

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生）林旻志（台師大數學系研究生）陳啓文（中山女高）彭良禎（麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 以 HPM 為鑑：數學史可以從 HPM 學到什麼？
- 《九章術解》卷五校勘
- 《九章術解》卷六校勘
- 「數學教育研究方法研習營」後記
- 【數學教育研究方法研習營】後記
- 《為甚麼要學習數學？》讀後感

以 HPM 為鑑：數學史可以從 HPM 學到什麼？

台師大學數學系 洪萬生教授

有關代數學史的發展歷程，十九世紀末德國史家 Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann (1811-1881) 曾經提出一個『三階段說』，亦即：文辭代數 (rhetoric algebra)、簡字代數 (syncopated algebra) 與符號代數 (symbolic algebra)，並以此來刻畫西方代數學（含阿拉伯數學）的發展風貌。誠然，從古埃及與巴比倫的文辭代數，經古希臘戴奧弗多斯 (Diophantos, 第二世紀) 的簡字代數，而發展到十六世紀韋達 (F. Vieta) 的符號代數，終於大功告成。其中九世紀的阿拉伯人，乃至於十六世紀的義大利卡丹諾 (G. Cardano) 再怎麼有貢獻，由於都只是表現了文辭代數，所以當然算是作了鋪路的工作而已。

這種階段說的迷人之處，其實正呼應了西方學界的進步史觀，顯然，它也反映了一種要跟『落伍的』過去文明劃分界線的決絕態度。一旦承認了代數符號法則 (symbolism) 的進步性乃至於優越性，那麼，評論一個文明的數學成就，往往就成了測量它距離符號法則有多遠的工作了。這種通稱為『輝格式』(Whiggish) 史學研究的進路，在幫助我們瞭解古代數學文本時，固然有它的必要性，但是，過渡糾纏的結果，卻很容易簡化歷史演化的錯綜複雜現象，而忽略了數學發展的『在地意義』(meaning in context) 了。事實上，即使史家能夠警覺此一『三階段說』的解釋限制，譬如中國數學史大師錢寶琮，曾注意到中國宋元『天元術』與此說的格格不入，而將天元術刻劃為一種『器械代數學』。然而，錢寶琮之論儘管已經照顧到了中國脈絡，但是，頂多只是點出此說不適用於東方數學傳統罷了。

一九七〇年代以來，由於數學社會史 (social history of mathematics) 的蔚為風潮，所以，這一類不顧脈絡的『階段說』，在數學史家社群中遂逐漸失寵，他們好像認為只要不理會它就行了。儘管如此，數學教育家如鼎鼎大名的 Anna Sfard，在研究數學概念的對偶性格時，卻仍然引述了這種『三階段說』，此說之魅力由此可見。

最近，荷蘭 Utrecht 大學的 Freudenthal 研究所之新科博士 Barbara van Amerom，在她的博士論文中，引述了 Luis Radford 的觀點，而認為『簡字代數』不能成為代數學發展的一個中繼階段，充其量它只是一種技術性的權宜之計罷了。Radford 從社會文化的觀點來看，他發現在歷史上書寫與印刷的技術限制，相當自然地導致了文字的縮簡。因此，Van Amerom 指出：學生的記號之進步性形式化 (progressive formalization of notation) 是否伴隨著（歷史上）數學抽象化的過程 (process of abstraction)，還有待深入研究。無論如何，她的觀察提醒

我們，十九世紀末以降數學史研究中一些相當樸素的觀點或結論，在現代的數學教育與認知科學的映照下，必須大幅度修訂甚至於徹底地揚棄。這正是數學史家可以從 HPM 甚至於數學教育學習到的啓示。

附記：感謝 Barbara van Amerom 惠贈她的博士論文，我們才有更豐富的 HPM 文獻！

參考文獻

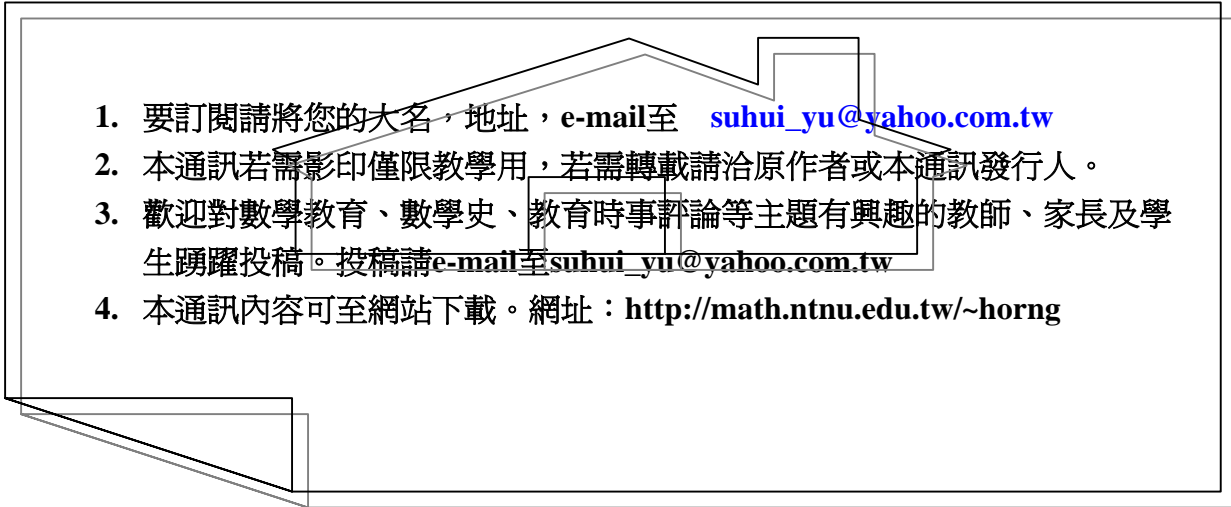
Dauben, Joseph W., Christoph J. Scriba eds., (2002). *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*. Basel / Boston / Berlin: Birkhause Verlag.

Klein, Jacob (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*. New York: Dover Publications, Inc.

Radford, Ruis (1997). "Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics", *For the Learning of Mathematics* 17 (1): 26-33.

Sfard, Anna (1991). "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Process and Objects as Different Sides of the Same Coin", *Educational Studies in Mathematics* 22: 1-36.

Van Amerom, Barbara A. (2002). *Reinvention of Early Algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Dordrecht: Thesis Utrecht University.

- 
1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
 2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
 3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
 4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

《九章術解》卷五校勘

台師大數學系碩士班 楊瓊茹

第一節 導論

《九章算術》卷五「商功」二字，劉徽注：「以御功程積實也」；李籍《九章算術音義》：「商，度也。以度其功庸，故曰商功。」兩者都是指工程中體積計算的意思。¹綜觀『商功章』，其主要內容是在討論立體體積、工程分配以及委粟數量的問題，總共二十八個問題。在中國數學史上，劉徽的注解提供後世對九章題術更進一步的瞭解。在韓國這一方面，《九章算術》則由南秉吉作注解，即《九章術解》。然而，南秉吉究竟對中國《九章算術》中數學知識的認知與瞭解是如何？本文試圖從南秉吉的注解與劉徽對比來回答此一問題。另外，南秉吉注解所依據的《九章算術》為哪一版本？針對此疑問，本文的第一部份先給予底本的探討。其次，討論南秉吉注解的特色，最後則是對南秉吉注解的評價。經由《九章術解》的探究，我們對南秉吉的數學素養有初步了解。

第二節 底本探討

既然我們要釐清南秉吉注解所依據的《九章算術》之底本為何，筆者盡可能地搜羅現存的《九章算術》各個版本來作比較，其中包括有南宋鮑澣之的《九章算術》刻本、戴震校勘的武英殿聚珍版《九章算術》、《四庫全書》中的文淵閣本《九章算術》、孔繼涵刻入微波榭本的《九章算術》以及李潢的《九章算術細草圖說》(1820)，總共五種(以下各書分別簡稱爲南宋本、武英殿聚珍本、文淵閣四庫本、微波榭本以及李潢本)。²底下分爲題目順序及單一文字兩方面進行比較。

1. 題目順序：首先，筆者將手上關於《九章算術》的文本，取各題的關鍵字將題目編號(以南秉吉《九章術解》的編排順序爲基準)，以比較各版本題目呈現的先後順序。對比的結果，我們發現『微波榭本』、『南宋本』以及『李潢本』這三者和《九章術解》題目及術文的編排順序是一致的：

穿地題、城垣堤溝壑渠術、城垣隄題、冬程人功題、冬程人功術、溝題……委菽依垣題、委米依垣內角題、穿地下廣題……。

另一方面，『武英殿聚珍本』及『文淵閣四庫本』之題目及術文的編排順序則如下：

穿地題、穿地下廣題、城垣隄題、冬程人功題、城垣堤溝壑渠術、冬程人功術、溝題……委米依垣內角題、委菽依垣題……。

顯然，題術編排有三處差異。第一處是穿地下廣題在『武英殿聚珍本』及『文淵閣四庫本』中，被緊接地置於穿地題之後。由於穿地下廣題是將「堅土求穿地」及「垣積反求下廣之逆運算」結合起來的問題，³所以『武英殿聚珍本』及『文淵閣四庫本』如此編排題目順序，可能是著眼於「堅土求穿地」，而《九章術解》、『微波榭本』、『南宋本』及『李潢本』，則是著重在「垣積反求下廣之逆運算」。第二處差異，則是城垣堤溝壑渠術在『武英殿聚珍本』及『文淵閣四庫本』中，被插置於冬程人功題及冬程人功術兩者之中，而《九章術解》、『微波榭本』、『南宋本』以及『李潢本』，則是提綱挈領地將術文規置在相同題型的題目之前，可能是戴震誤移所致。⁴第三處差異是委米依垣內角題及委菽依垣題兩者順序相反，就術文來看：「其依垣者十八而一，其依垣內角者九而一。」，⁵顯然『武英殿聚珍本』及『文淵閣

四庫本』的題目順序和術文沒有前後呼應。

總結來說，比對之下所發現的題術順序差異，就整個「商功章」題術本身的邏輯性而言，並無顯著的影響，但在底本的探討上，卻提供進一步的線索。

2. 單一文字：接下來將各個九章算術版本逐字對照《九章術解》裡九章術文本的部分。

6

書名 題號\名	九章術解	南宋本	武英殿 聚珍本	文淵閣 四庫本	微波榭本	李潢本
1 穿地題	爲堅爲壤	爲堅壤	爲堅壤	爲堅壤	爲堅壤	爲堅壤
4 冬程人功 術曰	程功尺數	程功尺數	積功尺數	積功尺數	程功尺數	程功尺數
5 溝題	袤七丈	袤七丈	袤七尺	袤七丈	袤七丈	袤七丈
5 春程人功 題	定功…… 五分尺之 四	定功…… 五分尺之 四	定功…… 五分之四	定功…… 五分尺之 四	定功…… 五分尺之 四	定功…… 五分尺之 四
7 (答曰)	一千七萬	一千七萬	一十七萬	一千七萬	一千七萬	一千七萬
7 秋程人功 題	問當受袤	問當受袤	問各當受 袤	問各當受 袤	問當受袤	問當受袤
13 (答曰)	三十五尺	三十五尺	二十五尺	三十五尺	三十五尺	三十五尺
14 (術曰)	廣袤相乘	廣袤相乘	廣袤相袤	廣袤相乘	廣袤相乘	廣袤相乘
19 (答曰)	一萬	二萬	一萬	一萬	一萬	二萬
21 (術曰)	一人	一人	人一	一人	一人	一人
22 (答曰)	六十三	六十三	六千三	六十三	六十三	六十三
27 (術曰)	得高尺	得高尺	得高	得高	得高尺	得高尺

由上述的底本對比，何者較接近《九章術解》？⁷從題目編排順序討論，筆者首先排除『武英殿聚珍本』及『文淵閣四庫本』，並且從單一文字對比來看，顯然『武英殿聚珍本』與《九章術解》的差異較多。在本章第 5 題 (春程人功) 中，李潢本有「潢按設問并出土功五分之二當作五分之一」記載，筆者認爲南秉吉若是採用『李潢本』，應該會注意到李潢的校定才是，故再排除『李潢本』。剩餘未排除的『微波榭本』、『南宋本』是筆者手邊現存的版本中，比較接近《九章術解》的。

第三節 南秉吉注解的特色

在工程分配問題(冬程人功、春程人功、夏程人功、秋程人功、負土問題、載土問題)以及體積的逆問題(反求穿地下廣、倉高、圓困周)，南秉吉將題目中的數據引入術文中直接陳述每個步驟，並非全是文字性的抽象敘述。但是關於體積公式的術文解說，則不引入數據，著重在體積公式的說明，採用『周三徑一』、『截面原理』將「方」過渡到「圓」，與劉徽的注是相似的，但不考慮劉徽及李淳風的體積修正公式。就整個體積公式的注解方法來看，劉徽採用的是『棊驗法』和『出入相輔』。同樣地，南秉吉在注解「城垣溝壟渠」術文亦採用『出入相輔』，但南秉吉更進一步解釋：「上下廣相減，餘折半以加短，乃得中平之廣與并上下廣而半之相等也」。⁸另外，南秉吉證明方亭、羨除、芻蕘、芻童等體積公式時，其手法和「棊驗法」相似，但似乎更爲直觀，底下以芻蕘爲例說明：

以下廣乘上袤又以高乘之，則得長方體一也；以下廣乘下袤而倍之，又以高乘之，則得下廣乘下袤及高所成之長方體二、以上下袤差乘下廣及高所成之方廉體四也，并之共得長方體三即壑堵體六也、方廉體四即陽馬體十二也、將此一壑堵體各加二陽馬

體，則成芻蕘者六。⁹

把它轉為現代語言來作說明：

$$\begin{aligned}
 & \text{上表} \times \text{下廣} \times \text{高} = \text{長方體 1 個} \\
 & 2 \text{ 下表} \times \text{下廣} \times \text{高} = \text{長方體 2 個} + \text{方廉體 4 個} \\
 +) & \text{其中 方廉體} = (\text{下表} - \text{上表}) \times \text{下廣} \times \text{高} \\
 & [(2 \text{ 下表} + \text{上表}) \times \text{廣}] \times \text{高} = \text{長方體 3 個} + \text{方廉體 4 個} \\
 & = \text{漚堵體 6 個} + \text{陽馬體 12 個} \\
 & = 6(\text{漚堵體 1 個} + \text{陽馬體 2 個}) \\
 & = 6 \text{ 芻蕘等}
 \end{aligned}$$

而劉徽對芻蕘的注解：¹⁰

假令下廣二尺，表三尺，上表一尺，無廣，高一尺。其用棋也，中央漚堵二，兩端陽馬各二。倍下表，上表從之，為七尺。以廣乘之，得冪十四尺。陽馬之冪各居二，漚堵之冪各居三。以高乘之，得積十四尺，其于本壠也，皆一而為六。¹¹

將上述術文整理解釋如下：

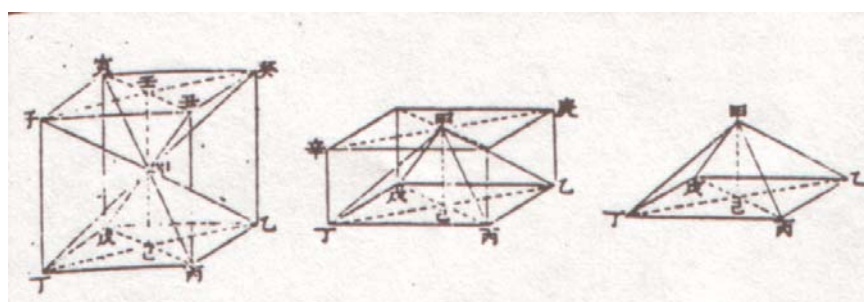
	中央漚堵	兩端陽馬
標準芻蕘： 下廣二尺、表三尺、上表一尺、高一尺	2 個	4 個
長方體： [(2 下表+上表)×廣]×高=14 尺	12 個(6 尺)	24 個(8 尺)
長方體：標準芻蕘	6 : 1	6 : 1

比較特別的是，南乘吉在注解方錐體積公式卻跳出如同上述的一貫方式：¹²

又自正方體中心依各稜角至各角剖之則成六尖方體，此每一尖方體俱為倍高正方體之六分之一。若同高扁方體則必為三分之一，故三歸之得尖方體也。¹³

再對照《數理精蘊》中的方底尖體形 (見下圖)：

又自甲心依各稜至各角剖之，則成甲乙丙丁戊、甲子寅癸丑、甲癸寅丙丑、甲戊丁子寅、甲乙戊寅癸、甲丙丁子丑六尖方體。此每一尖方體俱為倍高正方體之六分之一。既為倍高正方體之六分之一，則必為同高扁方體之三分之一。故將所得庚乙丁辛之同高方體積三分之。¹⁴



南秉吉採用的可能是《數理精蘊》方底尖體形的數學知識，而此論證方法是針對底長為高兩倍的方錐而言，並沒有說明一般化的情形。此外，《九章術解》和《數理精蘊》亦有一些相似處，例如《九章術解》中的陽馬：

此陽馬與方錐形雖不同，而法則一也。蓋方錐形尖在正中，陽馬形尖在一隅，然大凡體形，其底面積等，高度又等，則形雖不同，而積則一也。¹⁵夫一正方體剖之得二壅堵，一壅堵體剖之得一陽馬、一鼈臠，而一陽馬剖之又得二鼈臠，是陽馬體為壅堵體三分之二，即為正方體之三分之一，而鼈臠體為壅堵體三分之一，即為正方體之六分之一也。¹⁶

再對照《數理精蘊》中的陽馬體形：

此陽馬體與尖方體，形雖不同而法則一。蓋尖方體形，尖在正中。陽馬體形，尖在一隅。然大凡體形，其底面積等，高度又等，則其體積亦必相等……。故形雖不同而積則一也。¹⁷

以及《數理精蘊》的鼈臠體形：

夫一正方體剖之，得二壅堵體，是壅堵體為正方體二分之一也。一壅堵體剖之，得一陽馬體、一鼈臠體。而一陽馬體剖之，又得二鼈臠體。是陽馬體為壅堵體之三分之二，即為正方體之三分之一。而鼈臠體為壅堵體三分之一，即為正方體之六分之一也。¹⁸

從上述對比來看，《九章術解》和《數理精蘊》兩者的文字內容及語氣轉折幾乎相同。無獨有偶地，《九章術解》的芻童和《數理精蘊》的上下不等長方體，兩者幾乎如出一轍。¹⁹在修辭方面，《九章術解》和《數理精蘊》兩者均用「因」、「歸」以及「……為一率，……為二率，……為三率，得四率……」做陳述；²⁰在多面體亦有相同的名詞。²¹

第四節 南秉吉注解的評價

綜觀《九章術解》商功第五，幾乎未收入劉徽的注和李淳風的釋，而是南秉吉自己重新將九章術本文做注解。然而，有關劉徽在立體和委粟問題所釋的體積修正公式、對「非標準基」的論述，以及用無窮小分割證明陽馬和鼈臠的體積比為 2：1，南秉吉均隻字未提，究其原因，是否正如同他在《九章術解》的跋所言：「劉徽注之、李淳風釋之，然俱多未曉處，抑或繡出鴛鴦而藏其金針之義歟。注釋所以啟來者而終莫能端倪……。」或許是可能的，但亦不能憑此驟下定論。至於《數理精蘊》是否有影響南秉吉對九章術本文的注解，就諸多相似處來看，答案應該是肯定。另外，就南秉吉注解的方式來看，他將題目的數據引入術文，詳細說明每一步驟，呈現程序化的計算性；在體積公式論證方面，與『棋驗法』略有差異，較貼近《數理精蘊》的證明形式。總結來說，算法詳細有數據、論證直觀簡明，為南秉吉注解的最大特色。

註解

1. 參見李繼閔，《九章算術及其劉徽注研究》（台北：九章出版社，1992），頁 301。
2. 南宋鮑澣之的《九章算術》刻本，到了明朝，只存前五卷。清初汲古閣主人毛扆影抄錄這五卷，世稱汲古閣本。明朝《永樂大典》中載錄的《九章算術》，其底本是不同於鮑澣之的另一抄本。清乾隆三十九年，戴震將《九章算術》從《永樂大典》輯出校勘，收入《武英殿聚珍版叢書》，並於乾隆四十九年抄入《四庫全書》。在乾隆四十一年，戴震曾經重校《九章算術》，以聚珍版的底本參校汲古閣本。次年，其前五卷以汲古閣本為底本，再次校勘，由孔繼涵刻入微波榭本。

3. 參見郭書春譯注，《九章算術》(瀋陽：遼寧教育出版社，1998)，頁 332。
4. 參見郭書春，〈九章算術提要〉，(收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙·數學卷一》，鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 89。郭書春認為是戴震誤移於此，戴震：「按此節之上，原本有術曰二字，上兩節并注。原本誤入上城垣堤溝壟渠皆同術之下，今訂正合為一條。」。
5. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 372-373。
6. 溝題和春程人功題皆編列到題號 5 裡；穿渠題和秋程人功題皆編列到題號 7 裡。
7. 《九章術解》本身也有文字上的錯誤。芻童曲池盤池冥谷術文：「其曲止者……」，當中的「止」字應改為「池」；委粟術文：「……程粟一斛積三尺七寸……」，當中的「三」字應改為「二」；第二十七題：「今有倉，廣……，問斛幾何」，當中的「斛」字應改為「高」。另外，《九章術解》的用字和其他版本也有些不同：「鼈臠」的「臠」字，南宋本為「腴」字；「答曰」的「答」字，微波謝本、楊輝本、南宋本為「荅」字；「圓堡壘」的「堡」字，微波謝本為「塚」字。
8. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 352。
9. 同上，頁 364-365。
10. 劉徽：「蓋說算者乃立三品棋，以效高深之積。」說明劉徽是記述前人的棊驗法。
11. 參見郭書春譯注，《九章算術》(瀋陽：遼寧教育出版社，1998)，頁 316。
12. 方亭、羨除、芻蕘、芻童體積公式的證明手法是相同的。
13. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 361。
14. 引自清·康熙御制，《數理精蘊》，(收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙·數學卷三》，鄭州市：河南教育出版社，1993)，頁 822。
15. 卡瓦列利原理。
16. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 362-363。
17. 引自清·康熙御制，《數理精蘊》，頁 822。
18. 同上，頁 823-824。
19. 體積公式的論證方法是完全相同的，並且陳述語氣：「……其二上下方面，俱如……，其二上下方面，俱如……，其一上下方面，俱如……，其一上下方面，俱如……」亦相同。只是《數理精蘊》多用甲乙丙丁…等符號標示所指的體積部分。參見清·康熙御制，《數理精蘊》，頁 825-826；南秉吉，《九章術解》，頁 366。
20. 「因」、「歸」通常是表示一位數的乘、一位數的除，但南秉吉在夏程人功術文中卻用「四因十五歸」。
21. 尖方體、扁方體、三稜體、尖圓體、長圓體、長廉體、方廉體。

《九章術解》卷六校勘

內壩國中 葉吉海老師

第一節、導論

卷六〈均輸〉，劉徽闡明「均輸」，猶均運也。按字面的解釋就是合理地攤派。均輸術是包含著正、反比例之複雜分配問題，它來自秦漢之際官方的徭役和賦稅制度。¹〈均輸〉卷共收錄二十八個問題，前四題為均輸本法，其餘為稟粟、持米金出關、負籠、程傳、絲粟互換、成瓦、矯矢、九節竹及各種追及、相遇、工程問題等較複雜的比例問題。

卷六〈均輸〉與卷二〈粟米〉、卷六〈衰分〉三卷為比例題卷，南秉吉於《九章術解》之注解方法均以四率比例法處理，然此法本質雖與劉徽之今有術同，因此，其習得此法與使用的背景是我們要進一步探詢的。

接著，本文將根據《九章術解》的內容，分別針對南秉吉所可能參考的《九章算術》底本、南秉吉注解的特色及其評價，作深入的分析與探討。

第二節、底本的探討

《九章術解》卷六〈均輸〉與眾多版本術文比較的結果，²得知《九章術解》卷六一均輸與微波樹本（1777）、《九章算術細草圖說》（1820）的差異處最少。其餘版本比對之差異處，相對而言眾多。³

細看各個版本比對結果，得知其差異處的相同點如下表所示：

題號	《九章術解》卷六〈均輸〉	微波樹本、《九章算術細草圖說》
3	加一斛粟價，則致一斛之「實」	加一斛粟價，則致一斛之「費」
16	半其餘為法、增三分之一	半其餘「以」為法、增三分「日」之一
17	副置下第一衰為法	副置下第一衰「以」為法
19	衰相去「之」	衰相去「也」
26	令日「數」互相乘滿	令日互相乘滿

這些差異處之相同點即為《九章術解》與微波樹本、《九章算術細草圖說》的差異所在。這些差異處除了「字」、「介詞」的增減異同外，並沒有「結構」上的問題。換句話說，《九章術解》在傳抄的過程中，很可能只發生了「字」、「介詞」的增減異同，而對於原本術文「結構」上的問題並無變動。以下筆者將從字詞的使用、術文的結構、解題評注與題目順序等面向深入探討《九章術解》的底本由來。

字詞的使用：⁴

- 1、 “鹽”字，四庫本作“塩”，其餘均作“鹽”；“鴈”字，大典本作“雁”，其餘均作“鴈”字；除此之外，版本錯字情形，請參見附錄表格；
- 2、 第三題之“賦粟”，微波樹本、《九章算術細草圖說》作“賦粟”外，其餘作“輸粟”；
- 3、 第四題之“空重相乘為法”的“乘”字，大典本與四庫本作“承”，其餘作“乘”；

- 4、 數詞十錢、十二錢、十七錢、十三錢、粟一斛十八、一日十錢、粟一斛十六、粟一斛十四錢、粟一斛十二、二十七錢十五分錢之十一、四十八里十八分里之十一、十二兩、十二銖、十六銖、十六，除微波樹本與《九章算術細草圖說》外，其餘版本均作一十錢、一十二錢、一十七錢、一十三錢、粟一斛一十八、一日一十錢、粟一斛一十六、粟一斛一十四錢、粟一斛一十二、二十七錢一十五分錢之一十一、四十八里一十八分里之一十一、一十二兩、一十二銖、一十六銖、一十六；
- 5、 實如法得一車（錢、斛、斗、里、斤、日、畝、枚）的用法，聚珍版與四庫版用法為實如法得一。

術文的結構：

- 1、 第四題，“甲縣四萬二千算粟一斛二十傭價一日一錢”之“傭價一日一錢”，對解題而言，是個贅詞。眾版本皆保留；
- 2、 第二十二題，“今有一人「三」日為「牡」瓦三十八枚一人「二」日為「牝」瓦”，除微波樹本與《九章算術細草圖說》外，其餘皆作“今有一人「一」日為「牝」瓦三十八枚一人「一」日為「牡」瓦”。“三”日、「二」日與牝牡的錯訛，就結構上來說，如同南秉吉所言：術與答俱誤矣。由第二十二題可知，南秉吉對於底本的術文的誤訛情形，不會擅加修改，而只對術文作解題評注而已。

解題評注：

南秉吉對第二十二題作解題評注時，認為術文中的「術」與「答」俱誤矣。他依原題所述，將術與答重新改寫于評注中，並且作一番的說理解釋。值得注意的是，若南秉吉所參照的底本是《九章算術細草圖說》，應會參見到李潢對此術文的注解：潢按永樂大典三日二日皆作一日當依改正否則於算不合，則南秉吉就不必大費周章地驗算、說理改正術答。由此可知，南秉吉所本之底本內容當只有九章術文及劉李注。

題目順序：

《九章術解》卷六〈均輸〉與眾版本比對結果，⁵其題目順序及題數皆同。

由以上的分析，南秉吉所參照的底本最有可能的就是微波樹本。而微波樹本為戴震再次校勘《九章算術》之作，其前五卷以汲古閣本為底本，由曲阜孔繼涵刻入微波樹本《算經十書》。戴震或孔繼涵還將微波樹本冒充南宋版的翻刻本。後來，被多次影印、翻刻，影響甚大。⁶

第三節、南秉吉注解的特色

南秉吉注解與劉李的注解最大不同處，在於前者注解較平易近人，後者注解繁瑣。南秉吉注解卷六時，格式統一，以術為主，先行詳細步驟解題，將術之計算步驟詳盡說明，並以比例四率法貫穿全文，再行說明解題步驟的合理性。⁷雖然解題過程傾向於程序性解題，但南秉吉會在其後作概念性的補充說明，而概念性說明一般會參照劉李的說法。⁸而劉李釋題與解題混合使用，繁雜且所使用之數學語言較高。另南秉吉注解非常詳細，與劉李注解之點到為止有異。

南秉吉注解風格與劉李明顯有異。南秉吉敢於如此創新，可見其有所本。細看其注解卷六的風格，與《數理精蘊》頗有異曲同工之妙。劉李注對於比例的問題，是以今有術處理，

而南秉吉卻是運用比例四率法處理比率問題。南秉吉於此卷題問上，使用了合率比例、首尾互準差分、相和折半差分、和數比例、較數比例、和較比例等等的比率方法。以下針對《九章術解》、《九章算術劉李注》、《數理精蘊》的異同提供一些比較結果：

- 1、卷六中，合率比例、相和折半用術語的使用，⁹《數理精蘊》有相同的術語，而《九章算術劉李注》無。
- 2、卷六中，題目與《數理精蘊》同者或相似者，南秉吉注解格式與《數理精蘊》同。如：第九、十、十四、十九題等。

對於第2點，以下提供第十四題說明：

第十四題：

今有兔先走一百步，犬追之二百五十步，不及三十步而止。問犬不止，復行幾何步及之？

《數理精蘊》中題問：

設如二人自鄉上城，一人步行，一人騎馬。使步行者先行三十七里，騎馬者追至一百五十四里，尚不及二十三里。問追及之里數幾何？

南秉吉的注解：

以不及三十步與先行一百步相減，餘七十步為一率，追之二百五十步為二率，不及三十步為三率，得四率一百七步七分步之一，即及之里數也。此法兔先走一百步，今犬追之，止不及三十步，是一百步內已追過七十步也。追過七十步必須二百五十步，今尚不及三十步，則必須一百七步七分步之一方能追及也。¹⁰

《數理精蘊》題問解法：

法以不及二十三里與先行三十七里相減，餘一十四里為一率，追至一百五十四里為二率，不及二十三里為三率，推得四率二百五十三里，即追及之里數也。此法蓋因步行者已先行三十七里，今騎馬者追之，止不及二十三里，是已追過十四里也。追過十四里，必須一百五十四里。今尚不及二十三里，則必須二百五十三里方能追及也。

上兩題雖題目數據及文字不盡相同，但同為追及題型中同一問題。詳細比對其注解的格式，兩者可說是一模一樣。由此可知，《數理精蘊》為南秉吉所本的說法就更加有利了。

由於使用比例四率法的關係，南秉吉處理數據資料，一率、二率、三率皆盡量化為術文中的最小單位及整數化的形式。

從南秉吉的注解可看出，他本身有其一套數學基礎。《九章術解》，顧名思義，即南秉吉對《九章算術》中的術，運用其本身的數學素養，將其重新詮釋的作品。當然，在詮釋的過程中，難免犯一些錯誤。¹¹但對整體而言，並無影響。

第四節、南秉吉注解的評價

南秉吉的注解值得稱許的一點是比劉李注精簡易懂，如此有助於普及教育的推廣。而他在注解時，不會任意竄改術文是另一值得稱許的。由卷六其注解的格式看來，南秉吉對《數理精蘊》的熟悉度不在話下，然由第二十二題可知，其實事求是、有多少證據說多少話的注解精神。總的來說，南秉吉以既有的術文，加上本身的數學素養，成就了《九章術解》。

附錄：

均輸第六單一文字對比

書名 題號\名	九章術解	南宋本	武英殿 聚珍本	文淵閣 四庫本	微波榭本	李潢本
1	均輸	缺	均輸	均輸	均輸	均輸
1	丙縣一萬二千三百五十戶	缺	丙縣一萬二千三百五十戶	丙縣一萬三千三百五十戶	丙縣一萬二千三百五十戶	丙縣一萬二千三百五十戶
1 (術曰)	乘未并者	缺	乘未并者	乘未并者	乘未并者	乘未并者
1 (術曰)	實如法得一車	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一車	實如法得一車
1 (術曰)	以二十五斛乘車數即粟數	缺	以二十五斛乘車數即粟數	以二十五斛乘車數即粟數	以二十五斛乘車數即粟數	以二十五斛乘車數即粟數
2 (術曰)	乘未并者	缺	乘未并者	乘未并者	乘未并者	乘未并者
2 (術曰)	實如法而一	缺	實如法而一	實如法而一	實如法而一	實如法而一
3	十錢、十二錢、十七錢、十三錢	缺	一十錢、一十二錢、一十七錢、一十三錢	一十錢、一十二錢、一十七錢、一十三錢	十錢、十二錢、十七錢、十三錢	十錢、十二錢、十七錢、十三錢
3	欲以縣戶賦粟	缺	欲以縣戶輸粟	欲以縣戶輸粟	欲以縣戶賦粟	欲以縣戶賦粟
3 (術曰)	一斛之實	缺	一斛之費	一斛之費	一斛之費	一斛之費
3 (術曰)	乘未并者	缺	乘未并者	乘未并者	乘未并者	乘未并者
3 (術曰)	實如法而一	缺	實如法得一	實如法得一	實如法而一	實如法而一
4	備價一日一錢	缺	備價一日一錢	備價一日一錢	備價一日一錢	備價一日一錢
4	十八、十錢、十六、十四、十二	缺	一十八、一十錢、一十六、一十四、一十二	一十八、一十錢、一十六、一十四、一十二	十八、十錢、十六、十四、十二	十八、十錢、十六、十四、十二
4 (術曰)	空重相乘爲法	缺	空重相承爲法	空重相承爲法	空重相乘爲法	空重相乘爲法
4 (術曰)	實如法得一日、實如法得一斛	缺	實如法得一、實如法得一	實如法得一、實如法得一	實如法得一日、實如法得一斛	實如法得一日、實如法得一斛
4 (術曰)	即致一斛之費	缺	即致一斛之費	即致一斛之費	即致一斛之費	即致一斛之費
5 (術曰)	列置	缺	列直	列置	列置	列置
5 (術曰)	反衰之、副并爲法、乘未并者	缺	反衰之、副并爲法、乘未并者	反衰之、副并爲法、乘未并者	反衰之、副并爲法、乘未并者	反衰之、副并爲法、乘未并者
5 (術曰)	實如法得一斗	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一斗	實如法得一斗
6 (術曰)	實如法得一斛	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一斛	實如法得一斛
7	鹽	缺	鹽	塩	鹽	鹽
7 (答曰)	二十七錢十五分錢之十一	缺	二十七錢十五分錢之十一	二十七錢十五分錢之十一	二十七錢十五分錢之十一	二十七錢十五分錢之十一
7 (術曰)	實如法得一錢	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一錢	實如法得一錢
8 (術曰)	實如法得一返	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一返	實如法得一返

9	程傳	缺	程傳	程傳	程傳	程傳
9	五日三返	缺	五日三返	五十三返	五日三返	五日三返
9 (答曰)	四十八里十八分里之十一	缺	四十八里一十八分里之十一	四十八里一十八分里之十一	四十八里一十八分里之十一	四十八里一十八分里之十一
9	實如法得一里	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一里	實如法得一里
10	十二兩	缺	一十二兩	一十二兩	十二兩	十二兩
10	十二銖	缺	一十二銖	一十二銖	十二銖	十二銖
10 (答曰)	十六銖三十三分銖之十六	缺	一十六銖三十三分銖之十六	一十六銖三十三分銖之十六	十六銖三十三分銖之十六	十六銖三十三分銖之十六
10 (術曰)	乘之爲實	缺	乘之爲實	乘之爲實	乘之爲實	乘之爲實
10 (術曰)	實如法得一斤	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一斤	實如法得一斤
11	糲米十斗	缺	糲米一十斗	糲米一十斗	糲米十斗	糲米十斗
11 (術曰)	實如法得一斗	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一斗	實如法得一斗
12	善行者行一百步	缺	善行者行一百步	善行者行一百步	善行者行一百步	善行者行一百步
12 (術曰)	以善行者之一百步	缺	以善行者之一百步	以善行者之一百步	以善行者之一百步	以善行者之一百步
12 (術曰)	實如法得一步	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一步	實如法得一步
13	先行十里	缺	先行一十里	先行一十里	先行十里	先行十里
13 (術曰)	實如法得一里	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一里	實如法得一里
14 (術曰)	實如法得一步	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一步	實如法得一步
15	償錢五千	缺	償錢五千	價錢五千	償錢五千	償錢五千
15 (術曰)	以十乘	缺	以一十乘	以一十乘	以十乘	以十乘
15 (術曰)	五千	缺	五千	五十	五千	五千
16	至家	缺	至家	至家	至家	至家
16 (術曰)	半其餘爲法	缺	半其餘以爲法	半其餘以爲法	半其餘以爲法	半其餘以爲法
16 (術曰)	增三分之一	缺	增三分日之一	增三分日之一	增三分日之一	增三分日之一
16 (術曰)	一日行	缺	一日行	一日行	一日行	一日行
17 (術曰)	副置下第一衰爲法	缺	副置下第一衰以爲法	副置下第一衰以爲法	副置下第一衰以爲法	副置下第一衰以爲法
17 (術曰)	實如法得一斤	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一斤	實如法得一斤
18 (術曰)	六少於九三	缺	六少于九三	六少于九三	六少於九三	六少於九三
18 (術曰)	實如法得一錢	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一錢	實如法得一錢
19 (術曰)	實如法得一升即衰相去之	缺	實如法得一即衰相去也	實如法得一即衰相去也	實如法得一升即衰相去也	實如法得一升即衰相去也
20	鴈	缺	雁	鴈	鴈	鴈
20 (術曰)	實如法得一日	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一日	實如法得一日
21 (術曰)	實如法得一日	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一日	實如法得一日
22	一人三日爲牝瓦…一人	缺	一人一日爲牝瓦…一人	一人一日爲牝瓦…一人	一人三日爲牝瓦…一人	一人三日爲牝瓦…一人

	二日爲牝瓦		一日爲牡瓦	一日爲牡瓦	二日爲牝瓦	二日爲牝瓦
22 (術曰)	實如法得一 枚	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 枚	實如法得一 枚
23	今令	缺	令令	今令	今令	今令
23 (術曰)	用徒一人太 半人	缺	用徒一人太 半人	用徒一人太 半人	用徒一人太 半人	用徒一人太 半人
23 (術曰)	實如法得一 矢	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 矢	實如法得一 矢
24 (術曰)	實如法得一 畝	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 畝	實如法得一 畝
25 (術曰)	耕耨畝數	缺	耕耨畝數	耕耨畝數	耕耨畝數	耕耨畝數
25 (術曰)	實如法得一 畝	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 畝	實如法得一 畝
26 (術曰)	實如法得一 日	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 日	實如法得一 日
26 (術曰)	今日數互相 乘滿	缺	今日互相乘 滿	今日互相乘 滿	今日互相乘 滿	今日互相乘 滿
27 (術曰)	二四六互相 乘	缺	二四六互相 乘	二四六互相 乘	二四六互相 乘	二四六互相 乘
27 (術曰)	實如法得一 斗	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 斗	實如法得一 斗
28 (術曰)	實如法得一 斤	缺	實如法得一	實如法得一	實如法得一 斤	實如法得一 斤

註解：

1. 劉鈍，《大哉言數》，頁 165。
2. 比對之版本有《武英殿聚珍版》(1774)、微波樹本(1777)、文淵閣《四庫全書·九章算術》(1784)、《九章算術細草圖說》(1820)、南宋本。其中南宋本無卷六。
3. 版本完整比對請詳見附錄表格。
4. 以下眾比對結果，請詳見附錄表格。
5. 比對之版本有《武英殿聚珍版》(1774)、微波樹本(1777)、文淵閣《四庫全書·九章算術》(1784)、《九章算術細草圖說》(1820)、南宋本。其中南宋本無卷六。
6. 郭書春譯注(1993)，《九章算術》p.42，瀋陽：遼寧教育出版社。
7. 南乘吉於完成術文解題後，會再補充說明其解題的合理性，而其常使用的語法為：蓋……，則……，應……也等。同《數理精蘊》之用法。
8. 如第十八題，錐行者如立錐初一次二次三次四次五各均爲一例者也。
9. 《九章術解》中，合率比例用語出現在第十題與第十一題，相合折半用語出現在第十九題；而《數理精蘊》則出現在下編卷三與卷五。
10. 「一」百七步七分步，南乘吉誤寫爲「二」百七步七分步。
11. 第五題，南乘吉對術的注解中，有一段有誤。如下：蓋糲率最多取粟宜多稗率爲次取粟宜次糲率最少取粟宜少。應爲：糲率最多取粟宜少……糲率最少取粟宜多。

研討會記事錄

「數學教育研究方法研習營」後記

台師大數學系研究所碩士班 林旻志

這次參加國科會數學教育學門所主辦的 12 月 8、9 兩日「數學教育研究方法研習營」，是以工作人員的身份參加，所以在前一天，便先和其他工作伙伴一同飛抵台東，以提前準備。抵達大會舉辦的會場—「台東史前文化博物館」之後，藉由史博館內工作人員的指引，大致熟悉了整個會場的環境和動線，及會場的硬體設備包括燈光的明暗控制、錄影錄音等等的操作。簡單布置了一下會場，大家再一次的確認隔日各自負責的事項及會議流程之後，即返回飯店休息。

大會第一天早上，我和彥宏提早至台東機場接機，第一次拿著可愛的研習營看板在機場等人，感覺有些新鮮和興奮。不一會兒，與會的老師們從出口魚貫地出現，或許是因為地點的關係，感覺大家臉上都泛著笑意，似乎來到台東，心情也跟著度假了起來。大會在瓊如精準的控制時間下，順利的進行。休息時間，還備有精緻的點心及茶水供大家取用。順道一提，這次來台東最大的收穫，除了會議內容的精神饗宴之外，還飽餐了大會豐盛的餐點，嗯，回台北後，得要力行瘦身計畫了！第二天在會場上，林碧珍老師特別綁著富有原住民風味的頭巾與會，不但十分具有特色，也讓整個會議「在地化」了。而兩天的研習營在下午五點半結束之後，另有一場讓大家聯誼和討論的雞尾酒會，最後留下來參與的老師們，在臨走之餘，還欣賞到史博館戶外精彩的「水舞表演」，也為這兩日的會議，留下一個完美的句點。

由於在會場中，有時需分神照顧錄影、錄音等機器設備，再加上得趁大家在會場時，品嚐豐富的茶點，以致漏聽到許多老師精彩的演說內容。不過，光是所聽到的，就足以對我多所啓益。例如在「方法論的反思」這場議題中，譚克平老師及劉柏宏老師提及了教育研究的質與量的研究方式，特別是劉柏宏老師還以 HPM 為例，指出目前有關 HPM 方面的研究困境以及如何尋找一個適當的研究方式以彰顯 HPM 在教育上的價值。對於中學數學教師來說，數學史是能讓學生貼近數學、還原數學神秘本質的一條進路，但如何在引發學生的學習興趣之後，進而利用數學史維持、提升學習品質，仍是需要大家來思索的課題。還有陽明大學的洪裕宏老師，提出了「從認知科學觀點看數學教育」，他簡介了認知科學的二個主要典範—Symbolism（符號論）與 Connectionism（聯結論），說明過去五十年，認知科學主要由所謂的傳統人工智能學派(symbolism)所主導，到八〇年代以後，聯結論才逐漸受到重視，而形成競爭之局面。依據 Connectionism 的主張，人類認知之歷程不是依循規則的歷程，而應用於數學教育上，則應重視數學洞見(insight)之開發。雖然洪老師是會場中少數非教育科班出身的學者，但他的看法，卻和數學教育的許多理念不謀而合。不過，真正讓我印象深刻的是洪老師短短數分鐘的身平簡介。他提及從小到大最反教育，然而現今從事的是教育崗位，平日工作的重心，也環繞在教育上。另一位有異曲同工之妙的是蕭志如老師，他談到在師大數學系唸書時，差點被退學，不過在美國求學時，卻被視為天才。其實這些生命中的真實故事，不僅讓我們更貼近講者，亦是惕勵自己和他人的好題材。

會議也請到了多位科學教育界的老師，如郭重吉老師提出「如何探究學生科學概念的學習」、林煥祥老師的「淺談科學教育研究」、張惠博老師的「科學素養」等。而在討論時間中，大家還針對「數學素養與科學素養的異同」這項議題有精彩的討論。在「資訊融入數學教育」

的主題中，有左台益老師提出「資訊科技融入數學教學個案研究」、全任重老師的「知難行易的曲線作圖」、傅麗玉老師的「飛鼠部落」及李源順老師的「數學教學知識庫的建置」。國內有許多的數學網站都有全任重老師網站的連結，而實際進入全老師的網站之後，不但可以見到各式各樣從平面到立體的幾何圖案，也找得到較複雜的極座標方程式之曲線。對有興趣的圖形，還可下載回家，好好研究。在會議結束之際，也趁機把握機會向全老師請益。原來全老師憑一人之力，已經架設了四個網站，同時，網站內容的管理與安全性問題，也都由其一人負責包辦，真是令人佩服再三。而全老師的理念，主要也是想讓大家經由簡單的步驟，造出複雜的曲線，產生成就感與好奇心的同時，能對曲線背後蘊含的數學知識有更深一層的認識。此外，講題內容對研究生有直接助益的，有梁淑坤老師和傅麗玉老師談到「論文寫作」、林碧珍老師的「如何決定一個與師資教育相關的研究主題」、柳賢老師的「談數學概念的評量」以及金鈴老師提出「教室觀察研究的倫理」和一些經驗分享等等，都讓我們研究生受益良多。

這幾天的台東之行，最要感謝的是自全省各地的老師們以及研究生，有大家熱情的參與，讓這場研習營的內容更顯豐富和多元。以及其餘辛苦的工作伙伴們（宜君、靜宜、青樺）、幫我分擔了許多會議前細節準備事項，不但讓大家參與了一場媲美國際級的學術交流會議，也使我吸收了許多會議外的經驗。

【數學教育研究方法研習營】後記

台師大數學系碩士班研究生 陳彥宏

走出機場，喧囂與嘈雜不再，放眼望去，亦無“高聳參天”的大廈，突然之間，才意識到我已身在台東..



91/12/9 下午 2-3 場—教師教育



91/12/9 下午 2-4 場—青少年數學概念

由於身為活動的工作人員，筆者有幸提早一天來到台東感受東台灣之美，從機場到會場

—台東史前博物館—的途中，眼前盡是一大片、一大片的草地，雖然是週末，卻看不到擁擠的人潮與車潮，再也感覺不到像台北這種“大都市”才有的緊張與壓迫感，因此就算隔天會議就要開始了，我們仍能從容地進行準備。

因為必須負責會場的燈光、錄音與錄影等工作，無法全程參與會議，雖不免感到遺憾，然筆者仍有一點小小的心得想提出來與大家分享。其中，最令筆者印象深刻的，莫過於師大數學系金鈴老師所提「教室觀察倫理」的觀念，他提出教學活動是教師和學生的共同資產，研究者對觀察資料的取得、保存與使用，都必須徵求他們的同意，尤其金老師亦「以身作則」，在任何公開場合呈現觀察資料之前，都先行知會相關人員，取得他們的同意。想起不久以前，一位教師曾向筆者提及類似的情況，顯是這個觀念說來容易，實際做起來卻不容易吧！另外，師大數學系洪有情老師所分享其與五歲姪子之間的對話亦相當有趣，現就將大概的內容記錄於下：

洪有情老師（以下簡稱洪）：如果你有 10 顆糖，現在給我 2 顆，那你還有幾顆糖？

姪（不假思索）：8 顆！

洪：你怎麼想的？！

姪：拿掉 9、10。

.....

洪：那如果你有 10 顆糖，現在拿掉第 1、2 兩顆，你還剩下幾顆？

姪：8 顆！

洪：為什麼？你怎麼想的？！

姪：...

上述對話提供了孩童減法運算所使用策略的一個參考，在面臨第一個問題時，其姪兒似乎將 10 顆糖果編號，不過，第二個問題又不像是如此，因筆者所學有限，便不再深入探討此問題，留待有興趣的讀者去研究！

《為甚麼要學習數學?》讀後感

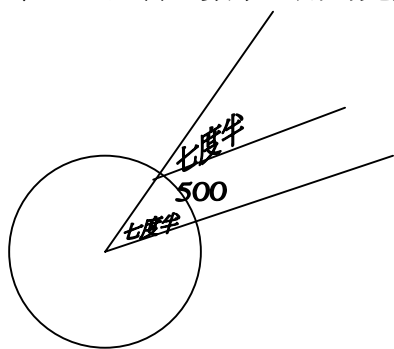
臺北市立成功高中 杜雲華、游經祥、蘇慧珍、蘇意雯老師

一、前言

本學期「數學教師專業發展與 HPM」計畫中，成功高中的參與教師們共同閱讀了蕭文強先生的《為甚麼要學習數學?》一書。正如同蕭先生再版序言所述『數學在一般人心目中佔什麼地位呢?大家都不否認它的功用，但同時很多人雖然沒有厭惡或者害怕它，可還是對它持一種冷漠的態度；即使在工作上常常與數學打交道的人，也不一定嘗試去瞭解數學除了作為工具以外，究竟是怎麼一回事。』很顯然的，這不啻一語道破數學這門學科的處境。

蕭文強先生接著在本書中，對於為何數學會造成上述疏離現象的原因提出解釋，他認為主要是因為『數學教學上我們往往著重它的技術內容，把它作為一種技能去傳授。這樣做，教師雖然能夠在規定的時間內傳授一定份量的知識，並且能夠以一種表面是清晰俐落的手法迅速教懂學生這套特別的語言，但同時也掩蓋了數學作為一門文化活動的面目，使學生感覺不到它的旺盛生機。』如前所述，數學是人類的活動，數學與文化之間的關係更是數學教育工作者不容忽視的課題，也是教師所需關注及具備的素養之一。在本書裡，除了前言外，共分成四章討論，分別是「引言－為什麼要學習數學」、「學習數學有什麼功用」、「對數學發展史的認識」、「數學在實際問題上的應用」，每章都各賦深趣。

蕭先生在書中舉了相當多的例子，足以打破數學是不食人間煙火、與日常生活無涉之迷思。例如在第四章中的第一個範例，是 Eratosthenes 利用初等幾何的知識量度地球的大小，就非常適合教師在課堂上補充。這個故事是這樣的：西元前三世紀古希臘數學家 Eratosthenes 知道亞歷山大里亞城位於塞尼城（Syene）以北五百哩，也知道在夏至那一天，太陽是當空直射於塞尼城之上。於是，在夏至那一天，Eratosthenes 利用類似日晷儀器量度了太陽在亞歷山大里亞城的投射角，得到的答案是七度半（如下圖所示）。由此他算出地球的圓周是二萬四千哩，因而求得地球的半徑約為三千九百二十五哩，與今日以精密儀器所得結果僅差約二十五哩左右。數學之用可見大矣。



$$500 \times \frac{360}{7\frac{1}{2}} = 24000$$

簡單說來，這是一部簡潔易懂饒富意味的小冊，極適合作為教師的參考讀物。我們這群人所採取的方式是共同閱讀，並由每人分配一章負責主講，再各自撰寫心得。在研讀的過程中，我們四人都獲得了不少的啟發和收穫，現在就讓敝校另外三位同仁利用以下篇幅與大家分享。

二、讀後感之一（杜雲華撰）

從事數學教育近二十年，深感大部分學生對於數學科的學習或多或少有著一分距離；狀況好一點的學生，很努力也很辛苦的學習，但是並不快樂。狀況差一點的學生，可能早就放棄學習，任其荒廢；有的學生甚而質疑「為何要學數學？」「現在所學的，以後根本用不到，為何學它？」這些是我們的教材沒能有效告訴學生，或根本就不會告訴學生問題的答案。有了質疑，就有了鴻溝，當問題沒能有效得到答案，鴻溝自然越來越深，學習也就打了折扣，甚而拒絕加入學習的行列。

筆者有幸在參與教學學習成長計畫研討會中，接觸到蕭文強先生所著之《為甚麼要學習數學？》這本書，發現書中大部分內容淺顯易讀，卻也相當程度地對數學的學習，給予新的思維與方向。

大環境裡，考試領導教學，因此，教師在數學教學上往往只著重在技術內容的傳授（課本教材內容亦同），而忽略了文化面和時代的背景、人物的介紹乃至於問題的發展與解決等一脈相承的歷史敘述，而這些偏偏又是如此的生動有趣。在教材中，拿掉這些精髓所剩下的軀殼雖是具體但缺乏生命，難怪會顯得如此僵硬，了無生機，更別提是吸引力了。

蕭先生在文中用很輕鬆的筆調，以數學史的風貌給予數學新的定義，如第三章所提對數學發展史的認識中把數學的起源認知深化為理論，由感性認識到理性認識，具體到抽象，歸納到演繹均有一脈相承的介紹。其中所舉的例子，亦能完整地達到舉証的功能，譬如有關古代巴比倫的開方法中的楔形文字泥板。在說明『實際問題上的應用』時，也能夠將數學與生活結合，豐富了數學的內涵，使其更具親和力，譬如角尺的利用，車輛拐彎問題，七橋問題，利用日晷巧妙量度地球大小，以及有限馬可夫鏈等等。為人師者若能善加運用，我想數學的教學將不只侷限於思維的訓練與知識的傳授，更能提昇數學的文化素養。如此一來，或許在學生對於數學的認知會有另外的風貌與評價也說不定。

三、讀後感之二（游經祥撰）

有一次，筆者隨數學科輔導團到東山高中訪談時，有一位數學老師在會議中提問題來問我們：「學生常常會問，學這麼多數學，到底有什麼用？為甚麼要學數學？我們要如何來為學生解答？」當時景美女中黃校長便指定筆者回答，記得筆者給出以下的參考回答：（1）因為大型如基本能力測驗、指定科目考試要考數學；小型如平常考、段考、月考、週考、期末考等皆要考數學，故要學數學；（2）數學的功用常常隱藏在無形的日常生活之中；例如：判斷某事的思維，對錯矛盾的批判，科學發展的應用等，故要學數學；（3）能應用出來的背後總是要學得更多。學更多的數學，如站在高嶺上，方可以居高臨下，如此，才有施用之完美能力，故要學數學。

後來，參與本研究計畫，大家商量一起看蕭文強先生所著之《為甚麼要學數學？》。這本書的內容以幾個方向來闡述有關為甚麼要學數學的原因。包括：引言、學習數學有什麼功用、對數學發展史的認識，以及數學在實際問題上的應用等四章。

蕭先生以平實淺白的文章，來闡述數學的功用，點出大部人對於『為甚麼要學數學』的共同說明為（a）很多科學都需要使用數學作為工具；（b）可以藉著學習數學來訓練推理

能力和思考能力。這 (a)、(b) 兩點，剛好與筆者上述的 (2)、(3) 有相通的地方。但是，如此的回答，學生似乎還不太會甘願這樣就覺得學數學是件理所當然的事。因為學生可能在學習的過程中，早已被不當的教學過程、無情的分數主義、機械式的模仿訓練、最簡捷精確的定義切入等不當教法，大量地增加學習的包袱與負擔，而嚴重地降低了學習數學的興趣。

看完此書後，讓筆者深深感覺到學生的數學學習，要從數學教學的根本改良上做起。因此，筆者覺得根本改良之方向如下：

- (1) 要從生活實務上談數學的實際應用，例如，地球大小的測量、山高與路遠的度量、樂透彩的得獎機率、電影票價的訂定、百貨公司貨品的折扣、田地種植生產等，皆可以由日常生活中切入活潑生動的學習動機給學生，以增加學生學習的興趣。
- (2) 適時增加數學人文歷史的簡介。經由數學發展史的適度簡介，一方面加強學生數學人文面向的常識；一方面又可去除數學是如此嚴肅、如此冰冷、如此令人頭痛的想法。使數學教學之中注入一股清流、生氣，使學生不致於對數學只有嚴肅無趣的失望感覺。
- (3) 加強根本概念源頭的引進。由具體實物到抽象化，到概念的建立，到基模的建構；在教學過程中皆要時時注意其『具體→抽象→概念→基模』的順序，切不可在教學過程中，直接以定義方式入主題。雖這是最簡捷、最精確之方式，但對學生而言，這只是將學生暴露在危機退縮之中。試想才一個虛數“ i ”的概念，就要多少有名的數學家參與探討並且花了百來年歲月才能將它的結構順利地系統化到成熟狀態，從而能以完美的現狀呈現在學生的面前。因此，教學中引導的順序是很重要的。

總之，蕭先生的大作，給筆者很多的啟發，同時也提醒筆者以後在數學教學中及學生數學學習的過程中，要有更進一步的調整。尤其在數學教學中注入一股人文面向的引導，更可增加學習者的學習興趣；希望以後學習者在數學學習的過程中是快樂的。

四、讀後感之三（蘇慧珍撰）

筆者從大學時代接觸數學教育以來，看到許多數學教育家倡導生活數學，而由於受到他們的影響，筆者及同輩們也秉持同樣的想法。但是，處於升學主義下，向傳統舊式教學方式屈服的朋友卻不在少數，當然，筆者也看到對於數學具有非一般熱忱的前輩們仍在努力著，希望將數學這一門有趣的學問，更淺顯地教授學生。筆者也曾自許，希望能帶給學生更平易近人的數學知識，但是，受到本身學淺及升學進度壓力下，常常會覺得心有餘而力不足，尤其當學生問起「為什麼要學數學？」這一類問題時，總是支吾其詞，無法給予令人滿意的答案。直到讀了《為什麼要學習數學？》一書後，心中的盲點似乎越來越小。

本書由蕭文強先生試著從一個不需要使用數學作為工具的人的眼光，來看待「為什麼要學習數學？」這個問題，因此，內容大部分都相當淺顯易懂，尤其適當的引入數學發展史，指出數學的嚴謹性是因時而異、數學的發展是集體智慧的結晶，數學的各部門構成有機體且彼此密不可分等，讓讀者們深刻的感受到數學是相當具有文化性的。而在最後一章，作者舉了許多數學在實際問題上應用的例子，更讓人深刻的感受到數學的應用性。筆者尤其對於本書第三章—『對數學發展史的認識』—之內容相當有共鳴，作者所舉例的，幾乎都是筆者曾學過的內容，因此，重新咀嚼一番後，更讓人有另一番不同於以往的感受，相信其內容一定

能說服更多人相信，數學除了作為工具以外，更是一種具有文化的活動。因此，如果我們想將生活化的數學帶給學生，筆者目前的感想是：

(一) 從數學發展史著手，培養教師本身的數學文化修養。

(二) 在課堂上適時引入數學應用性問題引起學生注意。

對於第一點，筆者目前正在努力中，而對於第二點，筆者認為，如果一學期中有一、二次很確切的引入數學史，會讓學生的感受很突兀，因此，最好一開始作長時期的規劃、短時間的呈現，讓數學史的痕跡不要太明顯，學生的接受度會較高，否則，許多學生會給予肯定、但不信任的回應。(所謂不信任是指，對於未來大考是否有幫助而言。)

在此順帶更正本書中由研討會同伴們所發現的部分錯誤與欲多加說明之處：

(1) 在『數學的發展是集體智慧的結晶』的舉例中，《原本》的「第五公理」應改為「第五公設」。

(2) 在『數學的各部門構成有機體』的舉例中，診斷病症的圖(53)及圖(54)中的黑點，指的是病患檢驗數據為(8, 4)的所在位置。

五、尾聲

從希臘時代以降，究竟數學是如柏拉圖所認為，「數學觀念是哲學觀念的基礎，也是認識「理型世界」的必備條件」。還是如亞里斯多德認為，「數學仍然必須附著在物質裡面，數學知識是「物質世界」通往「理型世界」的橋樑，在理型與物質之間居於中介的地位」(蘇意雯，1999)，就是一個見仁見智的問題。至於今日數學文化的觀點，則提醒我們注意數學的發展脈絡，以及了解在不同的社會中所發展的數學理念 (Grugnetti, Lucia & Rogers, Leo, 2000)。如果吾人能夠認識到在特別的時代、地域及條件下會孕育某些學者和數學理念，那麼，這些將能幫助我們對現行知識的了解。為學生開啓「比較」的可能性以及讓學生們能夠了解文化的多樣性，進而了解數學、喜愛數學，也正是 HPM 的目標。

六、參考資料

蕭文強 (1992). 《為甚麼要學習數學?》，香港：新一代文化協會。

蘇意雯 (1999). 〈數學哲學：柏拉圖 VS. 亞里斯多德〉，《HPM 通訊》2(1)：4-6。

Grugnetti, Lucia & Rogers, Leo (2000). "Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues", Fauvel, John and Jan van Maanen(eds.), *History in Mathematics Education* (Netherlands: Kluwer Academic Publishers), pp.39-62.