HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台灣師大數學系所）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（成功高中） 林旻志（北縣錦和中學） 陳啟文（中山女高）彭良禎（北市麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第六卷 第十一期 目錄（2003 年 11 月）

圓亭：劉邦『亭長』時代的衙門？

台師大數學系　　洪萬生教授

中國西漢竹簡《算數書》（呂后二年，或公元前 186 年）第 59 題是有關『圓亭（臺）』的體積計算，內容轉述如下：

圜亭　圜亭上周三丈，下周四丈，高二丈，積二千五十五尺卅六分尺廿。術曰：下周乘上周，周自乘，皆并，以高乘之，卅六成一。今二千五十五尺分廿。

圜（圓）亭即為上、下底均為圓形之圓臺，此題即求圜亭之體積。設圜亭上底周長為 s_1，下底為 s_2，高為 h，則其體積為 $\frac{1}{36}(s_1 \times s_2 + s_1^2 + s_2^2) \times h$。本題之體積即為 $2055\frac{20}{36}$（立方尺）。至於最後一句「今二千五十五尺分廿」，各家見解並不相同。彭浩認為應改為「今二千五十五三十六分尺廿」，即表示本題之答案；郭書春則認為「似係本條上一問題的逆問題的殘文」；郭世榮則認為此句應與前句「卅六成」合為一句，並改為「卅六成今二千五十五卅六分尺廿」，意思為「用卅六除得現在的二千五十五卅六分尺廿」；蘇意雯等人則認為此句可能是錯簡。

請參考林倉億與我合撰的〈《算數書》部份題名的再校勘〉（本刊第五卷第二、三期合刊）。

根據《正中形音義綜合大字典》，『亭』字甲骨文缺，中國東漢許慎《說文解字》說它本義作**『民所安定也』**解。前書顯然依後書再進一步指出：**「秦漢時，縣道十里一亭，亭有長以禁盜賊，其下寬，備行李止宿，上有樓以便守望，故從高。又以丁即釘，形細長，且有定止意；亭狀細長，並有使民得定止之意，故從丁聲。」**如此一來，『亭』這種建築物，當然有可能採取這今天泛稱為『截頂圓錐體』的『圓亭』或『圓臺』了。

漢高祖劉邦在秦時曾任泗水亭長，所以，呂后二年時的《算數書》還在計算『亭』這種建築物的體積，看起來秦漢算數頗能呼應『實用』需求吧。只不過，《算數書》在第 61、62 題何以必須分別處理『以圜裁方』與『以方裁圜』的問題？這兩個是圓柱與方柱互求的問題，放在當時的脈落中，『實用性』似乎沒那麼強烈吧！因此，《算數書》納入一些與『實用』無關的問題，應該極有可能！

棒球比賽中的數學

北市敦化國中 謝伯榮老師

職棒比賽中魔術數字的變化

棒球比賽的魔術數字如何去算，其實很簡單，只要先假設第二名接下來連戰皆捷後的最高勝率，再假設第一名的球隊再勝 x 場其最低可能勝率一定會超過第二名最高可能勝率，解出的 x 最小的正整數即為魔術數字。（範例如下表）

介紹了魔術數字的算法以後，接著我舉一個最近發生的例子來說明台灣職棒魔術數字的減少規則不是固定的。比較常用的規則是說一旦有了魔術數字後，第一名的球隊每贏一場則減 1，第二名的球隊每輸 1 場也減 1，因此如果第一名與第二名球隊正面交鋒後，假設第一名的球隊贏了第二名，則魔術數字一下子會減 2。但有時減少的數字會有不一定，請看以下的例子：

6 月 6 日中信對誠泰未開打前戰績表，當日其他比賽皆因雨停賽。

球隊	勝	和	敗	勝差	勝率
興農	29	1	13	0	0.690
中信	26	4	*15*	3	0.634
統一	23	2	20	6.5	0.535
兄弟	23	1	20	6.5	0.535
誠泰	*18*	2	24	10.5	0.429
第一	8	2	35	21.5	0.186

中信最高可能勝率：0.6739

興農只要再贏 5 場，勝率至少有 0.694，故 M5

為何不是 M4，因為興農如果只再贏 4 場，勝率才 0.6735，未達安全的 0.6739 以上，故要再多贏 1 場。

===

6 月 6 日中信輸給誠泰後的戰績表

球隊	勝	和	敗	勝差	勝率
興農	29	1	13	0	0.690
中信	26	4	*16*	3	0.619
兄弟	23	1	20	6.5	0.535
統一	23	2	20	6.5	0.535
誠泰	*19*	2	24	10.5	0.442
第一	8	2	35	21.5	0.186

中信最高可能勝率：0.652

興農只要再贏 3 場，勝率至少有 0.653，故 M3

Q：為何中信只輸 1 場，當天興農也沒比賽，可是魔術數字卻一下子減少 2?

因為在計算勝率時，分母愈小的變動愈大，中信的分母最多為 46，因為他們有 4 場和局，而興農的和局只有 1 場，因此分母最多為 49，一樣贏 1 場，中信的勝率增加量多於興農

勝率增加量，但相對的，一樣輸 1 場，興農勝率的減少量低於中信勝率的減少量，也就是說中信勝率會減少的比較多，因此星期五中信雖然只輸 1 場，但魔術數字一下子減少 2，道理在此。

去年兄弟在台中逼和興農牛，對中信的魔術數字依然減 1，道理也是在於多 1 場和局，則分母會變小，最後在計算勝率時會產生不同的變化所致。

國外的職業比賽比較單純，勝場加敗場都相同，因為沒有和局。因此第一名球隊只要超過第二名球隊最多可能的勝場數即可，據此去算魔術數字，可謂比台灣職棒的算法簡單多了。

職棒比賽中的進位法則

有時看職棒的比賽紀錄，會發現投手投球局數有的報紙登錄為 1.1 局，一樣的情形有的報紙卻登錄為$1\frac{1}{3}$局，不禁想了解為什麼有不同的記錄方式，其實說穿了，不過是 10 進位與 3 進位的道理罷了。

首先是 1.1 局，個位數的 1 代表完成完整 1 局的數目，這個數字是 10 進位的，而小數點後的 1 代表未完成 1 局，多出來的出局人數。也就是說 1.1 局所代表的意思是完成 1 局又 1 個出局數的投球。但我們了解 3 個出局數代表 1 局，因此“.1“的 1 是一個 3 進位的數。記錄投手的投球局數除了“.1“、“.2“外，絕不會出現其他的可能，如果“.3“就要進位，因位 3 個出局即是 1 局。

那麼可能有人就有疑問，為什麼 1.1 局有的報紙會寫$1\frac{1}{3}$局，這或許是因為在計算投手平均 1 場的失分時所要用到的吧。

“投手平均 1 場的失分“公式：$\dfrac{\text{失分}}{\text{投球局數}}\times 9$

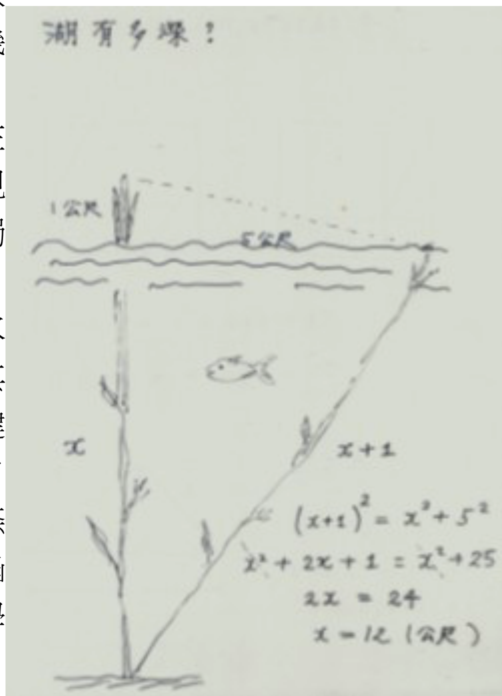
我們知道棒球比賽的分數是 10 進位而非 3 進位，因此計算時把分母的投球局數寫成 1.1 局，“.1“會變成 10 進位的意義。所以在計算時，不得不將 1 局切成均等的 3 份，每 1 份代表 1 個出局數，每解決一位打者即完成該局的$\frac{1}{3}$，因此計算投手平均 1 場的失分時勢必要將所有的資料變成 10 進位，即類似$1\frac{1}{3}$局這樣的記錄。

所以沒有那一種是錯誤的，不同的情形有不同的記錄方式，絕非庸人自擾，也希望藉此同學能更了解進位的道理。

蘭陽女中數學科研習心得

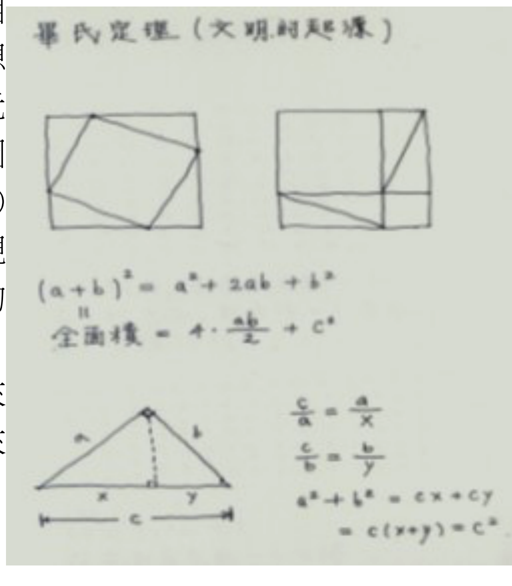
國立蘭陽女中 陳敏晧老師記錄

這是一個千載難逢的機會！我們利用第一次期中考下午辦理數學科研習，能夠邀請清大數學系王金龍教授來宜蘭，真是敝校的光榮，我們校內的所有師生都十分期待王教授的精彩演講，每位數學老師都在其課堂上大力宣傳這場演說的難得與可貴性。原本在今年五月，就已經敲定邀請王教授，無奈好事多磨，因為當時的 SARS 肆虐全台，迫使所有大型的室內集會一律取消。可是，我們並不氣餒，繼續與王教授聯繫，終於在今天能夠聆聽教授的演說。王金龍教授是民國 57 年出生，79 年國立台灣大學學士，87 年美國哈佛大學博士，目前任職清大數學系（被喻為數學界的明日之星），專長為微分幾何、代數幾何，其榮譽事績為：國科會傑出研究獎（89 年度）；晨興數學獎銀獎得主（90 年度）；吳大猷先生紀念獎（91 年度）。第一場演講主題:學習數學心得－如何學好高中數學;如何做數學研究（13：30－15：00）；第二場：高中數學中代數與幾何的連結；圓錐曲線的退化概念（15：20－16：30）。



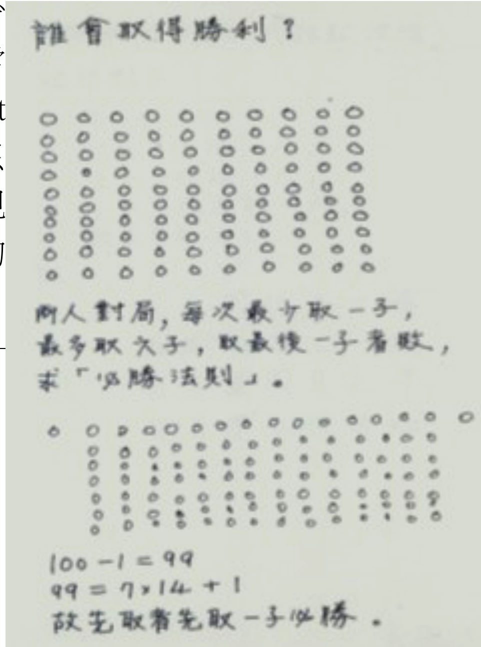
首先，王教授提出他之所以對數學著迷的原因。他曾在書中發現以下的數學問題：「有一個人在湖面上划船，發現水草高於湖面一公尺，乃將水草往外拉，直到水草端點接觸到水面，試問水草長約幾公尺？」[1] 王教授深深為此題困惑，他覺得如果能解出來的話，那就太神奇了，因為看不到（水面下）的東西居然可以解出來，那就表示學「數學」是有其正面的意義，而且它的威力無窮。當他了解此題的解題關鍵在於「畢氏定理」（Pythagoras Theorem），他於是利用代入自然數的方法，一個一個數值慢慢代入，直到符合所給定的條件為止。他甚至花一至兩週的時間去了解「畢氏定理」的涵意。這個例題深深影響王教授的人生目標，因為他覺得數學實在太有趣，花時間念數學實在很值得。

後來，當王教授發現「畢氏定理」可以用右方的兩種證明方法時，[2] 他真的是大吃一驚。第二個圖是利用國中所學的相似形原理解題，學生一般可以了解證明過程，但是，很難想得出來。而第一種方式，就是畢達哥拉斯（Pythagoras，西元前六世紀），在海邊沙灘上以 a+b 為邊長作成正方形，將圖形分割、重組圖形，藉由「圖說一體」（proof without words）來解題，這種直觀、輕巧、雅俗共賞的樂趣，更容易令人親近數學。此時無言勝有言、無聲勝有聲，這種證明方式真的令人讚嘆不已！

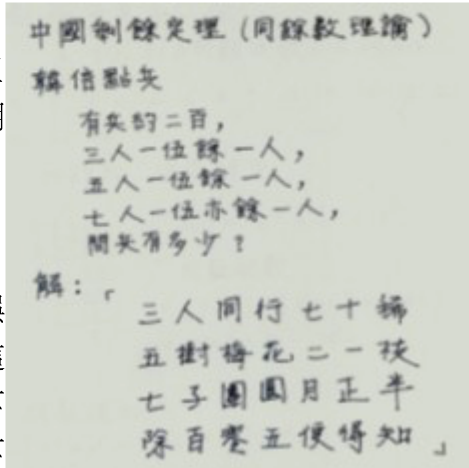


接下來，王教授提到他在小學時，班上來了一位美國來的學生，由於美國的數學教育比較靈活多元，因此，他帶來

一項遊戲，結果每一節上課時，他們兩位都躲在教室後方玩這個「誰會取得勝利？」的遊戲。遊戲的情況：「就是總共有一百個球，兩人依次取球，每次最少取一球，最多取六球，取到最後一球者敗，求必勝法則？」當然那時候的王教授並不知道這就是最簡單型的「賽局遊戲」（Set Game），[3] 也就是國中所學習的等差數列性質。所以，王教授只能不斷地嘗試錯誤，從每次試驗中去找尋規則，當他最後發現必勝法則時，他對自己就更具有信心，也更強化他追尋數學的動機。

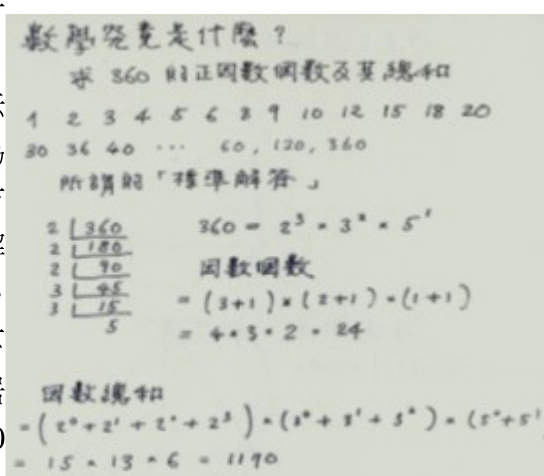


王教授也回憶國中時所碰到的一個數學問題：「韓信點兵──有兵約二百，三人一伍餘一人，五人一伍餘一人，七人一伍亦餘一人，問兵有多少？」[4] 這就是中國剩餘定理的問題類型。而令王教授更感覺到神奇的，就是參考書的解答寫法，竟是以一首七言絕句的詩詞結束：「三人同行七十稀，五樹梅花二一枝，七子團圓月正半，除百零五便得知。」他經過了很久的思考，同時，也找了一些課外書來參考，發現原來這就是『同餘數』的概念，亦即模數（module）的想法。他努力求出一般式的表示法，這樣才對整個問題有了徹底了解，也期待能解決更多的問題。這種問題也發生在多項式的運算中，著名的 Lagrange's Polynomial Formula 的差值原理，也是於此出發的，王教授指出：「更有趣的，是我一位朋友在電子公司上班，負責的是掃描器產品的開發部門，每天都在使用內差法、外差法來改進產品的品質，所以，大家所學的數學知識何時派得上用場，是很難下定論的。」



王教授的言談中總是充滿著鼓勵，絲毫不掩飾他嘗試錯誤的過程，讓學生聽起來是頗有同感。學生必然可以體會原來這麼優秀的數學家，也是需要嘗試錯誤的，所有的思路過程都不是「天外飛來的」，而是不斷地累積經驗、不斷地找尋規則、不斷地加以修正想法，從中獲得樂趣才是數學的真正意涵。筆者發現看此時學生表情都頗為認同，數學家的成就是一步一腳印前進的。

接下來，王教授提到改變他一生的一次考試，亦即他就讀國一下學期時，學習「因數分解」之後的第一次段。當時的王教授的成績並非頂尖的，不過，由於數學表現優異，他被選為數學小老師，平時負責教導其他同學數學，所以，他一直自認為他的數學成績是最優秀的。怎知一場考試下來，他的數學分數僅有 47 分，這簡直是晴天霹靂！他簡直無法接受這樣的表現，這是他有史以來的挫敗（直到現在為止）。他不斷反問自己是哪裏出了問題？他以前念數學的方式，就是一拿到課本之後，就將其中的每一題數學問題解完，然後，就將數學課本丟到一旁，從此之後不再理會它。但是，這次教訓之後，他發現他自己學得不夠多，學得不夠紮實，他有必要去了解為什麼這麼困難的考試題目，居然有人還考一百分。那一次考試中有一題問題是：「求 360



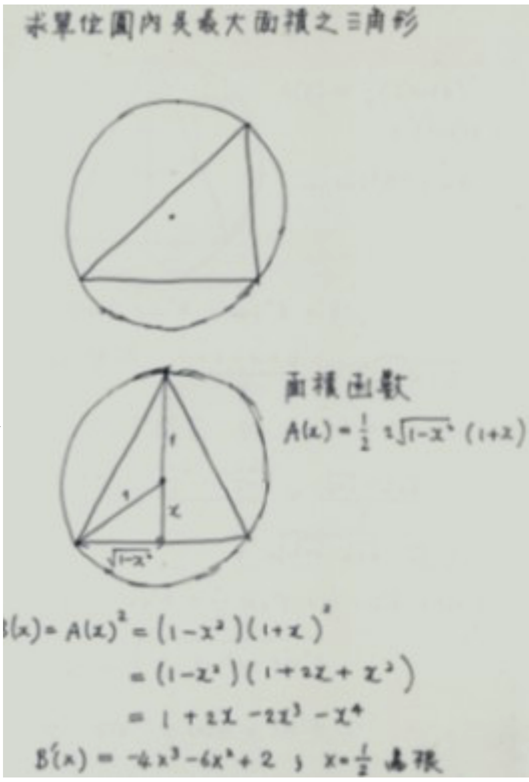
的正因數個數及其總和？」王教授看到這一題時簡直傻眼，心想怎麼會有這種問題出現，它不像前面所談論的數學問題，都與都與生活能產生聯結（量一下水草長、玩玩益智遊戲、數數軍隊的人數），所以，他就從 1 開始找 360 的正因數

，這當然花了他相當多的時間去尋找，更可憐的，是他少找到一個正因數，也因此前功盡棄，導致成績不及格。為了徹底了解問題的根源，他請教了班上答對此題的同學，令他訝異的是居然沒有一位同學知道為什麼？可見，大家都是靠背公式得分的，這是王教授所最討厭作的事，因為如果數學是靠『背多分』，那麼，學數學還有什麼樂趣存在？因此，他花了將近一個月的時間去弄懂，原來問題的本質是非常容易的。他認為學習數學的主要樂趣，就隱藏在答案下的思考過程，如果同學們想要學好數學的話，最好將你所學習過的東西都仔細想一想，唯有如此，你才能將所學習的東西轉換成自己的想法。

經過這次教訓之後，王教授更覺得必須多花一點時間在數學方面。其實，數學學得好是有很多好處的，例如：當數學成績高時，由於國、高中是利用加權平均的算法，因此，平均的結果就將整個成績往上拉，除了增加自己不少的信心外，也帶動其他科目的學習動機。當數學成績提昇時，父母親的心情似乎變得特別愉快。他說：

> **我很慶幸我能找到一條屬於自己的路，也可以說是數學救了我，也深覺自己是很幸運的，因此，我奉勸同學多了解自己的性向是一件非常重要的事，走一條屬於自己的路，遠比做任何其他事來的有意義。之後，由於功課方面表現不錯，就被學校選派去中興大學參加科學營，這次活動對我個人意義非凡，因為這是我第一次有機會去接觸電腦，這令我十分興奮，因為電腦的強大運算功能，可以解決數學中的許多煩人的部份。**

還有一個很重要的插曲，是王教授從小就對電動玩具著迷，他一直有一個願望就是藉由電腦來自己設計程式。他終於在考上武陵高中的那年暑假寫出程式，這是他人生的重要里程碑，因為他國小成績很差的主要原因，就是太沉迷於電動玩具，如今藉由自己努力奮鬥寫出程式，這種成就是比做任何事都要來得有價值，後來更在武陵高中創立了電腦社團。因為從國中之後，王教授的數學成績都一直名列前茅，所以，常有機會被學校推薦去參加數學競試。接下來，他舉出一題當時考試時他無法想出的解答，藉由此題來與同學分享其思考的心路歷程，題目：「求單位圓內是最大面積的三角形。」仔細一想感覺還有些困難，因為三頂點都落在圓周上且都是動點，三個移動的點似乎無法求得最大面積。但是，何妨將兩個頂點固定，去思考如何求得第三頂點。現在，底邊已經固定，僅需要求高最小即可，由於三頂點皆落於圓周上。因此，僅需要考慮等腰三角形的情況即可。接下來令圓心到底邊的距離是 x，便很

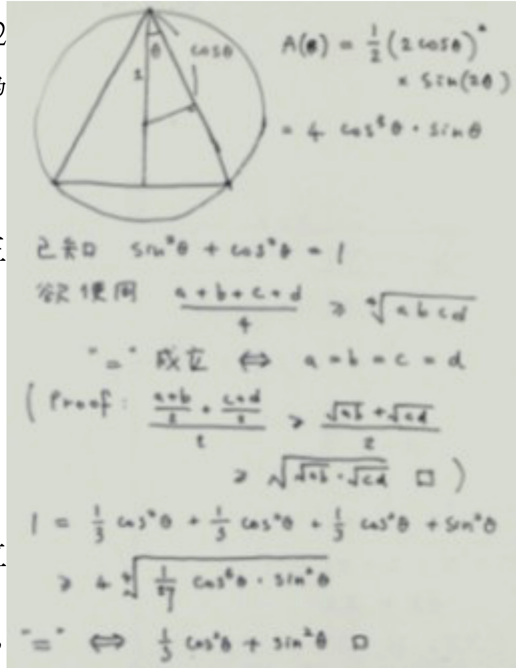


容易求得面積函數 $\sqrt{1-x^2}(1+x)$，解到此後，便了解為什麼

此題他無法解出。因為這個函數的複雜度，超乎一個國中學生的數學程度（如果是針對大學生的話，僅需要微分就可以求得極值），但是，對於一位國中生而言，最擔心的大概就是根

號（ √ ）的出現。後來，王教授突發奇想，不是要找面積的最大值，不妨找面積平方的最大值，這兩者間的意義是等價的。所以，將面積函數平方的結果得函數為 $1+2x-2x^3-x^4$，這時的王教授已經自修許多課外數學，知道微分求極值的威力（儘管還不知其所以然），微分的結果求得函數為 $-4x^3-6x^2+2$，進而求得其中一實根為，合乎所求。這些解法當然不是出題老師所公佈的正確解法，因為對一位國中生而言，利用微分來解決問題似乎是遙不及的想法，不過，這也更加吸引王教授想要知道所謂正確的解法。

現在，就讓我們一同來欣賞這個當時令我百思不得其解的方法。原來是出題老師將圓內接的等腰三角形，利用頂角平分線的性質，先假設其一平分角的角度為 θ，由於此圓為單位圓，故其半徑必為 1，利用三角函數的定義與性質，使用面積公式 ，其中兩鄰邊為兩腰，頂角為，算出面積 a△ABC=1/2 ab sinC 其中兩鄰邊為兩腰 $2\cos\theta$，頂角為 2θ，算出面積為 $A(\theta)=1/2\,(2\cos\theta)^2 \cdot \sin 2\theta = 4\cos^3\theta \cdot \sin\theta$。現在的問題，是如何算出此式子的最大值？先考慮四個元素的算－幾不等式（$\dfrac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$ 等號成立時即 a=b=c=d）。由於三角函數的等式性質 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，思考如何拼湊成 $\cos 3\theta \cdot \sin\theta$，利用



$$1=\frac{1}{3}\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta \ge \sqrt[4]{\frac{1}{27}\cos^6\theta\sin^2\theta}$$

所以，$\cos^3\theta\cdot\sin\theta \le \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$，從而最大面積為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，等號成立時即 $\dfrac{1}{3}\cos^2\theta=\sin^2\theta$，則 $\theta=30^0$，就是當此三角形正方形時，面積有最大值。

這種題目真的令人難以捉摸，如果是第一次遇上此題可能有些難以適應，因此，王教授建議同學還是必須多看些問題，多從問題中去理解自己所學習過的數學概念，因為每一個問題背後，一定有出題老師所要呈現的數學知識，同學只要多接觸一定有幫助數學思考的。王教授的第一場演說就在一連串的歡笑中與充滿思考的數學解題中結束。第二場演講由於是針對數學老師的專業部份，因此，有些學生就先行離開，但是，令我覺得高興的是，仍舊有為數不少的學生留下，可見，她們一定意猶未盡，希望能從教授所談論中再挖一些值得學習的寶藏。這一場演講的主題是：「高中數學中代數與幾何的連結;圓錐曲線的退化概念」，王教授從圓錐曲線的離心率出發，去定義橢圓、雙曲線、拋物線，進而求得一些主要的性質，更談論到應用的部份，例如：「利用反射性質來製造遠距電子探測器（雷達）、克卜勒行星運動定律」，確實給所有在場教師上了一節寶貴的課程。在所有演講結束之後，王教授被許多學生圍繞著問問題，看來他的精彩演說真的有助於強化學生學習數學的動機。王教授的態度極為謙和，總是很有耐心與仔細回答同學的疑問，相信她們不僅上了一節數學課，更學習到許多為人處事的道理。

總之，聽過這兩場演講之後，所有的師生都深覺慶幸與值得，真的學習到許多珍貴的數學知識，也了解這麼優秀的數學家的求學歷程（中、小學部份），居然也是跌跌撞撞的，真

出乎大家的直覺想像。尤其，王教授毫不保留地分享自己曾經失敗的經驗，這樣真的能鼓勵後進者學習，只要大家多用心還是有希望與王教授看齊的。

回想上次的邀約由於 SARS 而作罷，但是，我們的等待看來是值得的，也十分感謝王教授能花時間構思演講內容。他極為謙虛一直跟我說深怕無法得到大家的共鳴，看起來他是多慮了，演講結束時所得到熱烈掌聲能夠證明一切。

最後，筆者要感謝所有蘭陽女中數學老師的通力合作：陳榮欽老師擔任主席，還特別邀請大家享用一頓豐盛的歐式自助餐（羅玉樹老師協訂）； 謝謝邱冠誌處理演講過程中的所有瑣事； 感謝游秀琴老師為王教授準備宜蘭民產； 更謝謝潘建修老師將整個演講過程製作成優質的 DVD 影帶； 還有，也謝謝所有參加演講的學生，你們的認真投入才是演講會的重點。

註解：

1. 這個問題出自於《九章算術》，這本書是中國古老數學中流傳最廣且收集最完全的一書，全書共有九個章節，由 264 個問題所購成，書中第九章〈勾股章〉中第六題：「今有池方一丈，葭生其中央。引葭赴岸，適與案齊。問水深、葭長各幾何？答曰：水深一丈二尺；葭長一丈三尺。」
2. 「畢氏定理」是人類數學發展史中一項輝煌的成就，畢達哥拉斯學派所建立的幾何模式，是日後平面幾何理論的重要基礎。
3. 「賽局遊戲」（Set Game）並非是約翰．納許（John Nash，1928-）所最早提出的，在一九四四年，匈牙利籍數學家馮紐曼（J. von Neumann）與摩根士丹（Morgenstem）合著的《賽局理論與經濟行為》被視為賽局理論成型的代表作。
4. 這個問題源自於中國的數學古籍《孫子算經》，書中有一問題為「今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？」之後在秦九韶所著的《數書九章》（西元 1247 年）中，將「物不知其數」問題給出理論說明，稱為「大衍求一術」。

數學步道之實務經驗談－以羅東國中為例

羅東國中 林肯輝老師

一開始接觸數學步道，是被「逼」的。

一年多前，全國國中開始沸沸揚揚地實施「九年一貫」課程，此一劃時代的新課程其特色不勝枚舉，其中一個就是發展以學校特色為本位的課程。這個思考方向雖不是台灣教育史上的創舉，但要將「學校特色」發揮在「數學領域」裏，那可是第一遭。大家都等著看，這將會為數學教育界激出什麼樣的火花。

正當此時，剛回羅東國中不久的我，躬逢其盛。由於年資「菜」，被誤認為是「年輕有為」。於是，教務主任下了一道指令，「逼」著我設計出一個學校本位的教學活動。身為「菜鳥」的我只能硬著頭皮，接下這個任務。開始將儲存在腦中資料庫裏所有的教材教法、教學

活動設計……一一地快速搜尋，一個燈泡突然一亮－「數學步道」是個不錯而可行的方向。

說實話，以往在唸教育學程時，對「數學步道」的認識也僅止於她字面上的意義：以生活中具體的環境作為數學問題的素材。而對她更深入的瞭解，則是從自已開始搜集相關資料開始。

民國八十三年，在朱建正與黃敏晃教兩位教授的推動下，台灣大學的傅園和椰林大道成為台灣第一條數學步道。配合中華少年成長文教基金會所出版的《台大數學步道手冊》，以台大的傅園、椰林大道四周的景觀、建築為題材，設計了數個適合國小、國中學生的數學問題。藉以讓學生將教室中所學應用到生活中，感受數學無所不在，一掃學生心中常有「數學沒有用」的迷思。漸漸地，這股風潮就像棉布滲水般，暈開到全國小學，許多小學也試著就學校本身的環境資源，研發出獨具學校特色的數學步道。

相較之下，數學步道在國中似乎不像在國小般流行。筆者認為，一來是因為國小的數學偏重在「算術」，在具體的環境中比較容易找到對應的題材；而國中數學已進入到「代數」領域，並且開始了「抽象」思考，不見得在現實生活中可以找到非常契合的題目。二來，國中有升學壓力，大部份的教學活動都是為了「升學」這個終極目標，「玩」數學步道被認為對升學沒有太大的幫助，當然也就不會受到很大的重視，「數學步道」也就束諸高閣。

這個狀況，因為「九年一貫」課程的展開而有了改變。「九年一貫」講求創新教學，並以學校本位為主要訴求。這下子，學校就有正當且充足的理由，可以好好把「數學步道」拿來「玩一玩」了。筆者就以任教的羅東國中為例，介紹本校的數學步道的實施狀況。

羅東國中的數學步道發展史，大致可分為兩階段，一是「紙上談兵」階段。筆者是此階段的主要設計者。一年前，由筆者設計出第一套數學步道，一共 15 題，但由於其他的措施並未配合得當，使得這套數學步道一直停留於紙上作業，只有上級長官來視察時，或對他校展示時，印成美美的書面資料，填充門面之用。其中，筆者自認為有兩題設計得還不錯。其一，是羅東國中的中庭花圃有一個用水泥砌成的弧形，希望學生找出它的圓心。其二，是要學生就現有的教室、辦公室數量，以及其中的燈管數，去估算學校一個月的電費。這套「花瓶」似的數學步道，儘管她並未真正落實，但也開啟了羅東國中發展數學步道的第一扇門。

令人驚喜的是，一年後筆者到宜蘭縣各國中作「深耕」服務時，發現當初這套只是用來作「宣傳樣板」的數學步道，竟悄悄地滲透到某些學校裏，經過修改，搖身一變，成了具該校特色的成品。這種無心插柳柳成蔭的喜悅，實不可言諭。

經過了此階段的紙上談兵，我們順水推舟，認為此一學習活動應該有實施的價值，於是乎進入了第二階段：「實地操演」。

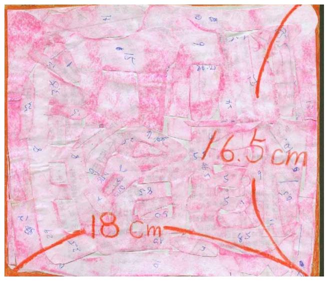
由於本校的任務分配有了調整，將「數學步道」繼續研發的工作，移交給我校另一位青年才俊陳俊志老師身上。因此，下文中資料多為陳老師提供，在此深表謝忱。

在羅東國中第一次舉辦數學步道，適逢本校校慶，各領域均設計一個主題活動，數學即推出名為「挑戰阿基米德」的數學步道，實施辦法如下表：

活動名稱	挑戰阿基米德
實施日期	民國九十一年四月八日～民國九十一年四月十五日(一週)
實施對象	羅東國中二年級全體學生
組隊方式	以同班級學生為主，5-6 人為一組，全班約分 8 組
獎勵方式	取前六名頒發獎狀及禮物，且列入平時分數。
評分標準	1、做法是否可行

	2、方法及過程是否完整 3、做法是否有創意 4、結果是否接近實際狀況。
評審老師	聘請本校 6 位數學老師共同評分

此次數學步道共有四道題目：第一題是「校門口的右邊有銅製『宜蘭縣立羅東國民中學』的字樣，請思考最佳的方法，計算出“羅東國中”這四個字的總面積及總周長。」此題有同學利用方格紙拓印，如圖一。也有學生拓印後，將字「支解」後重新拼貼成矩形，如圖二，再求矩形的面積，方法各異而各具巧思。



圖二：將字支解後，拼成矩形

第二題是「教學大樓中庭是每日升旗校長老師宣佈事情的地方，形狀如右圖，請計算出教學大樓的中庭(至階梯為止)的周長和面積。」面對如此大的幾何圖形，大部份學生多利用地上原有的正方形地磚來計算。

第三題是「教室前面有許多的圓柱，請測量出一圓柱的直徑、表面積和體積(圓周率 3.14)。」大部份學生可以利用童軍繩，先量出圓柱周長，再利用圓面積及周長公式，計算作答。

第四題是「專任教師辦公室前的茄冬樹已伴隨我們多年了，讓我們多了解它吧。請求出它的高度，並估算它約有幾片葉子。」樹的高度的求法，有的學生利用旁邊教室當作參考體，觀察出樹與教室的相對高度，先測量教室的高度，再間接求出樹的高度，也有學生利用「相似形」的概念求答。

此活動一展開，就看到校園裏的氣氛與往時不同：有學生圍著門口、對著「羅東國中」四字指指點點；也有學生成群拿著繩子、粉筆在中庭內來回穿梭；也看到有學生蹲在茄冬樹下托腮沉思，甚至經過這個數學步道活動後，那棵茄冬樹的葉子，竟也莫名地少了一些(目擊者指出，有同學直接折下樹枝，數上面的葉子)。頓時覺得，這個校園很「數學」。

活動結束，經校內八位老師的評選，優勝隊伍每人得到一個嘉獎與一本筆記本。老師們也開始檢討這次數學步道的成效，將發見的問題列出，供第二次實施時做為改進的依據：

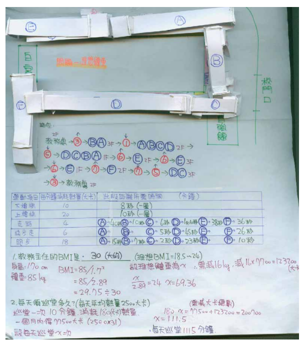
1、 挑戰阿基米德時間與國文週及運動會時間太接近，學生在實作時間上受到壓縮，而且無法全心全力的思考、測量，以致結果及方法不盡理想。
2、 由於是第一次嘗試，學生不知道到底要怎麼做，從什麼方向著手。
3、 以班為單位分成八組，每組五～六人，容易有抄襲的情形發生，而實際操作的學生只有幾個而已，無法全部參與。
4、 有老師會直接教導學生如何去解決問題，失去數學步道的意義。
5、 以第四題為例，學生會破壞樹的生態。
6、 學生的報告製作精美，但內容稍嫌不足，過程有不夠詳細。
7、 題目太多，沒有做完的組別很多。因為在學校很少有時間去實作，必須利用假日，如果臨時有事，就沒時間測量。

第二次數學步道活動，在五月十九日～五月二十六日登場。有了第一次的經驗，第二次決定將題數減少為二題。第一題是**『理想體重』**：

肥胖問題一直困擾著很多人，讓我們來幫教務主任減減肥吧。

1. 教務主任的 BMI 是______________？

2. 教務主任在五月裡每天必須巡堂多久時間，才能降到理想體重的


圖三：主任的減肥計劃表

範圍內。假設主任每天所得到的平均熱量為 2500 大卡。Ans:______________

參考資料：

1. BMI(Body Mass Index，身體質量指數)= 體重（公斤）/身高^2(公尺^2)。(理想體重範圍為 BMI=18.5~~24 公斤/公尺^2)
2. 各類活動所消耗之熱量:(減少一公斤需要消耗 7７00 大卡)

運動項目	每分鐘所消耗的熱量(大卡)
下樓梯	10
上樓梯	20
走路	4
快步走	6
跑步	18

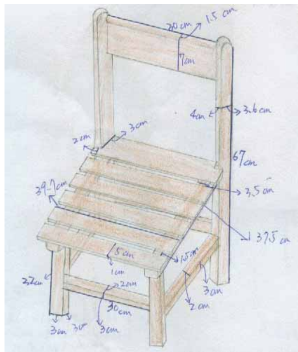
這題，開了學校教務主任一個小玩笑。此題一公佈，許多學生就像追星族般，追著主任詢問身高體重等「私密」資料，頓時讓主任享受了當偶像被追逐的感覺。

作答方面，學生多會詳細地為主任規劃。例如每天從哪一幢教學大樓，依序巡堂，其中包括樓梯的階梯數、走路的速度…等細節，面面俱到，如圖三。在解決問題時，檢驗條件的功力，明顯比第一次「阿基米德」時進步。

第二題是求「班上課桌椅(桌子和椅子)的總體積及表面積。」

學生平常每天賴在課桌椅的時間，扣除下課、上室外課的時間，至少還有四個小時，但很少有人會對它的體積、表面積有興趣。這題到讓學生有機會對與他們朝夕相處的課桌椅，有了更親密的接觸。

從學生的作答過程中，我們驚訝於學生分析問題的細膩程度：舉凡桌面的四個弧角、椅子上木條的凹角……學生多能有條不紊地予以分析，如圖四。


圖四：椅子上木條之分析

從這次的兩個題目中，筆者覺得，學生作答時展現的耐心與精緻度，迥異於以往測驗卷的作答情形。以往在作紙筆測驗時，常常發現學生對於題目中的條件敘述總是無法面面俱到，但在解決這些數學步道的問題時，他們卻超乎我們想像地展現出思考的密度。筆者的解釋是，傳統紙筆測驗，學生從小學一路作到國中，固定的考試模式，早已訓練出學生固定的思考模式。但這種活動式的「測驗」讓學生耳目一新，也刺激了學生跳脫出原來的框框，讓思考有了更大的自由度。

整合兩次的數學步道之結果，我們發現一個無法突破的瓶頸，那就是題目涉及的數學還是侷限在「估算」、「幾何圖何性質」等範疇，打不進「代數」等國中數學的核心。不過，平心而論，每種學習活動都必有其適用的範圍及限制，而「數學步道」只是眾多數學學習活動之一，因此，對於數學步道也就無需如此苛求，更不可能希望她能替代所有的教學活動。如果能夠讓學生有多一次快樂學習的機會，也就可堪告慰了。

Information

『歷史、文化與資訊時代的數學教育』國際研討會

Asia-Pacific HPM: History, Culture and Mathematics Education in the New Technology Era

May 24-28, 2004, Taiwan

本研討會預定邀請六位國際知名學者為主題演講者。竭誠歡迎國內外專家學者藉此發表相關論文，交流研究心得。此外，我們也將設計多種單元工作坊，讓參與的中小學數學教師、研究生，都能因此而獲得實作的經驗。

贊助單位：行政院國家科學委員會
國立台中師範學院

主辦單位：國立台中師範學院數學教育系

舉辦時間：2004 年 5 月 24~28 日

研討主題：

1) 東亞數學的交流與轉化 (East Asian Mathematics: transmission and transformation)．
2) 歷史及文化在數學教學中的效用：實務性研究 (The Effectiveness of History and Culture in Teaching Mathematics: empirical studies)．
3) 整合數學史、文化與現代教育科技於數學教學 (Integrating History of Mathematics，Culture and Current Educational Technology in Teaching)．
4) 教師專業發展與 HPM (Teacher Profession Development and the HPM)．
5) 資訊時代科技與人文在數學教育的統整(The integration of technology and human in mathematics education in the new technology era)．

論文收件截止：2004 年 2 月 28 日

學者專家論文限以英文撰寫；中小學教師及研究生論文或報告可用中文撰寫，但請提供英文摘要。文長勿超過 20000 字，大會將編印論文集。論文將有初步審查，撰寫格式將公布在『第二次通知』。

預定國外講員背景簡介

Fulvia Furinghetti：現任 HPM 主席（任期：2000-2004）。她目前任教於義大利 Genova 大學數學系。除了 HPM 之外，她在 PME 研究群中也頗為活躍，因此，有多篇論文都指向 HPM 與 PME 的結合。

Masami Isoda：任教於日本筑波大學，是國際上頗為活躍的 HPM 學者，2000 年 HPM 研討會主題演講者。他對於如何將 HPM 與網路科技結合，以便改善數學教學成效，擁有非常獨到的心得。

Robert Stein：任教於美國 California State University， San Bernardino 大學數學系，是國際

上極為活躍的 HPM 學者，2000 年曾來台北參加研討會，目前擔任 HPM 美國地區主席。

Jan van Maanen：上一任的 HPM 主席（任期：1996-2000）。他目前任教於荷蘭 Groningen 大學數學系。除了數學史的專業研究之外，對於 HPM 如何結合數學教育的實徵研究，也深入研究並指導博士論文。

Alexei Volkov: 俄羅斯數學史家，目前主要研究越南數學史。

鄭振初 (Litwin Chun Chor Cheng)：香港教育學院數學系高級講師。

報名期限：至 2004 年 3 月 31 日。

註冊費：學者專家 1000 元；研究生與中小學老師 500 元。

國立臺中師範學院數學教育系

地址：台中市民生路 140 號

電話：(04)22263181-223 分機

(04)22200818

傳真：(04)22200818

關於本研討會後續消習，歡迎隨時上網或電話、傳真查詢！

出版資訊 (11/2003)

台師大數學系 洪萬生教授輯

○《中等教育》雙月刊第五十四卷第五期『數學專號』

本期（2003 年 10 月號）有五篇與數學教育有關的文章，目錄如下：

1.〈評《高中數學》第一冊第一章的『邏輯概念』內容〉（洪萬生撰）
2.〈線對稱概念發展之問卷設計〉（左台益、陳天宏撰）
3.〈學習單教案設計的一個例子－圓錐曲線〉（蘇惠玉撰）
4.〈數學史融入『對數』教學活動的實作心得〉（陳啟文撰）
5.〈數學焦慮之研究〉（蔡文標撰）

其中第 1、3、4 篇都涉及 HPM，其『中、英文摘要』轉載如下，歡迎大家批評指教。

摘要：

•〈評《高中數學》第一冊第一章的『邏輯概念』內容〉（洪萬生撰）

本文針對高中數學教師極感困擾的高一課程『邏輯單元』提出評論，內容涵蓋六種版本，分別是『三民版』、『翰林版』、『康熙版』、『龍騰版』、『南一版』以及『正中版』。這些教科書編者在編寫此一單元時，對於邏輯學知識本身及其如何納入數學教材，欠缺比較正規的認識或理解，因此，他們在書寫時運用了相當多的『非形式』用語，從而也無助於教師與學生釐清數學 vs. 邏輯的關係。本文採取歷史進路，凸顯『命題』與『論證』的意義，然後，再據以評論上述各教科書的缺失或不足。鑒於本文所指陳的一些問題，筆者建議『邏輯』單元移到高一上課程的『附錄』，或者乾脆移到高三下學期。至於修訂的主要內容，則請編者或修訂者務必認真地區分『有效邏輯推論』與『數學命題真假』。同時，邏輯用詞也應該精確，以免喪失它們被引進高中數學教材的美意。

關鍵詞：高中數學、邏輯單元、命題、論證

This article is devoted to a critical review on the “logic” topic of the current senior high school mathematics textbooks in Taiwan. Among the six editions of the textbooks published by six different publishers, their editors fail to understand, in a “formal” way, what is logic about and how logic should be incorporated into mathematics curriculum. This is due apparently to their use of “informal” terminology in the presentation of the topic. Therefore, it does no help to student’s understanding of logic and its relation to mathematics. In this article, I adopt a historical approach to explore meaning of proposition and argumentation, which is, in turn, used to comment on the topic of the textbooks. As a conclusion, I urge the editors in their revisions of the textbooks to move the topic either to become an appendix to the textbooks used for the first semester of the senior high school students or that used for the last semester of the senior high school students. As for the content recommended for revision, I also suggest that the editors should seek to clarify the distinction between “valid logical inference” and “truth of mathematical proposition”. In addition, logic terms should also be presented precisely in order to make sense of the introduction of logical concepts to the mathematical textbook.

Key words: senior high school mathematics, logic topic, proposition, argumentation.

•〈學習單教案設計的一個例子－圓錐曲線〉（蘇惠玉撰）

在現行高中數學課程中，由於直角座標系的引入，以代數符號操弄為主的解析幾何成為主流，導致學生對幾何概念的瞭解，變得零散瑣碎。本文以圓錐曲線的教學為例，藉著學習單的設計，將圓錐曲線的相關史料引入，譬如阿波羅尼斯《錐線論》中的「正焦弦」觀念，結合「圓錐截痕」與「圓錐曲線方程式」這兩個表徵。本學習單的目標，在於提供學生對於幾何物件的學習另一角度的思考，並期望學生因而對於所學的幾何物件，有較全面性的瞭解。最後，我們也附上實施後學生的回饋與筆者的使用建議，以供大家參考。
關鍵詞：數形合一，圓錐截痕，正焦弦。

In senior high school mathematical curriculum, with the introduction of coordinate system, manipulating algebraic symbolism comes to dominate the core in the learning of analytic geometry. Students’ appreciation of geometrical concepts turns out to be messy and trifling. This article takes for example the teaching of conic sections. By designing worksheets, teachers can introduce the historical material about conic sections to students. Using the object “*latus rectum*” in *Conics* of Apollonius, we can connect “conic sections” -- geometrical representation of the curve, with “the equation of conic sections” -- algebraic representation of the curve. The goal of these worksheets is to help students think from another angle about geometrical entities, with the hope that students can come to understand a whole picture of the subject. This article concludes with the feedbacks from my students and my suggestions on how to use these worksheets.
Key words: Unity of geometry and algebra, conic sections, *latus rectum*.

•〈數學史融入『對數』教學活動的實作心得〉（陳啟文撰）

數學教學的進行方式，是從簡單到複雜、從具體到抽象。為此，數學教師關心的問題總是：如何將外在的世界帶入課堂上？什麼是最好的方法，能讓學生認為數學是一種可以推理

和探索的語言？一般來說，教師能找到好教材的話，對他們而言，設計教學活動將是容易的。不過，在高中數學的某些概念的教學上，有時可能會遭遇一點困難。

舉例來說，利用『對數』來做計算，是一種過去式的學習動機了。今天在高科技計算機的發展下，教師並沒有足夠的理由，說服學生學習對數，以解決他們在生活中可能面對的一些問題。儘管教師強調對數如何在數學及科學應用上扮演重要的角色，相信學生也只能在大學相關的高等科目才會了解到。除此之外，在現在的教科書中，常直接地將對數定義為指數函數的反函數－以現在的術語表示，即「若 $a^x = y$，則稱 x 是以 a 為底數時，y 的對數」。如此形式化的定義，可能使得學生感到對數其實與人類的生活並無相關！在這種情形下，似乎會使上述的兩個問題變得更難回答。就我的觀點，將數學史整合融入數學教學中，應該是很好的另類選擇。

在本篇文章中，我提出一個筆者曾在課堂上使用過的教法，目的在使學生知道對數概念的演進，以及數學家如何用採取不同的步驟來做代數運算。如果太早給予現在的代數符號，有時會讓學生望而卻步。基於此一考量，我不在引入對數的一開始就給予學生現在的代數符號表徵，而是將重心放在等差及等比的對應關係，僅在最後才用對數的代數符號來做銜接。

關鍵詞：數學教學、對數、數學史、等差與等比級數

The teaching of mathematics has a structure that proceeds from the simple to the complex and from the concrete to the abstract. In so doing, math teachers' chief concern is always how to bring the outside world into the classroom and what is the best way to get students to think of math as a language that can be used to reason and explore. Usually, if teachers can find some good teaching materials, it will be easier for them to plan teaching activities. However, some trouble may happen to the teaching of some concepts in senior high school mathematics course.

For instance, the calculation of logarithm is now a thing of past. When teaching the concept of logarithm, due to the development of high－tech calculator, teachers don't have sufficient reasons to motivate students to use logarithm to solve problems which they will encounter in their life. Even though teachers stress that logarithmic function has played an important role not only in mathematics but also in its application to science, students will not realize this until they study advanced courses in college. Moreover, the formal definition of the concept "logarithm" in textbooks directly defined as an inverse function of exponential function－in our modern terminology, if $a^x = y$, then the logarithm of y to the base a is x, may cause students to feel that logarithm has nothing to do with human life. Thus, this situation seems to lead the above－mentioned questions to become much less easy to answer. From my viewpoint, integrating the history of mathematics into the teaching should be a good alternative.

In this article, I present a teaching sequence which has been undertaken in my classroom whose purpose is to make students know the evolution of the concept of logarithm and the different steps which mathematicians have taken to operate algebraic symbols. My teaching sequence is centered on the correspondence between arithmetic and geometric progressions. Instead of launching the students into the modern algebraic symbolism from the very start－something that often discourage many of them－algebraic symbols are only introduced at the end.

Key words: mathematics teaching, logarithm, history of mathematics, arithmetic and geometric progression.

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy@mail.topspeed.com.tw

2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。

3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhy@mail.topspeed.com.tw

4. 本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm

5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、蘇意雯、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻、陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高中） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 葉吉海（內壢國中） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啟哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪（竹北高中） 洪正川（新竹高商）
苗栗縣：陳冠良（致民國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（大里高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
台南縣：謝三福（新化高中） 李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中） 楊瓊茹（三民高中實習）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）