HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台灣師大數學系所）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（成功高中） 林旻志（北縣錦和中學） 陳啓文（中山女高）彭良禎（北市麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第六卷 第十二期　目錄（2003年12月）

從五十一期『索引』回溯本刊的足跡

台師大數學系　洪萬生教授

本刊自從 1998 年 10 月創刊迄今，連同本期，已經發行了五十一期了。我們特別編輯了這前五十一期的索引，並且編入本期，一方面便利讀者查閱本刊文章，另一方面，也用以檢視這五年多來我們一起打拼的成果，以便策勵台灣 HPM 的未來。

我們的暫時分類方式，大致是以中（小）學教師查閱方便爲主，因此，有一些編入『代數』、『幾何』等類的篇目，其實也蠻適合編入『HPM 相關』類或『數學史』類。其實，我們的論述策略是環繞著 HPM / 數學史，然後，以幅射方式向外擴張，希望能儘可能涵蓋數學教育的所有相關議題。

如果說數學教育至少包括了課程（含教材）、教學與學習，那麼，我們目前對於『課程』與 HPM 的結合，就顯得力有未逮。或許這是因爲本刊的作者主要是中學數學教師，所以，『課程』方面的議題，本來就不是他（她）們的關心之所在。事實上，即使是面對編寫不怎麼理想的教科書，他（她）們也自有辦法提供給學生應有的教學內容。此外，要想針對數學課程來『連結』HPM，則首先必須掌握該課程的結構與精神，從而才有可能摸索出比較有意義的談法來。儘管如此，我們還是希望有機會多開發一些小案例，試著從 HPM 角度切入，反思現行教科書對於課程某一單元之處理，看看有無可能讓教材內容變得更活潑有趣一些。

另一方面，HPM 如何關連到學生的學習認知特性，一直是我們的『罩門』。不過，在國際數學教育界中，如何讓 HPM 與數學學習的研究互惠，也一向是有待大力倡導並挹注研究資源的議題，所以，我們希望在未來的 50 期中，可以引出一些具有拓展潛力的相關論述，以便對 HPM 做出更大貢獻！

有關教學如何結合 HPM 面向，當然是我們的『賣點』！我們還將多鼓勵作者盡量針對相關的教學活動或實驗進行反思，讓 HPM 也有機會凸顯『實徵』的特色來。還有，鼓勵小學教師參與相關教材之設計或研發，以便豐富 HPM 的內涵與精神，則是我們所最殷切期待的。

最後，有鑑於初學者對於類似『人物傳記』或『語源』這一類的休閒小品，可能較能入手，因此，我們竭誠地歡迎這一類的文章。當然啦，『休閒』並不表示缺乏實質的『知識內

容』，只是我們將努力降低閱讀『門檻』罷了。如何以科普手法來『烹煮』HPM 品味的文字，我們自信還有一點『火候』可以分享，願共勉之！

數學與戰爭

台師大數學研系碩士班 張復凱改寫

一、 前言

物理學家、化學家和生物學家常會討論他們學科的後設面向（meta-aspect），包括這些知識在軍事上的影響。越戰期間，美國數學家也注意到這個面向，群起呼籲不要參與戰爭相關工作。此後，陸陸續續有很多刊物探討這個問題。

2002 年 8 月 29 至 31 日，四十二位數學家、數學史家、軍事史家、軍事分析家及哲學家，齊聚瑞典的卡爾斯克魯那（Karlskrona）軍港討論下列四個問題：

- 歷史上，軍事對於數學有何影響，特別是在二次大戰後？
- 數學的思維、方法及技術是否將改變現代戰爭的性質及表現？如果是，那麼會如何影響民眾及軍方？
- 戰爭期間，像物理學家玻爾（Niels Bohr）和數學家圖靈（Alan Turing）等名人的道德選擇爲何？這些道德研討對數學家又有多少助益？
- 數學思維在建立戰爭與和平的國際法規中扮演何種角色？數學式的爭論可否爲實際上的衝突提出解決之道？

二、軍事對數學的影響

從古希臘阿基米德防禦敘拉古、現代初期的彈道學、防禦工事數學、航海所需的三角學到後勤學，這些科技和軍事技術幾乎都只利用當下的數學知識。於是乎，過去軍方總把數學當工具用而不重視進一步的研究。這種現象大概只有一些少數的例外。如：2074BC.蘇美巴比倫（Sumero-Babylonia）的蘇爾吉王（King Shulgi）以戰事緊急的名義，對蘇美帝國施行軍事及行政改革，發明了六十進位法來計算勞工們的工作表現。就是靠著當時戰爭所塑造的社會意志，巴比倫的數學位值系統才能順利發明。不過，大體而言，二十世紀前，軍方對數學的影響實在是有限。

到了二十世紀，情況改變了。軍事與數學的新關係，起於第一次世界大戰而興盛於第二次世界大戰期間。

第一次世界大戰期間，數學及其他純科學主要扮演的角色，是提供一流工程師將理論運用到技術層面，正因工程師的職稱，所以，沒有人會認爲數學對第一次世界大戰有決定性

的影響。

接著，在第二次世界大戰中，數學科技（雷達、聲納、解密電腦、炸彈）被視爲對戰爭有關鍵影響，而深受到軸心國及同盟國雙方的關注。靠著戰爭中提供的大量資助，使原需花數十年的科技在這段期間完成了。期間，爲數眾多的數學家被徵募擔任高級工程師，不過，這樣的工作被認爲無益於數學發展而引來非議。儘管如此，這些工作終究需要數學家的協助。最明顯的例子，是弗里施（O. R. Frisch）和派爾斯（R. Peierls）的數學公式解決了 1940 年 3 月的鈾彈結構問題，並確認軍事上使用的可行性。

其實，解決軍事問題並非全然無益於數學。如電算機科學、資料處理理論、蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）、運算研究和統計上質的控制等等，都肇因於軍事需求。到了冷戰期間，這些知識的再應用，使科技加速發展。以電算機爲例，過去戰爭讓電算機順利製造，而戰後的商業運用，則讓電算機大量生產、公開競爭、密集發展並降低成本。這樣交互作用下，促進了電算機科學在理論及實務上的發展。

在我們爲這些軍事目的的數學研究下結論前，應先區分下列兩種情形：

- 運用既有數學和洞悉新數學的不同。前者如同數學家爲軍事機構打雜；後者則較少受限於軍事機構。
- 這些數學研究不僅是發明純爲軍事用途的數學定理。例如：有一種高效率的研究模式─grosso modo：收到軍事問題後，轉換並分割成多個數學問題，解決軍事問題的同時，也完成了一些數學理論的研究。

整體而言，戰爭期間的數學研究造就了一些基礎數學理論的革新，圖靈（Alan Turing）、馮·諾伊曼（John von Neumann）、香農（Shannon）、沃爾德（Wald）和龐曲爾根（Pontryagin）是這方面的代表性人物。至於軍事上的運用，則主要由前述的數學工程師來處理。這些工程師的處理能力，倚賴了他們所精通的各類數學，所以，不可忽略地，數學研究的發展，拓展了這些使用者的能力。

三、數學對軍事的影響

伯格斯坦（Colonel Svend Bergstein）指出戰爭中的壓力及睡眠不足，都會影響軍人的行爲模式，因此，我們無法事先評估戰爭的情形。另外，過去普魯士的軍事思想家克勞塞維茨（Carl von Clausewitiz）也提出：有太多外在不可預測的因素。

不過即便如此，數學仍是戰爭中不可或缺的部分。以下是數學在戰爭中扮演的角色：

- 影響武器採買、演習及後勤學。
- 提升武器及武器系統的有效性─這關係著彈藥、訊號傳遞系統、接觸面偵察控制及通訊、情報連繫和高速密碼傳遞。
- 武器系統的可行性仰賴數學，武器系統的消毀也需靠數學計算。戰略武器限制談判 SALT（Strategic Arms Limitation Talks），即利用數學分析消毀武器系統的狀況，免除戰力不平衡的風險。
- 軍事分析家強調，軍人常因環境造成的自欺性樂觀與悲觀而產生誤判，所以，委託數學專業人員進行資料分析，較能精準判斷戰略得失。
- 人道團體極力反對用豬測試砲彈對人體的殺傷力，於是，數學模擬便派上用場。
- 如同希特勒形容德國防衛軍（Wehrmacht）快如格雷伊獵犬，牢韌如 lederhosen（德

式齊膝短褲），堅固如克魯伯鋼鐵；我們則形容數學使戰爭以航空電子技術而迅速，以全球定位系統（GPS）而準確，以有效的運作計畫而安全。

- 任務模式的數學符號化讓軍方輕易、精確地完成任務。

由此看來，戰爭與數學的關係有兩個特徵。首先，為求獲勝，數學常被用來評估軍事策略的運作成效，藉此免去人為疏忽的風險。但另一方面，這也會在不平衡的戰爭中造成強欺弱的情形─如果數學分析下，科索沃戰爭中，征服塞爾維亞需要七十億的花費，也就是南斯拉夫每人只需花七百塊，這將誘使類似的問題都用武力解決。其次，把「克魯伯模式（Krupp model）」轉為「無限克魯伯模式（infinite Krupp model）」。十九世紀，克魯伯（Friedrich Krupp）首先發展鎳鋼盔甲來抵抗當時所有的子彈，接著，發展出鉻鋼子彈穿透鎳鋼盔甲，緊接著，高碳盔甲片的發明又可抵抗鉻鋼子彈，最後，雷管發射式子彈穿透了上述的盔甲片。這種不斷的精進與重覆的武器競賽是無盡的。即便這些軍事發明相當昂貴，但這類競賽只求軟硬體不斷精進，從沒有預算和智慧上的限度。在這方面，物理及化學或許有自然的侷限，但數學卻沒有。也因無限度的特質使交戰雙方更加重視數學。

四、數學與戰爭道德

一般人認為數學是中立的。正如奈曼（Jerzy Neyman）所言：「我只是證明並發表定理而不論之後產生的影響。」這種中立的特質，也一直是數學努力的目標。

不過，「數學與戰爭」這個標題則隱含著道德上的兩難，以下有幾則名人的例子：

- 費爾茲獎 1950 年得主施瓦茨（Laurent Schwartz）利用他學術上的名望，拒絕參與美法在阿爾及利亞和越南的戰爭。他認為這種政治上的參與，與他的數學研究無關。
- 丹麥物理學家玻爾（Niels Bohr）得知德國的核子彈計畫後，立即支持敵對的英美陣營發展核子彈武器。後來，發現這會使英美陷入危險，於是，對邱吉爾和羅斯福提出警告，並試圖利用他的名望來阻止英美發展核子武器。不過，玻爾顯然高估了他自己的影響力。
- 英國數學家圖靈（Alan Turing）以其傑出的能力報效國家，協助解決國家的軍事需求。
- 小倉金之助（Kinnosuke Ogura）是日本民主現代化的推動者，曾反對日本參加德國及義大利的聯盟。但在 1937 年日本侵略中國後，強烈愛國主義及視戰爭為現代化之途的想法，使他成為組織日本數學界協助軍方的中心人物。戰後，他也僅對此略表歉意。
- 美國數學家馮・諾伊曼（John von Neumann），和圖靈一樣，在二次大戰及冷戰初期運用他傑出的能力於軍事研究。他全力發展氫彈，目標是先發制人。
- 前蘇聯統計學家龐曲爾根（Lev S. Pontryagin）放棄了代數拓樸及控制理論的研究路線，投入洲際彈道飛彈的發展，目的則是要阻止先發制人的攻擊。
- 數十年前，英國數學家哈代（G. H. Hardy）為避免發展破壞人類生活的科學，於是，投身於看似與戰爭最無關的數論研究。諷刺的是，後來數論變成軍事上密碼學的來源。
- 積進派和平主義者，英國物理、心理學家理查生（Lewis Fry Richardson）知道預測一天後的天氣需要六萬四千台電腦用超過一天的時間來計算，於是，在 1922 年出版

了「數化天氣預測」（Weather Prediction by Numerical Process），並保證數位化天氣預測不會作爲軍事用途。

這些名人有何種程度的示範？大致上有兩種不同的情形，一種是施瓦茨，哈代，和理查生：以深刻的懷疑主義檢視社會或社會的部分面向而採取敵對的態度；另一種人則不同程度地贊同他們的社會、戰爭或軍事策略。後者雖受環境支持，道德兩難較少，不過也非完全沒有。像圖靈把政治決策交給有正式頭銜的人決定；或像玻爾則表明自己的立場並提出警告。至於前者則在具備傑出能力的前提下，利用參與戰事與否，發揮他們的影響力。但是，若只爲避免數學冠上「貪汙」之名而刻意和軍事用途保持距離是無益的，畢竟這不僅是放棄軍事應用，更放棄了許多數學研究。

大致而言，數學可能的中立性應該不是依附於這些道德選擇上。

五、啟蒙觀點的透視

啓蒙運動中，人們相信動機引導發展。

盧梭（Jean Jacques Rousseau）和斯威夫特（Jonathan Swift）指出科學常被探討道德上動機的合理性。狄孚（Daniel Defoe）的《魯賓遜漂流記》中也提到「動機是數學的本質及來源」。到底從動機的角度看來，今日數學處於何種地位呢？

雖然上述的戰爭數學化大多指向負面，但吾人也要知道：第一、這些應用絕不只在軍事上，亦在科技化的生活中。第二、即便從軍事觀點著眼，數學仍扮演著另一層面的角色：冷靜地排除自欺式的樂觀及悲觀。以數學爲根基的動機，可讓我們丟棄陳腐的知識，挖掘並分辨實用與實在的事物，更藉由合理的分析，讓我們在處理問題上覓得較佳的方法。

另外一方面，如果動機真的是「數學的本質及來源」時，我們就可以數學式的具體例證呈現戰爭的不合理性，而不只是意識型態的（ideological）老生常談。反之，如果數學沒有上述的功用，那麼，我們針對它所認定的文化價值，或許只是無情科技之次樂觀化（suboptimization）的藉口罷了。

一般認爲在政治及數學的用途上，方法的合理性比動機重要。在這方面，數學理論的中立性依舊爭論不休，依舊是道德的模糊地帶。不論如何，所有的責任仍在於開創者、傳播者和使用者身上。

本文改寫自 Bernhelm Booss-Bavnbek and Jens Hoyrup (2003),“Mathematics and War: An Invitation to Revisit”, *The Mathematical Intelligencer* 25(3): 12-25.

從幾何面向看 $\sqrt{2}$

西松高中　蘇惠玉老師

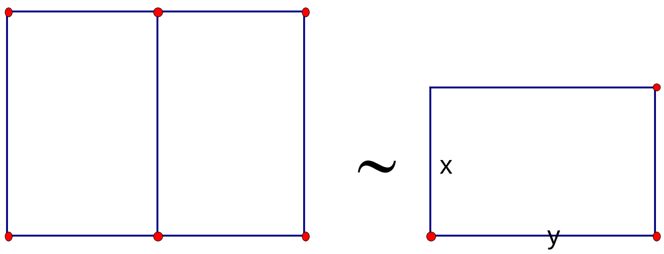
一、前言

在《HPM 通訊》第四卷第七期中，黃哲男再他的文章〈 $\sqrt{2}$ 〉中，告訴我們一個令人驚訝的觀察結果。在看到他的文章之前，我從來沒想過 $\sqrt{2}$ 和 A4、B4 的紙張大小有關。如果從 A4，A3 的邊長來看，

A4 紙張的大小：210×297mm，$\dfrac{297}{210}=1.414285714\ldots$

A3 紙張的大小：297×420mm，$\dfrac{420}{297}=1.414141414\ldots$

A4、A3 的長與寬的比大約是 $\sqrt{2}$ ，爲什麼會有這麼奇妙的結果？黃哲男猜測是，要使一個長方形，分成兩等分後，小的長方形與原長方形相似，那麼小長方形的邊長比爲當然必須爲 $\sqrt{2}$ ！



$$\frac{x}{y}=\sqrt{2}$$

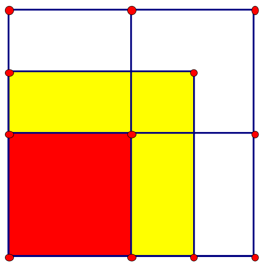
耶？$\sqrt{2}=\dfrac{x}{y}$ ？$\sqrt{2}$ 不是無理數嗎？所謂無理數不是不能寫成分數的形式嗎？爲什麼會和「邊長比」有關係？我認爲這一點當成教學上的切入點，可能會有不同的趣味產生。以下我試著從幾何的角度來看「 $\sqrt{2}$ 是無理數」這個數學概念，從無理數的幾何意義，到「 $\sqrt{2}$ 是無理數」的幾何證法，最後是 $\sqrt{2}$ 的幾何逼近方法。試著從幾何面向來看 $\sqrt{2}$ ，以補充課本

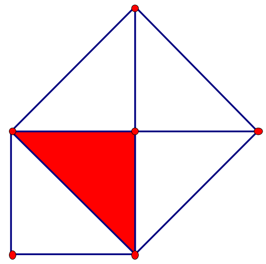
從代數面向來看的不足。

二、*The Meno*

柏拉圖的數學哲學論述，主要發表在他的著作《米諾》(The Meno) 之中。在本書中，對話的人物共有四位，即蘇格拉底、米諾、Anytus 與米諾家的一位（奴隸）男孩 (slave boy)。柏拉圖藉由蘇格拉底「引導」奴隸男孩如何得到一個新的正方形，面積是原有正方形的兩倍的對話，來闡述他的數學哲學：即每個人心靈中出生時就帶有數學知識，只要經過適當的「引導」，就可以喚醒這些記憶。所以，數學教育是一種「再發現」的過程。

爲了要得到兩倍的正方形面積，奴隸男孩先是將邊長增加爲兩倍，面積成了四倍；然後奴隸男孩將邊長增加成 $\frac{3}{2}$ 倍，結果面積變成兩倍多一點，最後，蘇格拉底「引導」奴隸男孩「考慮」以原正方形的對角線爲邊長，所得到的新正方形。從這裡，可以引申爲 $\frac{d^2}{s^2}=2$，換句話說，$\frac{d}{s}=\sqrt{2}$。[1] $\sqrt{2}$ 這一個「數字」，到底與邊長、對角線等「幾何量」有何關係？

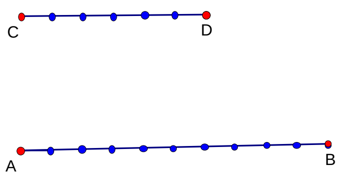




三、可公度量的與不可公度量的

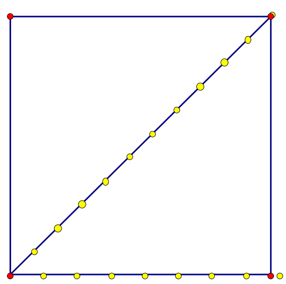
如果我們從有理數的英文 rational number 來看，rational 一般的理解都是「有道理的」，那麼，應該是什麼道理？從 ration 的拉丁文語源來看，rational 是從 *ratio* 演化而言，原意是「比」的意思；亦即可以寫成兩個整數之比的，叫做有理數。那麼，無理數呢？irrational number，自然就是不能寫成兩個整數之比的數。這個概念及形式，是從畢氏學派的「可公度量的」與「不可公度量的」觀念演化而來的。

畢氏學派 (Pythagoreans) 是指畢達哥拉斯（大約西元前 572-497）和他的門徒們，這個帶有神秘主義與宗教色彩的學派，相信「數目 (number) 是所有事物的本質」，這裡的「數目」指的是正整數。畢氏學派相信的，不只是所有物體都有數，或者是這些物體能被排序、被量化，他們更相信數目是所有物理現象的基礎。例如，行星的運行可已以數目之間的比來表示；音階也可以數



$\overline{AB}=a=me,\ \ \overline{CD}=b=ne,\ \ m,n\in N$，e 爲測量單位長，

$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$，$\overline{AB},\overline{CD}$ 稱爲可公度量的



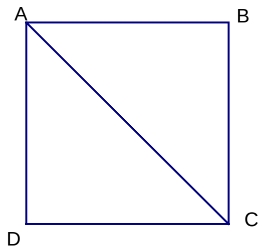
是否存在測量單位長 e 使得 $s=me,\ d=ne,\ \ m,n\in N$？

若不存在 e，則 s, d 稱爲不可公度量的

目比的形式展現，還有直角三角形的邊長比等等。對畢氏學派而言，數目永遠和事物的計算連在一起，而計算就必須要有不可分割且保持不變的單位元存在。而爲了計算「長度」，當然就需要有度量單位，畢氏學派假設認爲永遠都可以發現這樣一個度量的基本單位，而一旦這樣的單位被找到了以後，它就成了不可分割的單位元了。兩個線段長如果都可以用同一個單位元量盡，就稱這兩個線段長爲「可公度量的」(commensurable)，如右圖的 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$；反之，如果不能同時量盡，就稱「不可公度量的」(incommensurable)，如正方形的邊長與對角線。這裡，畢氏學派的錯誤在於他們無法確認「數」與「幾何量」的分別，「數」的單位元是不可分割沒錯，但是「幾何量」是可以「無窮盡地」的分割的。

雖然畢氏學派無可避免的一定會碰到「不可公度量」的數，他們也了解「可公度量」與「不可公度量」之間的不同，但是，爲了保持學派理論的完整性，他們選擇保守秘密。如今，我們可以在亞里斯多德的書中看到一點點「不可公度量」的數存在與被證明的蛛絲馬跡，證明形式即是現今證明「$\sqrt{2}$ 是無理數」的證法。而數學史家 Heath 認爲，這也是畢氏學派證明 $\sqrt{2}$ 的不可公度量性的證明方法。亞里斯多德引用這個證明當例子，來說明他的「歸謬證法」(*reductio ad absurdum*)：如果正方形的邊長和長是可公度量的，那麼，就會得到有一個數同時是奇數也同時是偶數 (on the assumption that the diagonal of a square is commensurable with its side, it is proved that odd numbers are equal to even)。其證法如下：

若 AC 爲正方形 ABCD 的對角線，其邊長爲 AB，



假設 AC 與 AB 是可公度量的，

設 α：β 是他們的最小正整數比，

則 $\alpha>\beta>1$，而

$AC^2：AB^2＝\alpha^2：\beta^2$，而因爲 $AC^2＝2AB^2$，所以 $\alpha^2＝2\beta^2$

所以 α^2 爲一偶數，故 α 爲一偶數；

因爲 α：β 是最小的正整數比，所以 β 必須爲一奇數。

設 $\alpha＝2\gamma$，所以 $4\gamma^2＝2\beta^2$，$\beta^2＝2\gamma^2$，

所以 β^2 爲一偶數，故 β 爲一偶數，這是不可能的。

這個證法曾經被竄改成歐幾里得所寫，而誤植成《幾何原本》的第十卷第 117 個命題，但在李善藍與偉烈亞力和譯的《幾何原本》後九卷(1857)中，仍存在此一命題：「凡正方形之邊與對角線無等」。[2]同時，李善蘭還在此命題的「案」中，將線段的不可公度量，擴充到面積與體積的不可公度量。這是中國數學史上第一次討論不可公度量，即無理數的問題。如此看來，當初的誤植，也許啓發了無數後人研究無理數，或是數學的熱情與眼光，而這又是另一個故事了。

四、 幾何證法

上述的證明，雖然與現今證明「$\sqrt{2}$ 是無理數」的證明無異，但是是從「可公度量」的意義出發，來證明「不可公度量」，不像現今，完全是代數符號的操弄。要證明「$\sqrt{2}$ 是無理數」，亦即證明正方形的邊長與對角線是不可公度量的，還可以從純粹幾何的角度來證明，畢竟，無理數的「不可公度量性」就是從幾何量的度量產生，它的定義，本身就有很強烈的幾何意涵。而證明的基本形式，在歐幾里得的《幾何原本》(*The Elements*) 中即可找到。

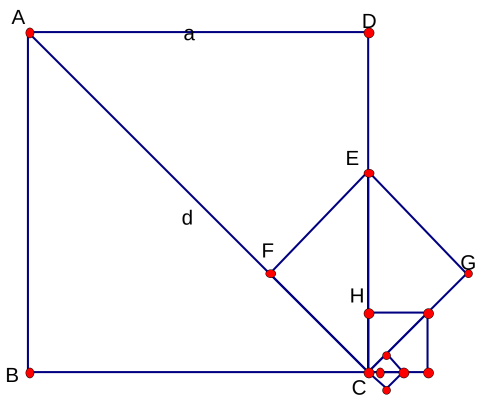
歐幾里得《幾何原本》第七卷第 1 個命題寫道：

> 設有不相等的二數，從大數中連續減去小數直到餘數小於小數，再從小數中連續減去餘數直到小於餘數，這樣一直作下去，若餘數總是量不盡其前一個數，直到最後的餘數為一個單位，則該二數互質。(Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until an unit is left, the original numbers will be prime to one another.)

這個命題即是所謂的轉轉相除法。這個命題是「數」的形式，藉由亞里斯多德的看法：當量盡前一個量的更小的量無法被找到時，這個過程將會『無法確定地』(indefinitely)繼續下去。歐幾里得在第十卷第 2 個命題中，將「數」的形式，引伸到「量」的形式：

> 如果從兩不等量的大量中連續減去小量，直到餘量小於小量，再從小量中連續減去餘量直到小於餘量，如此一直作下去，當所餘的量永遠不能量盡它前面的量時，則兩量不可公度。(If, when the less of two unequal magnitudes is continually subtracted in turn from the greater, that which is left never measures the one before it, the magnitudes will be incommensurable.)

我們可以從命題 2 得到 $\sqrt{2}$ 的不可公度量性證法。如下圖：d, a 分別是正方形 ABCD 的對角線長與邊長，從對角線 AC 中減去邊長 CD 的長度 AF，再從 CD 中減去 CF 的長度得到 CE，再從 CE 中減去 CF 得到 CH，再從 CG(＝CF)中減去 CH，…如此進行下去，由於對角線與邊長絕不相等，所以我們可以繼續「無窮盡」的作下去，由命題 2，我們可知，正方形的對角線與邊長是不可公度量的。

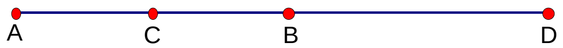


五、 $\sqrt{2}$ 的有理逼近

$\sqrt{2}$是一個無理數，那$\sqrt{2}$到底是多少？以下是 Theon of Smyrna（西元第 2 世紀）所給的一個$\sqrt{2}$的有理數逼近的方法。這個方法要從《幾何原本》的第二卷命題 10 說起：

如果二等分一條線段，且在同一直線上再給原線段添加上一條直線，則合成線段上的正方形與添加線段上的正方形的和等於原線段一半上的正方形與一半家上添加線段之和的正方形的和的二倍。

如圖，即$AD^2+DB^2=2(AC^2+CD^2)$



若AC＝小正方形的邊，BD＝對角線，則$BD^2=2AC^2$，
所以，$AD^2=2CD^2$
設 AD＝大正方形的對角線，CD＝大正方形的邊，設 AC＝s，BD＝d，則可得到
CD＝s＋d，AD＝2s＋d

在西元第 2 世紀時，Theon of Smyrna 以如命題 10 的形式，用畢氏學派的說法，造了兩個數列，Theon 以 1 (unit)當成第一個數，然後，

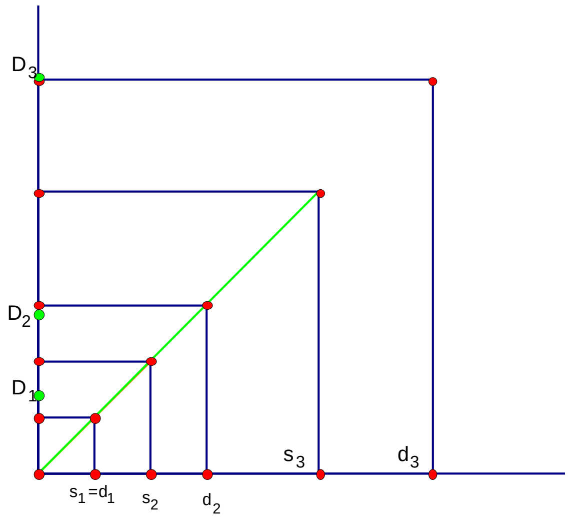
"Now there are added to the side a diagonal and to the diagonal two sides…"

令$s_1=d_1=1$，

對所有的自然數n，令$s_{n+1}=s_n+d_n$，$d_{n+1}=2s_n+d_n$，則

$\frac{d_2}{s_2}=\frac{3}{2}, \frac{d_3}{s_3}=\frac{7}{5}, \frac{d_4}{s_4}=\frac{17}{12}\cdots$

我們可以用數學歸納法證明 ${d_n}^2=2s_n^2+(-1)^n$，亦即$(\frac{d_n}{s_n})^2=2+\frac{(-1)^n}{s_n}$，即這兩個數列的比值趨近於$\sqrt{2}$。如果我們以圖形來表示，令$D_n$爲以$s_n$爲邊長的正方形的對角線，我們可以發現，畫到第三個數時，D_3與d_3幾乎不能區別，亦即比值已經很靠近$\sqrt{2}$了。



註解：

1. 對柏拉圖而言，正方形對角線與邊長是不可公度量的，即$\sqrt{2}$與 1 的不可公度量是不需要懷疑的。因爲他在《Theaetetus》中，告訴我們 Theodorus of Cyrene 證明$\sqrt{3},\sqrt{5}\ldots$一直到

$\sqrt{17}$ 與 1 是不可公度量的，他略過 $\sqrt{2}$，可能對他而言，$\sqrt{2}$ 與 1 的不可公度量是已知的。（請參考 Heath 在《幾何原本》第十卷前的引言）

2. 在 E. F. August(1826-9)與 Heiberg(1883-1888)的版本中，此命題已移至附錄。但在李善蘭與偉烈亞力合譯的《幾何原本》後九卷（第七至第十五卷）中，其中第十卷仍包含第 117 命題。據考證，他們所翻譯用的底本，可能是參考 I. Barrow 的版本，該版本在 1655 年以拉丁文出版，直到 1732 年仍有許多版本，其中有一些是英文翻譯本。

參考文獻：

Daumas D. and M. Guillemot (1997). 'Must we always be rational? From incommensurable magnitudes to real number', in Evelyn Barbin ed., *History of Mathematics—History of Problems* (translated by C. Weeks). Paris: ellipses.

Euclid (1956). *The Thirteen Books of The Elements* (translated with introduction and commentary by Sir T. L. Heath). New York: Dover Publications, INC.

Heath, Thomas L. (1949). *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Clarendon Press.

Katz, V. J. (1993), *A History of Mathematics*, New York: HarperCollins College Publishers.

李善蘭、偉烈亞力合譯 (1857)，《幾何原本》後九卷，收錄於《中國科學技術典籍通彙》數學卷五，河南教育出版社。

王渝生 (1993)，〈幾何原本提要〉，收錄於《中國科學技術典籍通彙》數學卷五，河南教育出版社。

洪萬生 (1999)，〈閒話 $\sqrt{2}$ 〉，收錄於《孔子與數學——一個人文的懷想》，台北：明文書局。

黃哲男 (2001)，〈 $\sqrt{2}$ 〉，《HPM 通訊》第四卷第七期。

Book評論與介紹

數學史謎案

台大數學系 翁秉仁教授評介

《鸚鵡定理》丹尼斯・居耶德著 漢斯譯 究竟出版社

懸案、線索、幾個聰明的腦袋，抽絲剝繭的推理、大膽的猜測、錯錯對對、起起伏伏……最後真相大白。如果說推理小說是最近似於數學的文類，大概沒有人會反對。

高明的數學科普作家，除了盡量將天書般的數學符號粉飾一番外，很重要的一步，就是提高作品的懸疑性，產生閱讀的趣味。

有些書，謎題本身就是數學問題或概念，像《天才之旅》（牛頓版）是短篇推理，《從零開始》（究竟版）是長篇推理。《數字的陷阱》（時報文化版）則乾脆由福爾摩斯粉墨登場，將二十世紀的數學問題融入十九世紀的案件中。

但是，《鸚鵡定理》不一樣，故事的謎並不是數學問題。這是一本帶著推理氣息的小說，也是像《蘇菲的世界》（智庫版）那樣的數學啓蒙書。全書充滿法式的機智對話，伏筆幽默，文色明亮。雖然帶著節制的感傷，卻不像另一本數學小說《遇見哥德巴赫猜想》（小知堂版）沉重。

去國多年的法國老人，喪生在亞馬遜河畔的火災中。死前他寄出兩封暗藏玄機的謎信，給他一甲子未謀面的大學摯友。這位巴黎書鋪半退休的耄耋老闆，同時收到死者一圖書館夢幻級的數學史藏書。故事從與老人同住的書鋪店員一家子，收養一隻不明來歷的鸚鵡開始。學哲學的殘障老人、單身的母親、身世離奇的男女雙胞胎、領養的耳聾男孩，一起踏入一趟解謎、成長、懷舊與情義之旅，而答案就藏在數學史中……

這本小說的挑戰，是要將數學史與謎案真正「有意義」地結合在一起。爲了不落俗套，作者在書中的角色、個性、情節、橋段的設計上，下了許多隱喻的功夫。如果故事能成功吸引讀者的目光，數學史的知識也許就是閱讀的紅利。

《鸚鵡定理》原書是法文書（五二五頁），台灣譯本是由已經做過刪節改寫的美國譯本（三四四頁）再轉譯，顯然失去不少小說的細節，變成數學味道較重的科普書（據編輯告知數學部分皆保留）。這本法國暢銷書在美國卻銷售平平，也許就是這個原因。

不過除了泰利斯測量金字塔的段落寫得稍冗長，嫌頭重腳輕，以及幾個伏筆並未交代之外，筆者以一個數學本行的讀者（當然這佔了很大的便宜），還是讀得津津有味。除了故事吸引人，主角們愛書的品識令人感動外，其中阿拉伯數學史的章節，更是國內數學科普少見的精彩介紹。曾經神往過金庸書中波斯明教武功源起「山中老人」的讀者，可以讀到他與數學史的一段恩怨（被譯成「峻嶺老人」）。

不過英文譯本已有的明顯錯誤，中譯本並沒能完全修正，另外還增加一些新錯誤。例如在數學脈絡中，shape 指「形體」或「圖形」，譯成「形狀」；而 form 指的是「形狀」，譯成抽象的「形式」；另外如應譯成「正切」的 tangent 被譯成「切線」等。

至於畢達哥拉斯學派的「核心成員」與「數學家」，審訂者認爲作者有誤。不過作者引用的說法也流傳已久（即學派核心成員就是「數學家」，譯本「核心成員」一詞反而引起混淆，應另尋他譯），而且又牽動原書布局，似乎也不妨將「錯」就錯。

雖然略有瑕疵，《鸚鵡定理》仍然不失爲一本相當迷人的精彩青少年小說，更何況糖衣之下，還有豐富的數學知識。

只是那些失去的小說情節，還真是令人掛懷。

索引（第一卷第一期至第六卷第十二期）

張復凱、歐士福與蘇惠玉 編

本索引按『HPM 相關』、『數學史』、『數學教育』、『數學哲學』、『數學美學』、『人物傳記』、『語源』、『碩士論文摘要』、『數論』、畢氏定理』、『代數』、『幾何』、『三角』、『證明法』、『對數』、『機率、組合與統計』、『度量衡』、『多元文化數學』、『電腦輔助』、『研討會』、『Information』、『新書櫥窗』、『書評』、『數說新語』以及『網路大公開』等 25 類（暫時分類），各自歸入相關文章。其中括號內為作者或譯者名字），隨後之阿拉伯數碼如 1(1) 代表第一卷第一期、2(8/9) 代表第二卷第八、九合刊期，其餘類推。

- HPM 相關

- 數學史

- 數學教育

- 數學哲學

- 數論

- 畢氏定理

- 代數

- 書評

- 數說新語

- 網路大公開

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhy@mail.topspeed.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhy@mail.topspeed.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、蘇意雯、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻、陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景