# HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：張復凱、歐士福（台灣師大數學所）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台灣師大數學系所）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（成功高中） 林旻志（北縣錦和中學） 陳啓文（中山女高）彭良禎（北市麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng


第六卷 第十期 目錄（2003年10月）



# 堂堂進入第六年：

# 記《HPM 通訊》發行滿五十期

台師大數學系　洪萬生教授

本刊從 1998 年十月發行（每年十期，其中二、三月；八、九月合刊），迄今剛好滿五年，從本期開始，我們已經堂堂進入第六年了。由於我們在 2000 年 8 月 9-14 日承辦『HPM 2000 Taipei』（『數學千禧年：歷史、教育與文化』國際研討會），當年的六、七月也合刊，所以，2000 年只發行了九期。如果加上本期（第六年第一期），我們已經發行滿五十期了。

以一個小眾刊物來說，本刊從來就不曾『豪氣干雲』！我們深知『出版』、『發行』這種準學術的刊物，除非有學術專業團體支撐，否則絕對不可能『專業化』。既然如此，我們何不讓中學數學教師好好地『玩一些花樣』呢？這也就是說，我們希望讓他（她）們有一個屬於自己的園地，可以分享他（她）們自己有關 HPM 方面的專業發展經驗。此一『定位』始終非常清楚，所以，編者、作者與發行『操作』自如，管他『HPM』將來如何發展，一切但求『好玩』就是了。

我所以提出這樣的『自白』，並非意在貶抑這些中學教師對於專業發展所做的努力，而是從 HPM 的歷史來看（參看本期歐士福所改寫的〈HPM 的發展史：1976-2000 年〉），目前這種存在於中學教師社群中的非正規網絡，可能是最佳的發展策略之一。不過，爲了讓本刊幫助教師專業發展發揮更大的功能，這些受過數學史或 HPM 訓練的教師有必要更緊密地結合在一起，讓『蹲點』連成『線』，線再連綴成『面』，我們在這邁入第六年的開端，特別組織《HPM 通訊》駐校連絡員，希望他（她）們的加入，能爲本刊的成長與本土的數學教師專業發展，擘劃更美好的願景。

# HPM 的發展史：1976-2000 年

台師大數學系碩士班研究生 歐士福

早在一八九〇年代，人們便對該如何藉助數學史來改善教師的教學與學生的學習，產生了很大的興趣。然而，直到一九七〇年代，相關的活動與組織才開始逐漸成形。整個發展的過程似乎充滿了趣味，也值得我們一一回味，就讓我們從 1972 年說起吧！

現今我們所謂的"HPM"是源自 1972 年在英國愛塞特 (Exeter, UK) 所舉辦的第二屆國際數學教育會議 (ICME-2)。這樣的會議是由國際數學教育委員會 (ICMI) 所召開，而每四年將會舉辦一次。就在當年的 ICME 會議中，Phillip S. Jones (University of Michigan, US)和 Leo Rogers (Roehamptom Institute of Higher Education, UK) 兩人聯合組織了一個「數學史與數學教學」的工作團隊 (a work group on 'History and Pedagogy of mathematics')。到了 1976 年的德國 ICME-3 時，Phillip Jones 和 Roland Stowasser 用「以數學史為課程設計的關鍵性工具」(History of mathematics as a critical tool for curriculum design) 這樣的標題，召開了三次會議。而這樣的舉動，似乎也確保了在往後的 ICME 中，研究「數學史與數學教學」的工作團隊將可以定期的集會。數學教育委員會中的執行委員會 (the ICMI Executive Committee) 也非常歡迎這個研究團隊可以加入他們。然而，當時他們卻給自己取了一個冗長的名字：「與 ICMI 共同合作的數學史與數學教學之關係研究群」(International Study Group on Relations between History and Pedagogy of Mathematics, cooperating with the International Commission on Mathematical Instruction)，即 ISGHPM。

團隊成立的當時，有許多理想與目標作為其努力的方向：

1. 促進以下事項國際間的接觸與資訊的交流：(a)大學與學院中的數學史課程；(b) 數學教學中數學史的使用及其關聯；(c)不同層面中對於數學史與數學教育的觀點。

2. 藉著結合數學家、數學史家、數學教師、社會科學家，以及數學的使用者們，來刺激各學科間的研究與交流。

3. 對於數學發展以及對數學發展有所貢獻的事物，促進更深層的了解。

4. 將數學教學和數學史教學與數學的發展作連結，進而對於教學的改善和課程的發展有所助益。

5. 提供數學教師可使用的各種資源，以及促進各種數學教學的研討。

6. 促進數學史料及相關領域的更多接觸。

7. 讓數學家與數學教師對於數學史和數學教學的關聯有更深一層的體認。

8. 讓大家知道數學史在文化發展中具有相當重要的意義。

另外值得一提的是，同樣在 1976 年的 ICME 中，成立了另一個有關數學教育心理學的研究團隊 PME (the International Group for the Psychology of Mathematics Education)，同樣地，它也發行屬於自己的刊物：PME 通訊。除了 ISGHPM 和 PME 之外，構成 ICMI 的研究團隊還有另外兩個，分別是 IOWME (the International Organization of Women and Mathematics Education)和 WFNMC (the World Federation of National Mathematics Competitions)。然而，要維持一個團隊的運作並不容易，幸運的是，HPM 團隊在之後的世代中，仍然保持著熱情與拚勁，讓它不斷地成長茁壯。

到了 1978 年時，HPM 團隊開始滲透到其他組織中，例如，在這年所舉辦的 ICM 會議 the International Congress of Mathematicians)。1980 年，ICME-4 在柏克萊舉行，會議中也選出了

兩位新的 ISGHPM 主席即 Bruce Meserve 和 Roland Stowasser。同時，英國數學教育家 Leo Rogers 當年創辦了通訊，並擔任主編一職。在先前的幾年當中，北美洲版的通訊主編是由 Bruce Meserve 所擔任，直到 1983 年的密西根 NCTM (the National Council of Teachers of Mathematics) 議中，Charles Jones 同意接任主編，並在 1984 年時，將兩版通訊整合爲 “M Newsletter"，意即原本是地區性的通訊，從此之後成爲國際性的刊物了。當然，在 1988 年 Charles Jones 卸任之前，他將通訊推廣到世界各洲 除了南極洲)，共有 62 個國家可以分享這些成果，而後繼者 Victor Katz 也相當努力，讓 HMP 通訊更加地廣佈於世界各地。

先前的 ISGHPM 會議，都是伴隨在國際性的大會議中舉行。然而，在 1984 年，開啓了另一項創舉。就在這年的墨爾本 ICME-5 中，ISGHPM 是以衛星會議的方式舉行，此一傳統於是誕生，往後的 1988 年「佛羅倫斯 HPM」、1992 年「多倫多 HPM」、1996 年的葡萄牙「Braga HPM」，以及 2000 年的「台北 HME」，都成爲當屆 ICME 的衛星會議。另外，在 1984 年的這場會議中，Ubiratan D' Ambrosio 和 Christian Houzel 被選爲接下來四年中的主席；而 ISGHPM 這樣冗長的名稱，也在 Bruce Meserve 的建議下，從此改爲我們所熟知的 HPM。在國際性的發展方面，Meserve 也建議創立 HPM 的分會，尤其是美洲地區，當然毫無疑問地，這項提議被通過了。

1988 年 7 月 20 日到 7 月 22 日，Florence Fasanelli 在義大利的佛羅倫斯召開了第二次 HPM 衛星會議，延續著四年前的先例。從此，HPM 衛星會議都會在當年 ICME 時間前後幾天召開，而地點也會選在附近的國家，爲的是讓那些沒辦法參加 ICME 的人們，也能藉此參與 HPM 的討論與研究。此外，這樣的活動也可以縮短國際間的距離，透過來自世界各地的學者提供學術交流，讓 HPM 更迅速地推廣到世界的每個角落。7 月 27 日到 8 月 3 日之間，在匈牙利的布達佩斯舉辦了第六屆的 ICME 會議，而 HPM 團隊的集會，是由當時的主席 Ubiratan D' Ambrosio 召開，當時與會學者包括來來自希臘、卡達、羅馬尼亞、奈及利亞、英國、美國、匈牙利、日本、波蘭，以及澳洲等地，是到那時爲止陣容最國際化的一次，會議中 Florence Fasanelli 被選爲下一屆的主席，而 Victor Katz 也接任 HPM Newsletter 的主編一職。

1992 年在多倫多召開了第三屆的 HPM 衛星會議，John Fauvel 被選爲下一屆主席，而 Victor Katz 則續任 HPM Newsletter 的主編。緊接著，在魁北克 ICME-7 會議中，來自法國的 Evelyne Barbin 提出了許多有關古代數學問題的報告，而這些報告似乎都是由法國的數學教師們所撰寫與設計，提供了教學中一個介紹歷史觀點的方法。

1994、1995 年間，也陸續有許多和 HPM 有關的會議召開。1996 年 7 月 14 日—7 月 21 日，在西班牙的 Seville 舉辦了第八屆 ICME，而 HPM 衛星會議則在 7 月 24 日—7 月 30 日，於葡萄牙的 Braga 舉行，會議中 Jan van Maanen 被選爲下一屆的主席。這一次的 HPM 非常特別，它與「歐洲區大學暑期數學史與數學教育研習班」(European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education) 合辦，因此，與會學者除了來自世界各地的數學史專家外，還有很多中小學數學教師，總計超過 550 人。

2000 年 7 月 31 日—8 月 6 日，日本立教大學的公田藏教授主辦了第九屆的 ICME 會議，會議中 Fulvia Furinghetti 被選會下一屆主席，而 Peter Ransom 則接任新的通訊主編。緊接著，在 8 月 9 日—8 月 14 日，任教於台灣師範大學的洪萬生教授，負責主辦了這次的 HPM 衛星會議，雖然參加人數不如四年前「Braga HPM」那麼踴躍，但來自全球 19 個國家的學者們熱忱仍然不減，並對台灣教師和學生們所展現的友好與熱情的招待，感到印象深刻。這

次在台灣舉辦 HPM 衛星會議，更鞏固了自「Braga HPM」之後數學教師參加 HPM 的潮流，也展現所謂「在地團隊」(home team) 的力量，許多的數學教師和數學系研究生在洪萬生教授的帶領下，針對 HPM 課題做了相當多的努力與研究，研究成果在此次會議中展露無遺，受到國際間極大的肯定。

經過這二十多年來的努力與推展，HPM 漸漸地成爲國際間數學教育界必談的重要課題，而數學史對於數學教育的貢獻，也是有目共睹。相信在未來的 HPM 會議中，會有愈來愈多的數學教師願意參與研討，我們也樂見到數學史將在學校的數學教學中被廣泛地使用。

附註：本文改寫自 Florence Fasanelli 與 John Fauvel 合撰的文章"The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics: the first twenty-five years, 1976-2000"，由於 Fauvel 英年早逝，所以，本文是一篇未定稿。

## 參考資料：

Fasanelli, Florence, John Fauvel (2000). "The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics: the first twenty-five years, 1976-2000".
洪萬生 (2001)，〈參加一九九六年 HPM 研討會有感〉，《HPM 通訊》第四卷第五期。
洪萬生 (1999)，〈數學千禧年：歷史、文化與教育〉，《HPM 通訊》第二卷第八、九期合刊。

## Book評論與介紹

# 希爾伯特的難題--
# 評《希爾伯特的 23 個數學難題》

台大數學系 翁秉仁教授

1900 年在巴黎舉行的國際數學家會議（ICM）才第二屆，今天大家之所以還記得這個會議，都是因爲偉大德國數學家希爾伯特在會議中提出的 23 個問題。愛好數學的學生，多少都聽過這段故事，它就像數學史上的一則傳奇，是這些懷有熱情理想學生的時空聖地。在想像中，會議當天冠蓋雲集，希爾伯特如同巨人般站在講壇上，爲當世與未來的數學家提出將要照亮後世的 23 個經典數學問題。

但是，真正的歷史呢？如果讀者對下面這段文字也能夠讀得津津有味，那麼您大概就會是葛雷這本書的知音：

十九世紀末，作爲專家機構的各國數學學會才成立不久；如今獨霸一方的美國數學界，當時還是化外之地；1900 年的大會，只是新世紀巴黎大大小小科學會議中的一個，顯得雜亂無章；因爲定稿太晚，希爾伯特的演講並不是主要演講，而是廁身傳記歷史類的演講，演講當天他其實只講了十個問題，而且演講後的聽眾反應算是冷冷淡淡，希爾伯特自己酸酸地

說「與會者質量都不怎麼樣。」

＊＊＊

針對 23 問題，一般的評價是領域不平均，有些問題問得不高明。有些問題壽命很短，例如第三問題在講稿付梓前就被解決了；另外有幾個問題，問得含糊不清，比較像想法的勾勒。基本上，希爾伯特較拿手的領域如代數、數論、數學基礎，甚至分析，他都提出具生命力的好問題。但其他像物理公設化的問題，物理學家似乎並未當真。另外幾何、拓樸與隨機數學幾乎沒問出什麼問題，相對於廿世紀裡這些領域的蓬勃發展，倒也清楚看出希爾伯特的界限。

許多人喜歡拿希爾伯特與法國數學家彭卡勒（Poincare）並比是有道理的，兩人一時瑜亮，思考取徑也涇渭分明。廿世紀前半期，希爾伯特的影響讓數學基礎與純數學蔚然成風，竟讓本來水乳交融的數學與科學，產生斷裂的危機。廿世紀後期，這個趨勢才逐漸轉回彭加勒式的取向：幾何、直覺與親近科學。

於是，廿世紀末最有希爾伯特架勢的數學家之一的阿提雅（Atiyah），在《數學：邊界與展望》（2000）序中，說道

> ......希爾伯特問題對廿世紀數學的影響，可能是被誇大了，當然他掌握到重要的議題...
> 但是希爾伯特他在同節後面又說本身數學工作的影響力更大。
>
> 最後，廿世紀後半期的數學又走回一個不那麼強制的觀點，比較接近彭卡勒的精神，強調幾何的思考，即使在代數與數論領域都不例外......

葛雷的這本書充分地闡明阿提雅的第一段話，就希爾伯特對廿世紀數學影響的許多「想當然爾」的論斷，作者都能成一家之言予以回應，小心地恢復希爾伯特思想的合理原貌。但是如果作者也想藉 23 問題的演變，描繪新世紀的數學地貌，那書中缺乏幾何的視野，就是一個明顯的過失。令人覺得可惜的是，本書顯然是爲了千禧年與希爾伯特致詞百年而寫的，而且就其主旨而言，似乎也該引介新世紀前夕的數學現況與前景，但是作者在這方面著墨甚少。事實上筆者十分不解的是，葛雷連名列第八問題，如今也是 Clay 研究院懸賞七大百萬名題的「黎曼假說」竟然也不佔什麼篇幅。

這不是一本科普書，作者是英國的數學史家，出版社是牛津大學出版社，科普書常見的人物軼事很節制地穿插在本文內（如果讀者對人物較有興趣，應該讀另一本也是針對 23 問題的新書 *The Honors Class*）。葛雷的主旨是藉著希爾伯特的問題，描述廿世紀數學社群的遷變與數學思想的變化，尤其是數理邏輯與數學哲學間的糾結，以及純數學與應用數學邊界的挪移。書最後附上的希爾伯特演講全稿，更可增加這本書的保存價值（其中前言部分最值得細讀，希爾伯特成熟通透的數學思想，躍然紙上）。

因此，這本書的優點恐怕也就是它的弱點。文中尷尬使用的數學術語很多，完全見證了數學知識的累積性或排他性。而且葛雷行文冷靜謹慎，對他自己議題的關注，遠甚於挑動讀者的閱讀欲，再加上他所處裡的課題之一是廿世紀數學社群的歷史，這都需要讀者有強烈的求知慾與歷史感才行。本地出版社願意迻譯本書，恐怕是文化使命感遠大於商業考量，真是令人感佩。

但是，對於恰當的讀者來說，這可能是近幾年來最令人興奮的數學普及書之一，即使在數學科普書的參考書中，也很少見到這許多可能只有數學家，才會閒餘閱讀的刊物（*The Mathematical intelligencer*, *Bulletin AMS*, *NOTICE AMS*, *Archive for History of Exact Sciences* 等），事實上，這一二十年來，是現代數學史研究成果豐收的時候，作者將許多新近的材料

放進來，讓只是讀過 Reid 的希爾伯特傳記或 M. Kline 數學史著作的人，有可以重新閱讀思辯的樂趣。葛雷也等於是藉這個數學家最感興趣的課題，在枯燥的數學史專著中擷精取華，從側面作一次數學史成果的展示。

＊＊＊

現在談一談中文譯本，如上所述，本地出版社爲讀者引入這本書，本身是件值得敬佩的事。而這本書的完成度也很高，全部的內文全部譯出，包括可能是台灣第一份希爾伯特演講的中文完整譯文，再附上全部參考資料，並且爲中文讀者貼心譯作一份頁碼索引（熟悉國內科普書的讀者應該會會心一笑）。

科學書難譯，數學書更難譯，我們可以想見翻譯與編輯作業的困難度，本書的譯者是當行的數學家，在翻譯充滿數學詞彙的本書時，絕對會比一般譯者來得可靠也省力得多，不過譯者的文筆不脫專業的深澀，這種情況尤其在譯者可能比較不熟的數理邏輯領域特別明顯，讀者得花一些精神來適應。由於譯者不是專業筆耕者，編輯可以在文字流暢的處理上再加把勁。不過有一些瑕疵可能編輯也不容易察覺，筆者舉幾個例子：

> 在談到「地位」（status）時，出現這句「數學的地位不只有利於人或是學校，也有助於領域及問題」，但原文的意思應該是是「在數學中，地位不只會在個人或大學上積累，也會凝聚在領域或問題之上。」（p.23）

> 『在整個十九世紀，幾何就是因爲嚴謹的典範而式微」這個令人訝異的斷言，其實是「就作爲嚴格性的典範而言，幾何的地位在十九世紀逐漸式微。」（p.33）

> 在希爾伯特講稿中說「嚴謹（這已經成爲數學的別稱）的要求正對應到『了解』在哲學意義上的必要性。」，若按拙譯「嚴謹（這已經是數學家的口頭禪）的要求正對應到人類知解中普遍的哲學必然性。」（p.304）

數學上的錯誤：有些是原書的錯（p.332, 335, 340），譯者在翻譯時沒注意到，大部分則是校對上的疏忽，如 p.102,103 兩個專欄都有錯，後者錯得相當離譜。另外，在附錄的 23 問題列表（中譯本移到書前）、〈關於邏輯〉以及〈名詞術語〉部分，都出現明顯的誤譯（例如「函數表爲平方和」譯爲「平方和的函數」；詞彙「代數函數」的解釋），頗嫌美中不足。另外將 method of exhaustion 譯成「窮舉法」（應是「窮盡法」），也是錯誤的。

最後還有一個值得商榷的譯法，在書中譯者將代數中的 field 依大陸用法譯爲「域」，而不是台灣常用承襲日譯的「體」，雖然「域」的譯法就英文來說較正確，但是由於代數中還有 domain 一詞，一般也譯爲「域」（例如 integral domain 整域，大陸譯爲「整環」，並不合英文用法），偏偏在書中還出現「有限整域」（finite field of integrality），另外也出現「基本域」（fundamental domain, fundamental field）兩詞一譯的情形，這些紛亂似乎應該釐清或加註說明。

＊＊＊

在結語中，葛雷在歷史中穿梭，評價希爾伯特的成就，站在巴黎講台上那理性自信的青壯身影，驀地清晰起來。希爾伯特的演講是一個分水嶺，將數學從進步清晰的十九世紀康托樂園，送入爭議四起、確定性失焦的廿世紀，也暗喻著兩次大戰的人類史轉折。在數學史上也許只有這麼一刻，能夠這麼堅定單純，仿如飽滿的青春年少。到底要怎麼跟年輕的數學學子談論這段歷史呢？突然間，一切似乎也變得難以確定了。也許能夠確定的是，只要學生對數學的熱情持續不減，相信這本書總有一天會重回他們的案頭來。

# 讀《數學學習心理學》心得

北市成功高中 游經祥老師

## 一、前言

數學教學可說是一種藝術，而且也是教師一直在自我調整，自我成長的一門學問。筆者對數學教育可說是門外漢，有幸參與研讀 Richard Skemp 所著的《數學學習心理學》，讓筆者從中體會到一些數學教育的大略。這是一本結合心理學理論和數學教學經驗的好書，在研讀討論過程中，讓筆者不時常有『心有戚戚焉』的感覺，也讓筆者感到『教學』專業之中，還有這麼多細密的內涵存在，進而對數學教學的價值觀以及數學教學的意義，有更進一步的體會。由於本書內容豐富，筆者便以分段式的方式提出心得，並期望在每一段落中，給出高中教材的相關例子，以參照這幾年來筆者自己的教學經驗。換句話說，在本文中，筆者一方面肯定本書所提出的概念，另一方面，則也要強調筆者教學經驗的自我印證。在此，我很感謝同事杜雲華老師、蘇意雯老師、蘇慧珍老師的集思廣義，以及洪萬生教授的問題討論。

## 二、數學概念

我們數學的學習從無到有，須經過多少歲月學習，及許多師長的引導啓發，再加上我們人類的智力行爲，各方面因緣的會聚，數學方能達到如今成熟的地步。人類由活動中吸取經驗，由經驗中學習而化爲行爲；因此，人類的智力行爲乃從經驗，再由經驗、事物的分類、歸類之中，而產生心智中的『歸檔』。在這種心智活動過程中，我們由語言經驗，經分類、歸納，進而將之抽象化，而這抽象化後的事物存在心中，便稱之爲『概念』。平常數學中所謂的『定義』，即是將某一數學概念的範圍更加精確地顯示出來。因此，數學中的『定義』，乃是前人心血累積所成的數學概念。

在此，筆者提出高中數學教材中的例子，來對數學概念作一印證。在高一上學期的數系中，有一單元目標是爲了幫助學生認識複數系，即 $C=\{a+bi|a，b\in R，i=\sqrt{-1}\}$。在此之前，高一學生的心中對於數的概念只有：自然數系Ｎ，整數系Ｚ，有理數系Ｑ，與實數系Ｒ。因此，要引進複數系時，筆者便從國中時代的一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解及判別式開始引起動機，順便讓學生回憶一下往事，亦即，希望喚醒學生以往的數學概念。進而對判別式 $D=b^2-4ac$ 的正負及實根的個數做個複習。最後，才進入Ｄ＜０時，公式解中 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ 的 $\sqrt{D}$ 是何物？以此來引進負數平方根的存在性。在解決這些存疑之前，筆者又引進十六世紀義大利數學家卡當（Girolamo Cardano）所提出的問題：把 10 分成兩個數，使它們乘積是 40。

當時卡當解出的東西爲 $5\pm\sqrt{-15}$ ，他很迷惑 $5\pm\sqrt{-15}$ 到底是不是『數』。但是，他又大膽地『認定』如果 $5\pm\sqrt{-15}$ 這種東西如果可以合符『數的運算規則』做計算，則 $5\pm\sqrt{-15}$ 就是此問題的解。不過，這問題困擾數學家二百多年，到了十八世紀以後，經過尤拉（Euler）、高斯（Gauss）等偉大數學家的努力探索，吾人才日漸揭開複數系的神祕面紗。

經過如此介紹，在一方面，我們可讓數學史『告訴』學生，數系得之不易；另一方面，也可讓學生了解新數系要『如何』建立。根據數學史，了解一個新數系的建立，對超級數學家而言已經不容易了，更何況是凡夫俗子呢？由此可見，一個數學新概念在學生的心智活動中要明確建立，實在相當困難。

再者，筆者想大略談數學『抽象化』的例子：在大學數中的代數學，其中的群（group），環（ring），體（field）的生成，是由日常生中的自然數系、整數系、有理數系、實數系、複數系中的運算性質，以及其概念中加以聯結，所提煉而成的特性及功用。但是，我們當初很難預測，它們結合後會產生這麼多的特性，而再進一步抽象化後所形成的『近世代數』之美麗光茫。我們試以下面例子說明，當中的提煉過程。

例如：有理數系中對『加法』、『乘法』有封閉性，這就是群（group）中的二元運算的來源，其中的結合性、反元素、單位元素皆可由 0，1 的運算性質推廣得到。因此，經過數系內在蘊涵的特性及功用，再進一步抽象化後便得到『群』定義中的充要條件。最後，再一般化後，便得到更深入的環、體及近世代數的發展，使代數學成爲現今數學領域中重要的一個分支。

由此可見，數學概念大都是經由人類生活活動、經驗累積而形成的成果，進而人類將之分類、歸檔，由變因中尋找共通性與不變性，再進一步抽象化，最後在歷史演化的提煉形過程中，將其『不變』的特質再留存歸檔。就如現在的近世代數學中的群、環、體等理論已成熟，數學家便將之視爲自然的數學文化而留存歸檔。

## 三、基模（schema）的特性

筆者覺得『基模』是數學教育上的一個名詞，它大約說明『心理學中的心智結構情形』。因此，筆者在此只有將基模所具有的一些特性，作以下說明：

- 基模可以結合長期所學的相關經驗及概念。
- 基模可以將概念的關係加以分類、融合、轉化。
- 基模是概念之間的縱橫聯繫網。
- 基模可以將多種概念結合、分析而發展出難以預測的特性及功用。

筆者在此以『重複組合』$H^n_m$爲例，對基模的特性作下列相應的說明。

例：袋中有 a，b，c 三種球，各有 10 個，從袋中任取 5 球，請問有幾種不同的取法？

（A）對沒有$H^n_m$概念的學生，他可以用以下作法，自然討論可得其解答：

ⓐ五同：aaaaa，bbbbb，ccccc，共三種。即$C^3_1$種。
ⓑ四同：aaaab，…，有$C^3_2\cdot 2=6$ 種，或$P^3_2$種。
ⓒ三同二同：aaabb，…，有$C^3_2\cdot 2=6$ 種，或$P^3_2$種。
ⓓ三同二異：aaabc，…，有$C^3_1=3$ 種。
ⓔ二同二同一異：aabbc，…，有$C^3_1=3$ 種。
共 21 種。

運用這種做法，至少學生已有$C^n_m$，$P^n_m$的基本概念，以及對 5 球分類的基本能力。就此$C^n_m$，$P^n_m$及對 5 球分類的三個基本概念來說，它們個別發揮不出解此題的作用。但當學

生的思考中將此三種基本概念結合與聯繫，則問題將可以自然地解決。這種結合與聯繫，就是基模的特性之一。當然，其中也用到自然數的四則運算，這是人類最根本的基模，就不必特別指出。以下，筆者亦是如此對待此根本基模。

（Ｂ)、聰明一點的學生可能會這樣做：

設 a 類球取 x 個，b 類球取 y 個，c 類球取 z 個。則 $x+y+z=5$ ，$0\le x,y,z\le 5$ 且 $x,y,z$ 爲整數（即此方程式之非負整數解。）此時可以列表解之：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| y | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| z | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

故共有 $\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=21$ 種。

運用這種作法的學生至少要有 $C_m^n$、$P_m^n$、代數方程式的列式，以及解非負整數等概念，

其中能將排列、組合的問題轉化成代數的問題，這須要很強的『反思』能力，即能跳脫問題本身，提昇到更高階層以觀察之，而得到此一作法，這是基模結合力更強的展現。由於基模具有這種將多種概念結合、轉化的特性，難怪引導學生作基模式的學習，是一種很有效的數學教學法。此法的進行，要提醒學生有『居高臨下』的視野，在跳脫問題層次之外，能以更宏觀的思考方向思考之。這是非常難得，而且是更高一層的反思，值得學之。

（Ｃ）更聰明的學生，可能會這樣做：

同（Ｂ）中的假設，而得求 $x+y+z=5$ 的非負整數解的個數。此時這類學生便將５個球，用５個“１”代表而將之排成一列，再用兩個加號“＋”插進一群“１”之中，所分成的三部分就分別定爲 $x,y,z$ 的值，而得到 $\frac{7!}{2!5!}=C_5^7$ ，即知 $H_5^3=C_5^7=C_5^{3+5-1}$ 。

這種做法是經兩次反思而得，先將排列組合的問題轉化成代數方程式問題，爲了要求非負整數解的個數又轉化成重複排列問題，而得到更簡便的求解方法，進而驗證了

$H_m^n=C_m^{n+m-1}$ 。

筆者分析上述（Ａ)，(Ｂ)，(Ｃ）這三種作法，主要目的是要說明筆者對基模所列的四種特性，從而使自己對基模的特質，有更進一步的理解。因此，筆者覺得基模本身已經是離開日常經驗與反應，同時，基模可以統合已知知識，進而加強對事物的了解，及對事物的批判思考力。因此，基模是產生真正理解事物的一種心智工具，利用它，我們可以獲取意想不到的新知。

然而萬事萬物，有其利亦有其弊。基模亦可能有其缺點，包括建立過程所費的時間較長，基模有喜新厭舊、顧此失彼的特性，更嚴重者，乃是知識『穩固性』建立的無形障礙。在此，筆者提出基模穩固性的無形障礙，有一個很明確的例子，就是在畢氏發現無理數時，當時數學家們視畢氏的無理數論點爲異端，不在此重述。可見，當時數學家們對數學中的數系基模，只穩固在有理數系爲其最高階層的數系，至於對於非有理數的存在性，自然會有很大的懷疑。

## 四、思考層次的分析

我們先考慮這問題：試解$\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{2x^2+2x+2}{x+2}=3$。

(解一)、一般學生直觀解之，要先去分母；得到：

$(x+2)^2+(x^2+x+1)(2x^2+2x+2)=3(x+2)(x^2+x+1)$

$\Rightarrow x^2+4x+4+2(x^4+x^2+1+2x^3+2x+2x^2)=3(x^3+x^2+x+2x^2+2x+2)$

$\Rightarrow 2x^4+4x^3+7x^2+8x+6=3x^3+9x^2+9x+6$

$\Rightarrow 2x^4+x^3-2x^2-x=0$

$\Rightarrow x=0$，$2x^3+x^2-2x-1=0$

$\therefore x=0,\pm1,-\frac{1}{2}$。

(解二)、另外有一些學生先欣賞一下題目，分析問題特性，方程式中皆有$\frac{x+2}{x^2+x+1}$及其倒數。因此，學生的做法便利用符號代表$\frac{x+2}{x^2+x+1}$，即令$a=\frac{x+2}{x^2+x+1}$，則原方程式變爲

$a+\frac{2}{a}=3\Rightarrow a^2-3a+2=0\therefore a=1$或 2，即$\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$或$\frac{x+2}{x^2+x+1}=2$，故得$x=0,\pm1,-\frac{1}{2}$。

由上述的兩種解題方法，筆者試圖分析學生的心智活動結構的大概情形如下：

（A）、自動化概念

在學習或處理新概念或問題時，基礎概念或基礎理論必須變得自動化，亦即可以自動浮現心頭。不必重新思考或反映的概念，皆可稱爲自動化概念。

在『解一』中的自動化概念，包括分式之去分母，多項式之加減乘及多項式的因式分解。因此，要用“解一”的方法，這些基礎概念須要已經自動化了，如此解此題才方便。

至於在『解二』中的自動化概念，就包括符號代換、分式之去分母、因式分解（十字交乂相乘）、解一元二次方程式等。

因此，要運用『解二』之法者，先要有更高層次思考，以簡禦繁而得到$a=\frac{x+2}{x^2+x+1}$的代換式；之後便是須要自動化的概念。

（B）、心智模型的層次

在上述『解一』中，乃是一般性解題的自然操作活動，也是直覺處理問題的想法。亦即直接由自然的規律（即自動化概念），經過操作、抽象、推廣所蘊育而成的心智模型。這即是 Skemp 書中所提到的第一型理論。

在『解二』中，須要跳脫到問題之外，以居高臨下的觀點先審題目之結構，進而運用數學以簡禦繁的精神，以$a$代表$\frac{x+2}{x^2+x+1}$而得到簡單的分式方程式，進而如『解一』之法解之。這種心智模型較『解一』更爲高層次。這類思考層次可說是反思，自己跳脫題外，思考問題，時時知道自己在做什麼。

接著，筆者再以大學數學中『拓樸學』（topology）的例子，來說明『思考層次』與『思考眼界』有著高低的不同。

記得在國小、國中、高中時代，圓形和三角形是視爲完全不一樣的東西，不同的幾何圖形。當時的思考，只限於外形的表現，比較不注重其無形的內涵。因此，在中學時代的數學，

直觀思考，圖形的全等性、相似性乃是主要訴求的重點。但是到了大學數學系中的拓樸學，已經忘記了點與點之間的距離，也跳脫了有形物體的局限。故在拓樸學家的眼裡，圓、三角形與皆正方形視爲同一類圖形；甚至圓與實心的輪胎也被視爲同一類的幾何圖形，而一直線與一點也被視爲同樣的幾何圖形。這些觀點，皆已跳脫有形可想像的範圍，已經走到第二型的更高層的思考，難怪 Skemp 主張數學學習理論皆是屬於第二型的高層反思。其實，數學高階思考大都屬於二階反思。因此，我們可以理解到，經由數學層層抽象化過濾的高階概念，雖然已經遠離現實世界，走向無形抽象空間之中，但是，它卻反而引領我們進入宇宙的本質，一旦賦予科學的內涵，就可以得到實際世界許多令人驚異的結論了。

## 五、代數與幾何的結合

筆者提出以下例子：

例：設 A(-3,0)，B(0,-2)爲橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 之兩頂點，Ｐ是橢圓上之一點，求△ＡＢＰ的最大面積。

這例題是高中數學教材中，常出現在圓錐曲線單元中的例子；而且也算是較難的例題之一。我們提出兩種解法，再進一步分析這兩種解法過程中與 Skemp 書中的理論相應之處。

解法一：利用代數方法解之。

設Ｐ（$3\cos\theta, 2\sin\theta$），

則△ＡＢＰ面積＝$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3\cos\theta & 2\sin\theta & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|$

$$=\frac{1}{2}|-6-6\cos\theta+6\sin\theta|$$

$$=|3\sin\theta-3\cos\theta-3|$$

$$=|3\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-3|$$

故 $\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=-1$ 時，得最大値　$3\sqrt{2}+3$。

解法二：利用幾何觀點解之。

△ＡＢＰ中 $\overline{AB}$ 底固定，故只要高最大，

則△ＡＢＰ之面積就會最大。因此，利用平行線間之距離固定的特性；再

作Ｌ// $\overline{AB}$ 且與橢圓相切於 P，則可得最大的高。利用橢圓切線公式得：

$$L: y=-\frac{2}{3}x+\sqrt{\frac{4}{9}\times 9+4}=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{2}$$

而 $d(A,L)=\frac{6+6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$。

故△ＡＢＰ之面積＝$\frac{1}{2}\sqrt{13}\frac{6+6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=3+3\sqrt{2}$ 。

這個問題屬於難題，一般學生不易求解，這是因爲它須要許多概念的結合，才能推導出這題的答案，其中包括橢圓的參數化、面積的行列式表示（亦可以用面積的向量表示）、三角函數疊合性質、最大值如何取值等。一般而言，一個問題須要三個或以上的概念結合才能解決，便可說是一個難題。何況此問題至少要用到四、五個以上的概念，難怪對學生而言，這是一難題，以上是『解法一』的計算過程分析。然而，對於『解法二』而言，它所須要的概念有：幾何平行概念，三角形面積求法，橢圓切線公式，點到直線之距離等。也就是須要四、五個以上的概念結合，才能處理這一問題。然而『解法二』的方法是代數與幾何的結合，也就是兩個大系統的結合。Skemp 在本書中提到視覺系統及言辭系統。言辭系統不只包含口中發出的聲音，還包含寫在紙上的字；而視覺系統最好的例子就是圖形。然而，兩種系統若能結合，則處理問題的能力便可以更具威力。難怪諾貝爾獎得主 Bragg 在其八十歲生日時說：他自己總是先有視覺印象然後才產生新靈感。從這些數學教育專家的言談之中，可見以幾何觀點處理代數問題是很有幫助的，筆者提出這例題便是一例。因此，代數與幾何的結合是很重要的後射思考能力。

筆者近日對這三年來的『指定或聯考試題』作分析，發現九十一年指定考科有關幾何或利用幾何概念可處理的問題佔了 29%；九十年聯考題這種題目佔了 52%；八十九年聯考這種題目佔了 46%。筆者所推定的百分比，可能見仁見智，雖然可能有誤差，但是，我們相信平均而言，與幾何相關或利用幾何可以處理的問題佔 35%~40%是很自然的。這令筆者也深深感到，現今中學教材幾何的份量實在太少了。我希望數學教學家者能正視此一問題，也希望有改善幾何教學的教材出現。平心而論，幾何中的作圖、作法、推論與證明，可以說對學習數學是很重要的訓諫，不知爲何當今編寫數學教材大綱的所謂『專家』，爲何對幾何的內容做如此的取捨？現今的教育『專家』到底在想什麼？筆者想不通！

## 六、理解方式

在 Skemp 書中的理解方式分爲：機械式理解、因果式理解，與邏輯式理解。本書中對此三種理解方式有大略敘述，我們分述如下。

・機械式理解：能夠將硬背的公式、招數應用於特定問題，但不知背後原因、原理。

・因果式理解：知道數學概念的原因、原理，並能自行推理、推廣。

・邏輯式理解：能夠老練地以數學化符號、術語搭配邏輯推理規則，以進行形式化的數學概念證明或推演。

爲了說明這三種不同的理解方式，筆者舉以下例子，來對照三種理解的情形。

例：設二次函數 $f(x)=(x-1.1)^2+(x-1.2)^2+(x-1.3)^2+(x-1.4)^2$

$+(x-8.6)^2+(x-8.7)^2+(x-8.8)^2+(x-8.9)^2$，且當 $x=x_0$ 時，$f(x)$ 有最小值爲 $m$，則 $(x_0,m)$

＝____________________。

（A）機械式理解的學生，可能作以下解答方式。

取 1.1，1.2，1.3，1.4，8.6，8.7，8.8，8.9 的中位數得 5，則 $f(5)=112.6$，故答(5,112.6)。

此答案正確。但學生只記得老師提醒：當遇到這種問題時，便取以上各數之中位數代入，即得最小值。

（B）因果式理解的學生可能作以下解答方式。

將 $f(x)$ 化爲二次函數：

$f(x)=8x^2-2(1.1+1.2+1.3+1.4+8.6+8.7+8.8+8.9)x+D$

$\Rightarrow f(x)=8x^2-80x+D=8(x-5)^2+D-200$，

其中 $D=1.1^2+1.2^2+1.3^2+.14^2+8.6^2+8.7^2+8.8^2+8.9^2$，

故得當 $x=5$ 時，$f(x)$ 有最小值 112.6。

在運用這種解法時，學生一眼看出 $f(x)$ 爲一元二次函數，故經化簡便可以得到，且可求得最小值。可見，他對二次函數、配方、求極値等基本概念皆明白在心理，而可以自行推導得答案。

（C）爲了引進邏輯式理解，我們提出以下例子。

例：求證：$\dfrac{1+\tan\theta-\sec\theta}{1-\tan\theta-\sec\theta}=\tan\theta-\sec\theta$，有學生如此證明：

$1+\tan\theta-\sec\theta=(1-\tan\theta-\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta)$

$1+\tan\theta-\sec\theta=\tan\theta-\tan^2\theta-\tan\theta\sec\theta-\sec\theta+\tan\theta\sec\theta+\sec^2\theta$

$1+\tan\theta-\sec\theta=\tan\theta-\sec\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)$

$1+\tan\theta-\sec\theta=1+\tan\theta-\sec\theta$

故得證。

運用這種證法的學生，筆者承認他已經對三角函數恆等式證明，已有了因果式的理解。因爲，他知道從第一等式到最後等式，其實皆是一樣的意義，而最後一個等式是顯然成立，故原等式得證。看到學生如此解，便可以了解其對等式證明的因果過程皆理解。因此，筆者認爲他已達到因果式理解。但是，他的數學邏輯表達卻有不當之處。如果改寫如下：

此一恆等式與 $1+\tan\theta-\sec\theta=(1-\tan\theta-\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta)$ 同義，故我們只證明後一恆等式就行了。它的右式＝$(1-\tan\theta-\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta)$

$=\tan\theta-\tan^2\theta-\tan\theta\sec\theta-\sec\theta+\tan\theta\sec\theta+\sec^2\theta$

$=\tan\theta-\sec\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)$

$=1+\tan\theta-\sec\theta$=左式

得證。

經過如此修正，整個邏輯語氣才通順，而且符合敘述證明的邏輯思考理解。若學生能接受如此的訓練，便可以得到邏輯式理解的學習目標，而使基模或解題過程能很圓滿地呈現出來。因此，邏輯式理解有一項很重要的誘因，就是來自同儕或師長的批評與建議，如此，方能達到數學完美的邏輯式理解與因果式理解的效應與動力，而達到追求更廣泛、更有力、更一致、更完備的數學知識。

## 七、數學教學的省思

回想起十多年來的數學教學情況，可說是『教學相長』的最佳寫照。在最初教學之時，筆者比較愛教理論，亦即常以定義方式，直接引入數學概念，這種方法最簡捷。但是，學生卻不易了解，易生枯燥之感。因爲，筆者在大學數學系時專業上的訓練，常以定義、性質、引理、定理、推理，一連串的引出數學的概念；因此，剛開始教學之時，亦承襲此一教學方式。後來，筆者日漸了解學生吸收不良的情形，也體會到中學生不比大學數學系的學生。因此，漸漸了解引起動機的重要，而在教學之時，慢慢轉變成以例子爲起頭，引用

日常生活化的例子，來引發學生的學習興趣，然後，再進一步抽象化，而教授一般化的數學概念。經過 Skemp 這本書的啓示，筆者覺得一位好老師至少要具備以下的特質：

- 提出問題，解答問題。
- 體察出學生基模進展的方式，並適時提出適當實物以供參考。
- 幫助學生更深入掌握其所學。
- 逐步減低學生對老師的依賴。
- 培養學生獨立分析事物的能力。
- 教材之選取，以及問題之提出，要合符學生的思考方式。
- 培養學生反映內涵能力及推理綜合能力。
- 確時掌握學生心智自我建設之過程及特徵。

由於 Skemp 的概念啓發，筆者也提議下列一套『數學教學的原則』，筆者覺得它們是一位數學教師至少應該具備的共識：

- 先引起學習動機，以例子爲起頭說明。
- 舉例子要確定學生已經形成例子所應該具備的預先概念。
- 定義不可超過已知的高階概念。
- 以好例子引出定義。
- 對所要教的例子要有充分了解，要有創造力、啓發力。
- 概念結構分析過程中，不可錯一步。
- 先前概念必須回顧複習，使學生隨手可得。
- 引導學生揭開數學的發展結果，並加強學生的數學邏輯思考。
- 加強智慧學習的過程。

這些有關教師特質與教學原則的自我省思，將是往後筆者在數學教學上的重點參考，更是筆者自我期許至少要達成的目標。

## 八、結論

數學教育對筆者而言千頭萬緒，只是從經驗，教學過程，偶而拾獲的一些心得而已。有幸能得到 Skemp 書中的許多啓發，也印證了許多教學過程中所體會的理念與原則。筆者覺得數學教學，應該著重在要求這些數學結果是如何一步一步被揭開、發展出來，以及其來龍去脈的全盤了解，而不只是邏輯推理的說服懷疑者，此外，也不只是教授數學技巧，而不教數學的思考內涵而已。

因此，數學教學爲了簡捷、精確，而直接以定義方式引導學生，對學生而言，這是一種不智之舉。如果能從日常生活經驗中，引進一些美好的例子，加強學生的學習動機，這將是年輕學子之福。

學生學習的包袱，會隨著學習理解方式而不同。機械式理解者將累積無數的數學規則、公式，而包袱日漸加重，以至達到無法負荷的困境。但對因果式及邏輯式理解的學生而言，將可以大幅減輕其包袱的負擔。故此，對學生的教學過程中，時時引導其對數學的理解規定的理由爲何？目的何在？這是一種減輕學生學習包袱的重大關鍵。

我們皆明白分析能力、邏輯論證、社會化思考在數學中是相當重要的學習目標。然而，在此之外，我們更需要有個人的思考、內在的洞察力以及綜合能力。在某種程度上而言，前者較容易教給學生，後者只能靠學生自力開發。可見，學生個人思考、洞察力、綜合能

力的引導不易。所以，我們只能從旁啓發，至於達到何種程度，只有靠學生自己的造化了。

學生的學習是可以啓發的，教師本身的角色扮演也相當重要。原則上，一個教師既要是軍隊中的訓練班長（管理學生），又要是交響樂團的指揮者（以自己的學識風範贏得學生的敬愛），並且必須在這兩個角色之間取得平衡。

在數學教育環環相扣的情形下，筆者也深深體認到：數學是經由層層抽象過濾的高階概念，雖然這些高階概念遠離現實世界，但它們卻反而引領我們接觸宇宙的本質。一旦將這些賦予科學的內涵，就可以得到實際世界中許許多多令人驚異的結論。現今數學教育理論雖然還在蘊育之中，但是，顯然也建立了許多值得參考的理論。期待將來我們對於學生學習內在心智活動及其內在自我建構的探索，能有更進一步的理解。這也是當今許多數學教育專家要探討的中心問題：教學時如何兼顧學習者心智自我建設性的特徵？如何理解學習者內在心智活動的所有過程？

# 推薦 *The Enjoyment of Math*

台師大數學系研究所碩士班畢業 黃哲男老師

書名：The Enjoyment of Math
作者：Hans Rademacher & Otto Toeplitz（英譯者：Herbert Zuckerman）
出版社：Princeton Science Library（1994 年版）
出版年代：1957（第一版）
頁數：205+V
國際書碼：ISBN 0-691-02351-4

在四年多前的某一天，筆者前往誠品台大店挖寶，在眾多科普書籍所成的書堆中意外瞥見*The Enjoyment of Math*，當時筆者本來連拿下翻閱的意願都沒有，因爲類似書名的書籍頗多，而且內容也大同小異，多是介紹一些趣味數學題或是數學謎題等，[1]幸好「不小心」注意到書背上「PRINCETON」字樣，才驚覺這可能是塊寶。果不其然，在這約 200 頁的小書中，涵蓋了 28 個有趣的主題（如附錄），部分內容偏向介紹的性質（如質數數列、四色問題及正多面體等主題）。這些相關的主題在坊間的數學科普中已是常客；另外一部分的內容，則是深入地討論一些有意思的主題，並於書中交代了數學家如何去思考一個問題，以及逐步

推展理論的方法與過程。唯受限於篇幅的關係，作者並未對每一主題的相關內容，做進一步推展的處理，不過，作者還是在部分的主題結尾處，說明了該主題在數學上的意義，以及其擴展之後可以有哪些發展的方向。

在粗略閱讀此書之後，筆者深覺應推介此書給喜愛數學的學生與老師，因此，一方面與同窗好友陳昭蓉老師進行中譯的工作，另一方面，向出版社打探出版的可能性。後來輾轉得知本書之繁體中文版權已名花有主，因此，筆者便與陳老師暫停工作，滿心期待中譯本的出現。

四年多過去了，不是在中譯本上再一次看到*The Enjoyment of Math*，而是在 104 期的《數學傳播》。該期數學傳播刊登了Peter Lax 教授的演講與專訪內容，[2]其中在專訪內容（p. 16）中，Lax教授提到「12 歲時，我開始對數學感到興趣……。之後有一位專業的老師輔導過我，她是一位很好的女數學家，名字是Rózsa Péter；她是邏輯學家，寫過關於遞迴函數的第一本書；她是一位傑出的老師。我們所讀的第一本書是Rademacher-Toeplitz的書，英文書名是 “The Enjoyment of Math”（數學的樂趣），德文原版的書名為 “Von Zahlen und Figuren”（關於數目與圖形）。書內的章節都很短，只有 5、6 頁，對剛開始學習數學的學生是很合適的。即使今日，我仍會推薦這一本書給對數學有興趣的年輕人」。

如同 Lax 教授所說，本書的章節都很短，平均只有 5、6 頁，但有著很多的內容，而且有些內容還有點難度與深度，因此，Lax 所謂的「剛開始學習數學的學生」，可能指的是已經學了一些數學知識的中學生。此外，本書的內容可被歸類於「硬數學」，基本上人類的社會文化活動痕跡在本書中較為罕見，但數學知識本身、數學的結構與逐步擴展、數學家的思維方式等，又是另外一種「樂趣」的來源。因此，如要用本書去引起學生的興趣可能會適得其反，但如果是對於數學非常感興趣的學生，本書的確是一本不可多得的好書，教師帶領著學生一起研讀討論，一定可以產生不少火花。

最後要附註說明一點，由於本書的成書的年代極早（1957），因此，書中部分的內容經過近 50 年來數學家的努力，已有不同的面貌與結果，譬如『四色問題』經過電腦的證明，已經確認為一定理，而費馬最後定理也已經被證實。此外，可能是受限於成書時的印刷製圖能力的不夠精良，本書的圖形較少，亦不夠精美。筆者期待中譯版能增加譯註及附圖的數量，也期待本書的中譯版本，能早日出版以饗讀者。至於想先一睹本書風采的讀者，可得到書局或圖書館挖寶了。[3]

## 註解：

1. 近來坊間倒是出版了許多譯自日本作品的書籍。
2. Peter Lax 教授於 1926 年生於匈牙利。12 歲便對數學產生興趣，並得到家族裡數學家的輔導。15 歲移民美國，17 歲發表個人第一篇數學學術文章。1949 年取得 NYU Courant 研究中心之數學博士，而後擔任該中心之教授，並曾任美國數學會會長。Lax 教授是許多數學領域的重要開創者，譬如在泛函分析中，Lax-Milgram 定理是非對稱型偏微分方程的基本存在定理；在數值分析中，Lax 等價定理是數值偏微分方程的根本定理；在空氣動力學方程的基本差分格式、雙典型守恆律方程、可積系統與孤立子等領域，Lax 教授亦有重大的貢獻（摘自：陳宜良 (2002)，〈Peter Lax 教授小傳〉。《數學傳播》，104，15）。
3. 師大理學院藏有本書。

# 附錄：

1. The sequence of Prime Numbers（質數數列）
2. Traversing Nets of Curves（曲線的運輸網絡）
3. Some Maximum Problems（幾個極大值問題）
4. Incommensurable Segments and Irrational Numbers（不可公度量之線段與無理數）
5. A minimum Property of the Pedal Triangle（垂足三角形的極小值性質）
6. A Second Proof of the Same Minimum Property（(承上)極小值性質的第二個證明）
7. The Theory of Sets（集合論）
8. Some Combinational Problems（幾個組合學的問題）
9. On Waring's Problem（Waring 問題）
10. On Closed Self-Intersecting Curves（封閉自交曲線）
11. Is the Factorization of a number into Prime Factors Unique? （一個數的質因數分解是否唯一？）
12. The Four-Color Problem（四色問題）
13. The Regular Polyhedrons（正多面體）
14. Pythagorean Numbers and Fermat's Theorem（畢氏數與費馬定理）
15. The Theorem of the Arithmetic and Geometric Means（算術與幾何平均定理）
16. The Spanning Circle of a Finite Set of Points（有限點集的生成圓）
17. Approximating irrational Numbers by Means of Rational Numbers（以有理數逼近無理數）
18. Producing Rectilinear Motion by Means of Linkages（以連桿裝置產生直線運動）
19. Perfect Numbers（完全數）
20. Euler's Proof of the Infinitude of the Prime Numbers（質數無窮的 Euler 證法）
21. Fundamental Principles of Maximum Problems（極大值問題的基本原理）
22. The Figure of Greatest Area with a Given Perimeter（定周長之圖形的最大面積）
23. Periodic Decimal Fractions（十進位循環小數）
24. A Characteristic Property of the Circle（圓的特徵性質）
25. Curves of Constant Breadth（固定寬度的曲線）
26. The Indispensability of the Compass for the Constructions of Elementary Geometry（圓規在幾何作圖中之不可缺少性）
27. A Property of the Number 30（數目 30 的性質）
28. An Improved Inequality（一個改進的不等式）

# 中立幾何、面積概念與非歐氏的Ⅲ.36

桃園大園國中 英家銘老師

## 一、導論

歐式幾何最初的五個公設中，最耐人尋味的莫過於有名的「平行公設」了，它說到「同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角和小於兩直角，則若這兩直線經不斷延伸後在這一側相交」。這個公設與其他四個公設和五個公理似乎格格不入，因爲那九個命題似乎都是「顯而易見」的。兩千多年來，許多人嘗試要用另外九個公設 / 公理「證明」平行公設，但任何的證明最後都被發現需要假定一個與平行公設等價的假設。

接下來，就是大家所熟知的故事。德國的高斯 (Gauss, 1777-1855)、匈牙利的波里耶 (Bolyai, 1802-1860) 與俄國的羅巴秋夫斯基 (Lobachevsky, 1793-1856) 三人別獨立地假設平行公設是錯誤的，而發現第一種非歐幾何。在這種幾何中，過直線外一點與此直線不相交的直線將不只一條。我們稱這種幾何爲羅巴秋夫斯基幾何 (Lobachevskian geometry) 或雙曲幾何。

從那個時代開始，幾何就從歐幾里得的世界中被「解放出來」，許多不同的幾何被建立，其中最有名的就是黎曼幾何 (Riemannian geometry)。雖然如此，歐式幾何仍然在中學生學習基礎數學中，佔有了重要地位，而且它似乎也較符合人類感官的直覺。歐式幾何中較爲基本的部分，也就是不涉及平行公設的部分，與雙曲幾何是完全相容的，這些部分被稱爲『中立幾何』(neutral geometry) 或『絕對幾何』(absolute geometry)。

本篇文章改寫自幾何學家 Robin Hartshorne 在《美國數學協會月刊》(*The Mathematical Association of America Monthly*) 110 期所發表的 “Non-Euclidean Ⅲ.36” 一文。該文中將《幾何原本》命題Ⅲ.36（按即第三冊第 36 命題，底下記號仿此）稍微改動之後，證明它在非歐幾何中也會成立，從而，我們可將命題Ⅲ.36 視爲『中立幾何』的一部分。在以下的內容中，我並不會轉述作者的嚴格證明，但是，我會將一些文中用到的非歐幾何與面積等概念加以說明。

## 二、中立幾何與物理世界

中立幾何包含所有從一組嚴謹的平面幾何公設出發、而不須假設或否定平行公設，就可以證出的那些定理。在《幾何原本》中，有許多部份的確可以只用前九個公設 / 公理證出，比如《幾何原本》中的前二十八個命題，其中包含三角形全等定理 SAS (I.4)、SSS (I.8)、ASA (I.26)，以及三角形兩底角相等爲等腰 (I.6) 等基本的定理。而且有趣的是，雖然我們不假設平行公設，但我們仍可證出兩個與平行有關的命題，亦即「若兩直線被一線所截且使一組內錯角相等則兩線平行」(I.27) 與「若兩直線被一線所截且使一組同側內角互補則兩線平行」(I.28)。有些共點定理，如「三角形三內角分角線共點」(參見Ⅳ.4) 可以很輕易的在中立幾何被證明，但其他定理，如「三角形三高共點」則得花一番功夫我們才能確定它也屬於中立幾何。在雙曲幾何中，我們否定平行公設但接受其他歐式幾何的公設。而且，我們可以證明，雙曲幾何中的替代公設與其他歐式公設完全相容，亦即用這個替代公設絕對不會導出與其他公設矛盾的結果，所以，所有中立幾何的內容在雙曲幾何中也會成立，我想這也是中立幾何被稱爲「中立」或「絕對」的原因。

在歐式幾何中過線外一點洽可作一條平行線，在雙曲幾何中過線外一點則可作超過一條的平行線，所以很自然地，我們會想到第三種幾何。這種幾何接受所有平行公設以外的歐式公設，且加上一條公設：「過直線外一點無法作一直線不與原直線相交」。然而，我們可以輕易地證明，這條公設與某些中立幾何的結果是矛盾的，比如前述的 I.27。為了要得到一組相容的公設，其他的歐式公設必須被改動，再從新公設出發建立一套幾何，這個與雙曲幾何不同的非歐幾何後來被稱為 Riemannian 幾何或橢圓幾何。

對於許多剛接觸非歐幾何的學生而言，他們常會提出的疑問是：「到底哪一種幾何才是真的呢？」當然，他們的意思是：「哪一種幾何才能適當地描述我們所在的物理世界呢？」撇開需要許多拓樸學理論的量子世界不談，即使只以人類感官的尺度來看這個宇宙，這個問題也沒有直接了當的答案。歐式、雙曲與橢圓幾何在某種程度來說都可以同樣良好地描述我們的物理空間，它們也都沒有與自然定律明顯相違背的結果。如果我們把這個問題看成物理的問題而去做實驗求證，這個問題仍然沒有被解決。在歐式幾何中三角形內角和為 180 度，而雙曲與橢圓幾何分別是不足與超過 180 度。Gauss 本人曾測量三座山峰所形成的三角形內角和，但求得的內角和與 180 度的差距都在儀器測量的誤差範圍之內。筆者記憶中曾讀過一篇報導，現代天文學家曾試圖測量恆星所形成的這種大三角形的內角和，結果仍是相同。我們不知道這個問題是否會被解決，所以我們其實應該考慮的不是「最真實」的幾何，而是「最方便」的幾何。顯然地，在我們的經驗中，歐式幾何在學習上與應用上仍然是最容易的。

## 三、歐式幾何中的面積概念

大概所有對歷史稍有認識的數學教師在教授幾何時，都會提到 “geometry”這個字的字源：土地測量。古希臘著名史家 Herodotus 認為埃及每年因尼羅河氾濫而需要的土地測量是希臘幾何的起源。在考古證據中，我們也發現到許多古埃及人所了解的面積公式，有些是近似公式，如圓面積為(256/81) $r^2$ ，有些是正確公式，如三角形面積為底高積之半。無論如何，這些公式都把一個圖形的面積計算成一個數字。如果我們接受 Herodotus 的說法，我們就被迫問一個問題，為什麼在歐幾里得的《幾何原本》中，沒有任何一個將圖形計算成數值的面積公式呢？

在台灣，我們從小學就教學生接受一個公式：長方形面積為長寬之積。若我們定義邊長為一的正方形面積是一平方單位，則這個公式在長寬都是整數單位長時明顯成立。假使長寬皆為有理數，也不難證明。若一矩形長寬分別為 $n/m$ 與 $q/p$ ，其中 $m$、$n$、$p$ 與 $q$ 為整數，則我們可以將「單位長」再細分為 $mp$ 等份，如此長寬分別成為 $np$ 與 $mq$ 個小單位長，長寬化為整數後，可得矩形面積為 $mnpq$ 平方小單位，既然原先一平方單位變成 $(mp)^2$ 個小平方單位，我們知道矩形面積為 $mnpq/(mp)^2 = nq/mp$ 平方單位，此即長與寬之積。然而，當我們在國中引進無理數的概念時，我們並沒有去「證明」這個矩形面積公式在邊長是無理數時也會成立，筆者不曾看過類似的證明，我也很懷疑這個證明是否存在。美國在五零年代由 SMSG (School Mathematics Study Group) 所撰寫的數學教材（台灣稱之為「新數學」）中，關於歐式幾何的公設二十就是長方形面積為長與寬之積，所以，沒有上述問題。在台灣，可能我們比較不強調嚴密性，而重視引發學生對數學的興趣與實用性（當然，某些數學教師也認為幫助學生升學也是數學的實用性之一，如果這不是唯一的實用性），所以，我們沒有特別用公設說明這件事。

現代幾何理論中，我們必須先定義一個有序交換群 (ordered abelian group) $G$ 以及一個

由歐式平面幾何圖形所成的集合映至 $G$ 的面積測量函數。再經由一番努力之後，我們才能證明三角形的面積爲底高積之半（不是長方形公式！)，由此再去證明其他所有的面積公式，建立起嚴密的面積理論。對此有興趣的讀者，可參閱 Hartshorne (2000)。

筆者對歐幾里得的了解其實很少，所以，我不敢幫他回答爲何他不在《幾何原本》中給出面積公式的問題。我只能猜想，以《幾何原本》對嚴密性的講究，可能歐幾里得認爲當時希臘所累積的幾何知識，還不適合發展嚴密的面積測量理論，所以，他才不提。如此的先見之明，在他把平行公設加入幾何原本這件事上，就已經可以看出。當然，這只是猜想，僅供參考。

下面，我們將要提到的《幾何原本》命題Ⅲ.36，牽涉到面積相等的問題，既然《幾何原本》中不用數值代表面積，我們就必須去了解《幾何原本》中如何說明兩個幾何圖形面積相等。歐幾里得本人從未定義何謂面積相等，但若我們仔細推敲《幾何原本》第一冊的內容，我們可以了解以下的涵義。兩個平面圖形 $P$、$Q$ 是「可等分解的」 (equidecomposable) 如果我們可以將 $P$ 分割成有限多個三角形，再將這些三角形組合成 $Q$。兩圖形 $P$、$Q$ (歐式)「面積相等」如果存在第三個圖形 $R$ 使得 $P+R$ 與 $Q+R$ 是可相等分割的（這裡的「+」代表不重疊的聯集）。希爾伯特 (David Hilbert) 在他的《幾何學基礎》(Foundations of Geometry) 中，證明了上述的「面積相等」是一個平面圖形的等價關係，對面積而言這是十分自然的性質。在這裡，讀者可能又要問一個問題，可等分解性與（歐式）面積相等這兩者有何不同？很明顯地，若兩圖形是可等分解的則它們面積相等，因爲我們可以取第三個圖形爲三角形。反過來不一定會成立，而反例會存在於「非阿基米德」(non-Archimedean) 的幾何中。有名的『阿基米德公理』是這麼說的：給定線段 $AB$ 與 $CD$，必定存在自然數 $n$ 使得 $n$ 個 $AB$ 相加後會大於 $CD$。這個公理與歐式幾何所有的公理或公設相互獨立。《幾何原本》第五冊關於比例理論中，這個公理雖沒有被事先說明但卻被使用。我們的確很難想像非阿基米德的世界，但這樣的幾何系統卻是可以被造出來的。關於非阿基米德幾何與上述反例，讀者仍然可參閱 Hartshorne (2000)。

## 四、『中立幾何』中的Ⅲ.36

《幾何原本》第三冊命題 36 (III. 36) 是這麼說的：若 $P$ 爲圓外一點，$PA$ 爲切線且 $PBC$ 爲割線，其中 $A$、$B$ 與 $C$ 在圓上，則 $PA^2 = PB \cdot PC$ 。我們可以用兩種方法來理解這個命題。在第三冊中，歐幾里得將 $PA^2$ 視爲邊長是 $PA$ 的正方形， $PB \cdot PC$ 視爲長寬爲 $PB$ 和 $PC$ 的長方形，等號則視爲上述的面積相等。歐幾里得對Ⅲ.36 的證明，是使用了畢氏定理 (I.47)，以及第二冊中許多的結果。另一種理解Ⅲ.36 的方法，是將我們的平面視爲佈於一個體 $F$ 的笛卡兒平面。那麼 $PA$、$PB$ 和 $PC$ 可視爲線段的長度，是 $F$ 中的元素，且 $PA^2 = PB \cdot PC$ 就成爲 $F$ 中的運算。這種形式的Ⅲ.36 可以很輕易地用相似三角形證出。

這兩種Ⅲ.36 的解讀方法，可以用前一節所提到的面積測量函數連結起來。我們現在對此平面上每個圖形 $P$ 給予一個 F 中的元素 $\alpha(P)$ ，稱爲 $P$ 的「面積」。我們可證明兩圖形 $P$、$Q$（歐式）面積相等若且唯若 $\alpha(P) = \alpha(Q)$ 。前一節提到面積測量函數測出的三角形面積是底高積之半，故長方形面積爲長寬之積。所以，兩種解讀方法是等價的。(哈哈！繞了好大一圈，所有的面積公式計算又回到小學生的直覺了。)

現在我們開始大略說明 Hartshorne 如何將Ⅲ.36 納入中立幾何的證明。在非歐幾何中沒有長方形（因爲三角形內角和不等於兩直角和！)，所以，我們必須把Ⅲ.36 的內容稍加修飾，

使它在中立幾何中有意義。我們定義平面上一個四邊形是「半長方形」(semi-rectangle)，若它的兩雙對邊相等且至少有一內角是直角。我們可以立即證出：直角的對角也是直角，而且其餘兩內角相等（使用 SSS 全等性質）。若他的四邊相等，我們稱之爲半方形 (semi-square)。請注意：給定兩線段 $a$、$b$，我們可以得到唯一的以 $a$、$b$ 爲兩股的直角三角形（歐式與非歐幾何皆然），接著，我們將兩個這樣的三角形從斜邊黏合，我們便可得到唯一的一個半長方形。

我們已知在歐式平面上Ⅲ.36 會成立。在橢圓與雙曲幾何中，有一個與歐式幾何十分不同的特性。歐式幾何的角度是絕對的，長度則是相對的，隨單位長而異；橢圓與雙曲幾何的長度和角度都是絕對的，且我們可以證明：三角形內角和與兩直角的差，都可作爲面積函數的一種度量。作者借用雙曲幾何的 Poincarè 模型與橢圓幾何的球面模型，以及以角度所作出的面積測量函數，證明在雙曲與橢圓幾何中Ⅲ.36 都會成立。詳細證明請讀者參閱原期刊論文。

許多歐式幾何的命題，可能在非歐幾何中也有類似的定理，但證明可能得費一番功夫，本文的主角即是。

## 參考資料

趙文敏 (1992).《幾何學概論》，台北：九章出版社.

Eves, H. (1966). *A Survey of Geometry.* Boston：Allyn and Bacon.

Eves, H. (1975). *An Introduction to the History of Mathematics* ($4^{th}$ ed). New York：Holt, Rinehart and Winston.

Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond.* New York：Springer-Verlag.

Hartshorne, R. (2003). “Non-Euclidean Ⅲ.36”, *The Mathematical Association of America Monthly* 110：495-502

Wallace, E. C., West, S. F. (1998). *Roads to Geometry.* New Jersey：Prentice Hall.

# 宜蘭縣首屆 Super 教師高中職得獎心得

蘭陽女中 陳敏皓老師

美國黑人赫蕾貝莉（Barry）是第一位奪得奧斯卡（Oscar）最佳女主角的女影星，她在得獎感言時說：「我的得獎是證明所有黑人都有機會得獎，我要將榮耀與所有黑人朋友分享。」我想我的得獎也代表蘭女教學團隊的卓著貢獻，他（她）們的無私努力付出，不計任何代價與時間的投入，對孩子們的循循善誘，都是令我十分感動的。同事間的相互分享教學心得，也讓我學習到師範大學所學不到的實務經驗，我真的由衷的感謝他（她）們：沒有您們的教導，我絕不可能得獎。我也就是在如此優質的工作環境下深受影響，我暗地告訴自己我一定要多努力，絕對要用心，因為每位學生的成長過程只有一次，絕對不可以誤人子弟。如此信念一直支持我對教學的完全投入，我絲毫不敢浪費教學的每一分鐘。我關心所有我教導的學生，現在她們是我的學生，畢業之後就是我的好朋友。這種亦師亦友的關係，是我增廣人生見聞的好途徑。

回首我的求學經驗與教學過程，除了爸爸、媽媽、美雲的不斷幫忙與鼓勵外，需要感謝的老師與朋友真的太多了。因為時間與篇幅有限，我將分四個階段呈現：（1）求學過程─郭朝安老師；（2）在羅東國中的教學經驗─王甄萍老師；（3）研究所期間─洪萬生教授；（4）在蘭陽女中的教學經驗─蔡玫玲老師與賴品方老師。

## （1）求學過程─郭朝安老師

郭朝安老師是蘭陽地區盛名遠播的英文老師，他不僅在英文造詣十分深入，同時，對於學生的學習都抱持用心關懷的態度，至今仍令我十分難忘。此外，老師的上課總是笑聲不斷，老師的說、學、逗、唱功力俱佳，但是，在過程中又他卻又適時地補充英文的課外知識，讓我在學習英文的過程十分得心應手，也感覺到學習英文真的是一件快樂且有趣的事，直到現在我能從容閱讀原文書，都是拜老師不斷鼓勵之賜。郭老師除了影響我求學態度外，更在我面臨到許多重大人生抉擇時，適時提供我意見與看法。例如：當年（民國 79 年）大學選填志願時，他就非常鼓勵我念師範大學，因為他覺得當老師是一個很幸福的職業，可以天天與孩子們相處，與他（她）們一同成長與學習，看著孩子成長茁壯，心中的喜悅是筆墨所難形容的；關懷學生，並讓學生感受到人間有愛的感動，社會才有祥和的環境，如此種種原因，都是我決定努力奉獻的強大動機。另有一點是鮮人所知的，老師不僅是我的恩師，更是我的媒人，我與美雲的認識到結婚，都是老師、師母與其愛女康凌所促成的，所以，我非常謝謝他（她）們的熱心，吾女蘭心滿月時，他們還特地到醫院探視，倍感老師的用心。

## （2）在羅東國中的教學經驗─王甄萍老師

台灣師範大學畢業後分發到宜蘭縣立羅東國中，我永遠忘不了報到的第一天，六個女老師圍繞在我身邊，用心教導我如何帶好班級、如何訂定班級規範。她們擔心我會被學生捉弄，個別教我幾招獨門秘方，希望讓學生看到我就覺得老師並不是菜鳥好欺侮，這些身經百戰的女老師各雌霸一方，面對活潑的國中生，往往能將班級治理的有條不紊，我相當佩服他們，這就是所謂：「六娘教子」。其中的一娘，後來成為我的乾媽就是王甄萍老師。她是一位非常有正義感的老師，並且熱心公益，對於學校中的大小事，只要她有空他一定全力以赴的幫忙，這種大我無私的精神影響我很大。我在蘭園教書時，一直以「不怕事、多做事」為處理一切

事物的準則。乾媽同時帶領我參加由宜蘭縣政府所舉辦的國際名校划船邀請賽（1997、1998年），這兩年的工作經驗讓我學習頗豐，不管在應、對、進、退方面都更加嫻熟，處理問題的方式也漸趨圓融。雖然她目前已經退休了，但是，仍在音樂廳、文化局、戲劇館擔任文化志工，也參加許多讀書會，真是值得後生晚輩學習的最佳典範。

### （3）研究所期間－洪萬生教授

有人曾經問過我：「爲什麼你當老師後，還需要去進修？」我想我是一直在尋找一位值得永遠學習的學術大師。第一次上洪教授數學史的課後，就深深被老師的博學多聞所吸引，於是在老師不嫌棄下，請求他擔任我的論文指導教授。從小到大能夠讓我如此佩服大概就数洪萬生教授一人，他除了是數學史的巨人外，他的筆觸優美雋永，總是能令讀者動容，同時，他的人文關懷更是一般學數學所缺乏，他對學生總是非常有耐心，慢慢爲學生修正所寫的文章與論文，同時，因爲洪老師涉獵極廣，總能夠在很短暫的時間內，提供學生所需要的課外資料。此外，老師由於著作頗豐，在國際數學史界享有盛名，他也積極鼓勵我們參與國際學術活動，例如：去年在天津師範大學舉辦的國際學術研討會，很幸運能跟隨老師去看「世面」，明年在瑞典所舉辦國際 HPM 會議，若有機會仍願意跟隨老師前往。洪萬生教授爲很多國內數學界後生晚輩開了一扇窗，有了他的領導，相信未來的教學路上不但不會沒有方向，反而會有許多志同道合的夥伴相隨。

### （4）在蘭陽女中的教學經驗－蔡玫玲老師與賴品方老師

最後提及兩位蘭女優秀老師，亦即蔡玫玲老師與賴品方老師。在她們兩位不斷地鼓勵下，我才提起勇氣報名參選這次宜蘭 Super 教師獎。在報名的過程中，玫玲老師爲我寫了一份推薦書，她寫的文情並茂，很能感動人，我想我之所以能得獎，她是居功厥偉的。而品方老師總是適時地鼓勵我，不斷提升我的自信心，當有評審老師來訪時，她總是能夠將我形容成 Super 教師所具備的人格特質，她的口才極佳，在蘭園中她的熱心爲學校帶來許多活力。最後，在拍攝影帶時，他們兩位完全不辭辛勞般爲我的同事、學生拍攝與剪輯，她們兩位才是我心目中「超級 Super 教師」。爲了我的出線而她們自己退居到第二線，真的太令人佩服了！最後，言及學校成立教師會兩年了，在她們兩位的大力奔走下，從無到有、從少數會員到多數會員，主要的原因，就是她們兩位完全沒有私心，完全投入、完全奉獻，校內的所有老師都被她們兩位所感動，教師會完全站在協助學校的立場下做事，絕不是跟學校搞對抗的，而是做學校的最佳後盾。能與兩位共事，實在是我的福氣！也是所有蘭園同事的福氣！

總之，我從來沒有想過自己會得任何獎項，只是一直擔心有沒有把工作做好。得獎的好處，在於可以深刻反省自己的過去的學習經驗。人們往往一味地往前看、往前衝，卻忘記在追求事業成就的過程中，如何適時適地的反思自己，曾子說「吾日三省吾身」，真的是一句非常深刻的話。過去，我受到許多師長與朋友的幫助，透過反省與回想之後，真的有助我釐清我未來的教學方向。如今是自己可以回饋的時候，我將在工作崗位上更投入，更用心與其他教師們學習。我要向我的學生保證：老師得獎後如同充電一般，將更有活力、更有衝勁！

論文摘要

# 十九世紀西洋數學在東亞的傳播

東京大學大學院總合文化研究科廣域科學專攻相關基礎科學系
博士課程一年　李佳嬅

對於西洋數學在十九世紀東亞的傳播的問題，本論文著眼於數學史上造成數學知識的移動可能性之途徑—「翻譯」。主要內容針對近代西洋數學教科書經過翻譯,如何傳播並影響至十九世紀東亞的中國和日本做一探討。

在十八世紀的西歐,代數學、解析幾何學、微積分學等數學學科的出版物，主要是由 Euler, Lagrange 等人，將比起學問的論理的整合性,更重視結果的研究成果呈現在世人眼前。然而，在法國大革命後的十八世紀末到十九世紀初，隨著巴黎綜合工科學校 (Ecole Polytechnique) 的創立開始，發生了由美國數學史家 Carl. B. Boyer 所刻劃的「解析革命」 (Analytical Revolution) － 這一數學史上的事件。至此，以歐幾里得直觀的幾何學爲中心的數學諸學科,經過法國數學家 Monge、Lacroix、Cauchy 等人的努力下,建立起導向非直觀的十九世紀數學的體系化之輪廓 3A－算術 (Arithmetic)、代數 (Algebra)、(無限小) 解析學 ((Infinitesimal) Analysis)－更捲起了代數學,解析幾何學,微分積分學等教科書的出版書革命(Textbook Revolution) 風潮，甚至將它吹向英、美、德等國，進而形成當時以巴黎綜合工科學校的教育方針及數學課程爲首的數學教育改革。

十九世紀中葉以後，隨著外國人傳教士來華，「解析革命」後的近代西方數學知識也開始被介紹到中國。特別是其中三本符合３A 體系的數學教科書－由英國的基督教傳教士偉烈亞力 (Alexander Wylie) 所著的《數學啓蒙》(1853) 以及偉烈亞力口譯・中國數學家李善蘭筆述的《代數學》與《代微積拾級》(1859) — 可視爲最佳的例子。同時期與中國往來頻繁的日本正值幕末・後來，明治初期的日本也在 1862 年從上海購入，而後由日本的數學家將以上三本中譯數學教科書，分別製作成『手抄寫本』、『和刻校正本』、『日譯書』、『改編本』等版本問世（附表）。至此,「解析革命」後的近代西方數學知識系統化的傳入東亞的中國和日本得一確認。

本論文進一步地以《代數學》與《代微積拾級》爲例，將其英、中、日三種版本做對照比較，並分析原本和譯本及改編版所呈現的差異。如在《代數學》的英文原本裡狄摩更 (Augustus De Morgan) 對于各章節中詳細的註解，以及涉獵數學史內容的說明，在漢譯本中盡被刪去。雖然原本的內容表現和編排風格仍保留了下來，但做爲一本代數學教科書，原作者狄摩更對於數學教育的堅持和努力，卻沒有在中譯本中被呈現。而『日刻校正本』的內容，則是與中譯本一致。不同的，只在於序文中的外國人名旁邊有橫向書寫的英文字母拼音，以及因爲便於日本讀者了解而加註的訓點符號。另外，比起理論說明較重於計算方法的《代微積拾級》的英文原本內容，在李善蘭巧妙地譯出許多新數學用語之下，呈現出毫不遜色的中譯本來，並在傳至日本後成爲傳統和算家和一些改革派數學家用來學習微積分的教科書，同時，日本數學家也將中譯本裡的錯誤訂正，或改中式數學符號爲現代數學符號後再出版。

値得一提的是，中譯本裡的翻譯數學用語在經過日譯本的介紹，更成爲明治維新後的「日本數學會社譯語會」的參考來源之一。根據筆者在《東京數學會社雜誌》第四十三號（明治十五年 (1882) 一月十四日發行) 的〈譯語會記事〉中，找到「Algebra」的譯語決定採納中

譯的「代數學」用語之經過記錄，並發現在隨後發行的雜誌四十七號中，有日文翻譯中譯本《代數學》裡偉烈亞力序文的部份引文，其目的是爲了介紹代數學的歷史由來。 而中譯本《代微積拾級》裡的數學翻譯用語，如「懸鏈線」、「輭腰線」等，也在該雜誌第四十一號裡的一篇介紹「曲線説」的文中出現。由此和其他更多實例可見，這兩部中譯數學教科書和其日譯本，也引起了當時許多日本數學家的注意。

最後，筆者將擔任以上中日文翻譯出版的數學家之學術背景做分組的比較，找出他們的關連性及異同之處，以便於了解這些譯者對當時數學知識傳播和數學教育上的貢獻和影響。尤其是在傳統數學同樣遭遇西方數學的挑戰時，日本比中國更早選擇了放棄傳統走向全面西化一途的現象，亦在日本數學家很快脫離依賴中譯本，而直接參考西文原著進行製作翻譯教科書的趨勢上，看出此一演變。

**〈附表〉《代數學》與《代微積拾級》的傳播過程**

圖１ 《代數學》

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 英國 | | 中國 | | 日本 |
| Augustus De Morgan | → | Alexander Wylie,李善蘭 | → | 塚本明毅 |
| *Elements of Algebra* | | 代數學 | | 代數學 (訓點版) |
| (1835) | | (1859) | | (1872) |

圖 2 《代微積拾級》

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 美國 | | 中國 | | 日本 |
| Elias Loomis | → | Alexander Wylie、李善蘭 | → | 神田孝平 |
| | | | | 代微積拾級 (手抄寫本) |
| *Elements of* | | | | (元治元年-慶應元年,1864-1865) |
| *Analytical Geometry* | | 代微積拾級 | | 大村一秀 |
| *and of* | | (1859) | | 代微積拾級(完整版) |
| *the Differential and Integral Calculus* | | | | （年代不明） |
| (1835) | | | | 福田半 |
| | | | | 代微積拾級譯解 (改訂版) |
| | | | | (明治五年, 1872) |

# 碩士課程畢業感想文

東京大學大學院總合文化研究科廣域科學專攻相關基礎科學系
博士課程一年　李佳嬅

身處在離東京涉谷不到 15 分鐘步行時間的一個只有 12 平方公尺未滿的狹小空間裡，視線所及之處盡是書、資料，再加上整理得毫無秩序可言的各式各樣紙張，這就是我完成碩士論文的地方－兼生活起居的容身之處。由於書桌的空間不夠，就落在椅子後方的床上依次排著：我的碩士論文 (提交給學校的黑色 A4 Size)，被質感很不錯且上面刻印了東大校徽的寶藍色夾子放著的學位證書 (比起 A3 Size 再微妙地小一些)，還有松下電器頒的獎學生學業修了證書 (高雅的黑色燙金 A4 Size)。這些東西，就是我三年赴日求學告一段落的證明吧?！

能夠這樣順利的完成三年的碩士課程，真的是有很多的機會和好運同時降臨的緣故。回想起三年多前，一次偶然的機會參加松下獎學金的甄試開始，我就一直幸運地得到很多可說是貴人的幫助。母校台灣師大數學系的教授林福來老師和洪萬生老師，給予許多寶貴的建議以及最大的支持和鼓勵。還有，來自台灣松下電器人事經理與日本松下獎學金事務局的關心和照顧，讓我能在日本過著專心向學無後顧之憂的生活。並在來到東京大學大學院的科學史・科學哲學研究室當研究生起，論文指導教授佐佐木力老師和其他科哲的老師，以及研究室裡的學長姐們，大家都很關照我、鼓勵我的態度，讓我這個剛面對適應新環境的問題、和接踵而來的入學考試的台灣留學生，真的只能用非常感動和感激來形容。

決定嘗試挑戰數學史的領域和大四那年修了洪萬生老師的數學史課，以及自己同時對數學和歷史抱持興趣有密切關係。來日後，在這個可以接觸到西洋數學史、中國數學史、日本數學史、印度數學史等多方面領域的環境裡，享受到學習如何利用並吸收豐富知識資源的幸福時光。而碩士論文『十九世紀西洋數學在東亞的傳播』，就是在這樣的環境中被啓發誕生的。其中仍感到不可思議的是，從拜讀了洪老師送給我的 1991 年博士論文，與佐佐木力老師討論研究方向時蒙發的想法爲契機，我開始對十九世紀的東西方數學史產生興趣。經過約兩年在日本和英美收集資料後，就決定以傳播這主題爲軸，將法國大革命後十九世紀的西方數學史，和當時東亞中心的中國和日本數學史的關係，嘗試在論文中以舉例和比較的方式，做一個完整的連結。整個構想中，也有來自東大人文社會研究科東亞思想研究研究室的川原秀城老師，和該研究室的博士班學長的批評和意見。最後，能以不是母語的日文將論文完成，還要特別感謝我的指導老師和研究室的博士班學長幫忙耐心看稿、潤飾，文章才能最後告成。

最後，還有太多無法一一道盡的感激—在台灣、日本以及美國的同學、朋友、和家人—想在這裡致上最深的謝意。在日本留學所度過的這三年，會永遠是我今生寶貴而美好的回憶。我-畢・業・了!

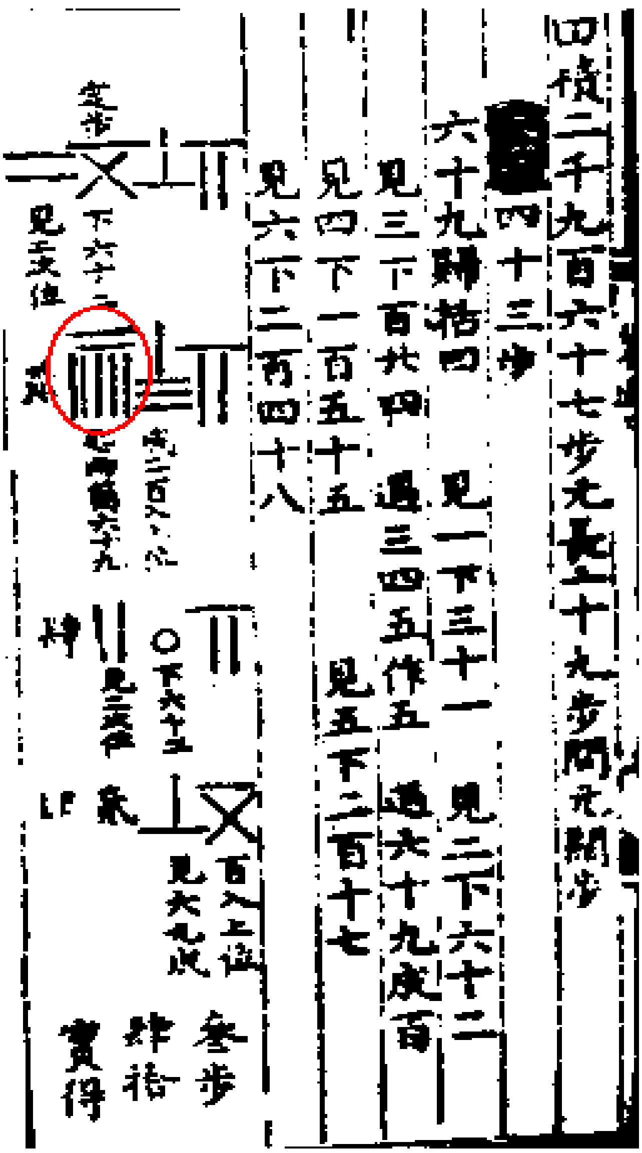
# 何以算書重乘除而輕加減？

桃園縣青溪國中 王文珮老師

在中國古代算書中，從《孫子算經》到《楊輝算法》中的〈習算綱目〉，在數目的運算上，對於加、減法著墨不多，甚至不提，但乘、除法的各式捷算法，則成爲了各家重頭戲。但在《算法統宗》第一卷中，在提出乘、除法之前的「九九八十一，便蒙通用」時，就詳列一至九的珠算加法口訣。

從籌算的角度來看，數目的加減法在計算過程中，只要依按加數的值，對著相對的位值將算籌一根根地加在被加數之上，當位值的數滿十時便向高位數進位即可。在楊輝《乘除通變本末》中卷，甚至在計算過程中，出現了未進位的情況，譬如附圖中紅色圈選處，15 出現在同一個位值上。但是，以算盤爲計算工具時，就必然要產生進位的動作，因爲在一個位值上的上珠和下珠的數量是受到限制。

從上列證據顯示，在籌算中的加、減法運算，要比珠算來得自然許多，而珠算的加、減法，可就需要口訣的協助和演練了。



1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至　suhy@mail.topspeed.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhy@mail.topspeed.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：
   http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡：

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本東京市：李佳嬅（東京大學）
台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、蘇意雯、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中） 蘇俊鴻、陳啟文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中） 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中） 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 林裕意（開平中學）
台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高中） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 吳建任（樹林中學）
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 葉吉海（內壢國中） 洪宜亭（內壢高中） 鐘啓哲（平南國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中）
新竹縣：洪誌陽、李俊坤（新竹高中） 陳慧琦、陳瑩琪（竹北高中） 洪正川（新竹高商）
苗栗縣：陳冠良（致民國中）
台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（大里高中）
台中市：阮錫琦（西苑高中）
台南縣：謝三福（新化高中） 李建宗（北門高工）
高雄市：廖惠儀（大仁國中） 楊瓊茹（三民高中實習）
金門：楊玉星（金城中學）
馬祖：王連發（馬祖高中）