什麼？

Workcard 3　Napier 的對數(2)

將乘法看成加法

在對數尚未發明之前，科學家們對於大數字計算，是藉助於三角學中的四個積化和差的公式，統稱爲加減規則(prosthaphaeretic rule)。公式如下：

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$
$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$
$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\sin A\sin B=-\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

其中 $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$ 這個公式早在約西元 1008 年，阿拉伯的數學家 ibn Yunus (伊本尤尼斯) 就曾提過，到了十六世紀末，法國數學家 Vieta (維塔，1540~1603 年) 利用幾何方法証出全部的公式。

這些公式在求數字乘積時，可以幫上大忙！

以 544.6×12.19 爲例，說明公式的使用：

$$544.6\times 12.19=10^5\times 0.5446\times 0.1219$$

$$10^5\times\cos 57°\times\sin 7°=10^5\times\frac{1}{2}\times\left[\sin(57°+7°)-\sin(57°-7°)\right]$$

$$10^5\times\frac{1}{2}\times(0.8988-0.7660)=6640$$

我們可以確定的是 Napier 對三角學是非常熟悉。

問題與討論

1、上述所提的積化和差的公式，你覺得它的重要性爲何？

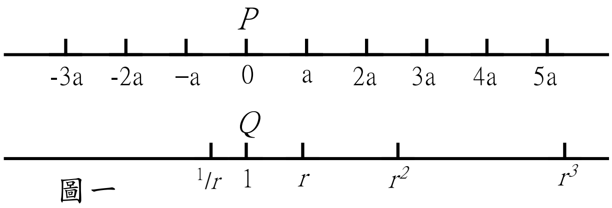
2、試著用積化和差的公式，計算 8192×90630 之值

(已知 $\cos 35°=0.8192, \cos 25°=0.9063, \cos 10°=0.9848$)

Workcard 4　Napier 的對數(3)

運動學的幾何性質

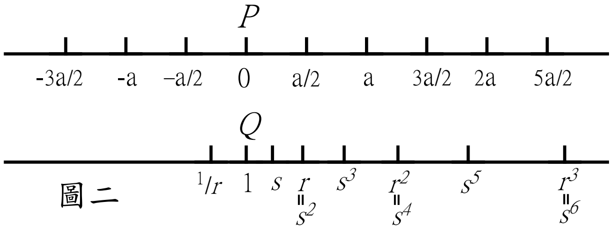
我們考慮P、Q兩點在直線上的運動(如圖一)，P點在直線上等速前進，所以通過$[0,a]$，$[a,2a]$，$[2a,3a]$，…等區間的時間間隔都會相等。而Q點則在P點運動的時間間隔中，通過$[1,r]$，$\left[r,r^2\right]$，$\left[r^2,r^3\right]$，…等區間。如此一來，Q點通過 1 到r的時間與通過r到r^2及r^2到r^3相同，距離則是$r-1$，$r^2-r=r(r-1)$，$r^3-r^2=r^2(r-1)$，因此Q點在每個區間的速度依相同的比率變化。事實上，在各個點上的速度與該點到 0 的距離成比例。



圖一

同樣地，我們若考慮任意長度的兩個區間$[\alpha,\beta]$，$[\gamma,\delta]$，滿足$\beta/\alpha=\delta/\gamma$。則 Q 點通過$[\alpha,\beta]$的時間與通過$[\gamma,\delta]$的時間相同。假設 P，Q 於相同的時間以相同的初速 v 開始運動，P 點由 0 開始；Q 點由 1 開始。則 P 點與 Q 點同時通過線上的各點與 0 的距離，恰好滿足$na\leftrightarrow r^n$的關係。

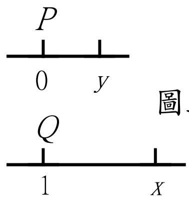
根據上述定義，Q 點的運動必須躍過每個點，而且速度是平滑連續改變的。表示我們可以對 Q 點的運動再做細分。例如在$[1,r]$間找一個新的點$s=\sqrt{r}$ (如圖二)，則$s^2=r$，$s^4=r^2$，$s^6=r^3$。且s^3必在$\left[r,r^2\right]$之間；s^5必在$\left[r^2,r^3\right]$之間。我們可以造出一組由 s 的乘冪所組成的區間$[1,s]$，$\left[s^2,s^3\right]$，$\left[s^3,s^4\right]$…。而 Q 點通過這每一個區間的時間都是相同；在各個點上的速度依然與該點到 0 的距離成比例。



圖二

問題：當Q點走到s時，P點走到那裏？當Q點走到s^3時，P點走到那裏？

換句話說，我們將發現上述的關係很容易地延拓下去，並且也能再細分下去。因此當 Q 點走到任意的點 x 的同時，P 點會走到 y 點。Napier 將 y 稱為 x 的 *logarithm*，也就是$\log x=y$。



圖三

問題與討論

1、同上說明，如果取$t=\sqrt[3]{r}$，則當Q點走到t時，P點走到那裏？
當Q點走到t^2時，P點走到那裏？

2、根據上述 P、Q 兩點運動的對應關係，很容易觀察出$\log 1=0$。試著利用“若任意長度的兩個區間$[\alpha,\beta]$，$[\gamma,\delta]$，滿足$\beta/\alpha=\delta/\gamma$。則 Q 點通過$[\alpha,\beta]$的時間與通過$[\gamma,\delta]$的時間相同。”的現象，推導出下列$\log x$的性質：

(1) $\log(\delta/\gamma)=\log\delta-\log\gamma$ (Hint:不妨設$\beta=1$)

(2) $\log(\beta\gamma)=\log\beta+\log\gamma$