

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（實踐國中）唐書志（百齡中學）
 蘇俊鴻（新店高中）洪秀敏（新竹高中）洪誌陽（新竹高中）
 陳鳳珠（土城中正國中）謝佳叡（台師大數學系）
 林會億（台師大數學系研究生）黃清揚（台師大數學系研究生）
 葉吉海（台師大數學系研究生）黃哲男（台師大數學系研究生）
 陳彥宏（台師大數學系研究生）林曼志（台師大數學系研究生）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 阿貝爾兩百年與兩百年的阿貝爾
- 《勾股學隅》、《幾何通解》
文本研讀內容摘要
- 遊記
天津記行
天津之旅
天津師大行旅
PME26 英國行
- 畢業心得
戴煦與我
感恩的心—寫在論文發表之後
論文寫作心得

阿貝爾兩百年與兩百年的阿貝爾

台師大數學系 洪萬生教授

一、向大師學習！

六月六日，我應邀前往挪威參加 Abel 兩百週年誕辰紀念研討會。這一會議，是挪威數學界一系列紀念天才數學家阿貝爾 (Niels Henrik Abel, 1802-1929) 的活動之一。此外，還包括其他數學學門的研討會。由於這一兩年來，挪威政府為了紀念阿貝爾，幾乎是全面性舉辦各種活動，其中包括：投入兩千兩百萬美元設置『阿貝爾數學獎』（作為諾貝爾獎的對等部份，明年起開始頒贈），以及發行阿貝爾紀念貨幣與郵票等等。甚至於在今年一整年內，一份主流報紙每天都闢有一個專欄，提供中小學生可以處理簡易的數學問題。這些都可以解釋何以這一兩年來，有關阿貝爾的紀念活動報導，在全國性的報紙上出現頻率多達了一百五十次。

筆者參加的這一場研討會稱作 “Study the Masters – The Abel-Fauvel Conference”，會場設在 Kristiansand（奧斯陸的西南方海港）的 Gimlekollen Mediacentre，由 Agder 學院 (Agder University College) 的 Otto Bekken 教授主辦。由於 1988 年在同一地點舉辦過同一名稱的研討會，John Fauvel (1947-2001) 出過很多點子，所以，這一次研討會也一併紀念他的英年早逝。

十四年前八月，在巴黎 ICME-6 (the sixth International Congress of the Mathematics Education) 之後沒多久，Bekken 在 Kristiansand 召開了一個名叫 “Learn from the Masters!” 的研討會，以 HPM (數學史與數學教學之關連) 為主旨。當年，John Fauvel, Jan van Maanen, Michel Helfgott, Fred Rickey 與蕭文強 (Siu Man Keung) 等人，都參加了此一盛會。由於 Abel 墳塋就在不遠的 Froland 教堂，所以，Bekken 安排了一場『朝聖』之旅，並由蕭文強撰寫、朗讀了一篇感人肺腑的追思短文。

在那個特別的場合，蕭文強提及他遠從香港跋涉了 16919 公里才到達挪威，或許正是巧合吧，他還指出：一個秩 (order) 為 16919 的群一定是阿貝爾群 (abelian group)，因為 16919

= 7•2417。今年，我有幸從台灣應邀參加 Abel 兩百週年誕辰紀念活動，儘管路程之遙遠甚於香港，然而，卻覺得收穫頗豐，尤其有機會見識北歐的數學史與 HPM，更是深感難得。

事實上，此一研討會乃是 HPM 2004 Uppsala (瑞典，2004 年 7 月 12-17 日，Uppsala 大學) 的暖身會議 (A Nordic pre-conference to the ICME-10 and to the HPM satellite in 2004)。因此，除了 Harold M. Edwards (NYU, USA), Fulvia Furinghetti (現任國際 HPM 主席，Genova, Italy), David Pengelley (NWSU, USA), V. Frederick Rickey (USMA, USA) 與筆者之外，其他參加者絕大部分都是斯堪地那維亞半島的數學史家與 HPM 專家。其中，年輕與會者有幾位甚至大學才剛畢業，就能夠在台上侃侃而談他(她)們的學位論文，實在令人對 HPM 的未來感到樂觀與鼓舞。根據 Bekken 的轉述，Bjorn Smestad 來台參加“HPM 2000 Taipei”回挪威之後，特別撰寫了一篇會議報導文章，其中他推崇我們的籌備工作，相當受到北歐同行的矚目。此外，他也提及我們如何鼓勵研究生上場，帶給北歐朋友很大的啟發。以本次會議為例，他們顯然有意複製此一經驗，而資深的學者也利用此一良機，與後起之秀從容地交換研究心得，呈現了一般學術研討會難得一見的溫馨畫面！

二、踏著阿貝爾的足跡

在正式提交論文(6月12-15日)之前，我們幾位『外賓』先應邀到奧斯陸盤桓幾天，參加當地的阿貝爾紀念活動。從六月八日起三天，我們幾位來自北歐國家之外的學者與眷屬，就在 Bekken 夫婦及研究生 Reindar Mosvold 的嚮導下，參觀了挪威偉大畫家 Edvard Munch 博物館、維京船 (Viking Ship) 博物館以及 Kon-Tiki 博物館，後兩者的文物展示，都充分表現了挪威人作為維京人後裔航向大洋的膽識與氣魄，實在令人印象深刻。此外，我們也前往奧斯陸大學參觀阿貝爾紀念活動，在校園中瞻仰了阿貝爾銅像及其基座的雙紐線圖，也在文物陳列室中聆聽 Arild Stubhaug 教授對阿貝爾生平事蹟的介紹。按 Stubhaug 以《阿貝爾與他的時代》(Niels Henrik Abel and His Times. Called Too Soon by Flames Afar, 1996 (挪威文版), 2000 (英文版)) 享譽國際數學史界，目前又接受瑞典政府委託，準備撰寫該國的偉大數學家 Mittag-Leffler 傳記。結束後，有一群中學生簇擁而入，原來是他(她)們的老師帶隊，前來參觀阿貝爾的文物。

在奧斯陸這幾天內，最有意義的行程，莫過於參觀阿貝爾的高中母校 (The Cathedral School of Oslo)。這所教會學校有將近八百五十年的歷史，藏書可以溯及十五世紀歐洲印刷術剛剛發明之後不久的著作，譬如我們就有幸目睹刻卜勒的《論世界之諧和》之第一版。此外，該校為了紀念他們的傑出校友阿貝爾，特別將他當年就學時所借閱過的數學家著作陳列。其中，我們可以發現他在高三畢業前，已經讀遍了包括牛頓、尤拉、拉格蘭吉 (Lagrange) 以及哥西 (Cauchy) 等大師的經典作品了。無怪乎他上大學時，就已經開始著手解決當時最尖端或前沿的數學問題，譬如五次方程的根式解了。

阿貝爾喜愛研讀數學原典，或許正是這一個時期所養成的習慣。後來在 1826 年，他在一本巴黎筆記本中 (Paris Notebook) 邊緣空白處，由於深受拉普拉斯 (Laplace) 《天體力學》(Celestial Mechanics) 之感動與啟發，特別寫下：『顯然，拉普拉斯所寫下的任何理論，將會遠遠超越次等數學家的研究成果。因此，對我來說，假使吾人想要在數學上有所進展，那麼，他就必須研讀大師而非他的徒弟【之作品】。』(It is readily seen that any theory by Laplace will be superior to all produced by mathematicians of a lower standing. It appears to me that if one wants to make progress in mathematics one should study the masters not the pupils.)。而這，也

正是本次研討會（乃至於 1988 年的那一次）之主題。

六月十一日，我們一行人從奧斯陸坐車前往西南方的 Kristiansand，途中特別造訪阿貝爾臨終臥病在 Froland 的住處。1829 年 4 月 6 日，阿貝爾因肺結核而病逝於朋友 Smith（一位當地著名的鑄鐵工廠老闆）寓所，病榻旁陪伴者有他的未婚妻 Christine Kemp，後來嫁給他的好友 Baltazar Mathias Keilhau。當 August Leopold Crelle 十萬火急地寄到柏林大學數學系教授聘書時，已經是阿貝爾去世兩天以後的事了。我們除了參觀他的紀念碑（於 1905 年豎立）、他臨終的病榻之外，也前往 Froland 教堂的墓園憑弔。根據當地挪威人的轉述，阿貝爾臨終時曾大聲慟哭，痛恨天不假年，聽來令人鼻酸，否則，他一定可以為數學界與他的國家，成就更巨大的貢獻！根據史家研究，阿貝爾不僅是一位偉大的數學家，同時也是一位有教無類、諄諄善誘的好老師。難怪現代的挪威數學老師，會被阿貝爾的精神所感動，譬如說吧，在 Froland 地區中學任教的 Ivar Salvesen 為了紀念阿貝爾，兩年前就率先發起區域性的 Kappable 數學競賽（以班級為單位作 project），目前已經發成為全國性的數學競賽了 -- 今年的競賽主題是『足球的幾何學』，則已經頒獎落幕了。

六月十一日傍晚，我們抵達 Kristiansand 的 Gimlekollen Mediacentre（一所私立的媒體學院），並下榻其招待所，碰到熟識的 Fulvia Furinghetti（國際 HPM 主席）與第一次見面的 Peter Ransom（國際 HPM Newsletter 編輯）。有鑒於筆者在台灣持續發行的《HPM 通訊》已將近五年（而且內容份量可觀），Furinghetti 與 Ransom 決定在即將發行的 HPM Newsletter 網路版中，連結我們的《HPM 通訊》，可見我們辛苦的耕耘，已經獲得海內外的迴響與肯定了。事實上，有鑑於我們 HPM 團隊（我們自稱『公館團隊』）的可觀工作成果，上海華東師範大學的張奠宙與幾位年輕的數學史家，也決定自創『海派的數學史與 HPM』品牌。不過，這是後話，以後有機會再說。

三、北歐與世界的對話：以 HPM 為例

六月十二日，研討會正式開幕。一開始，除了媒體學院主管致歡迎詞之外，Bekken 特別介紹了所有與會者，讓大家彼此熟悉。其中，除了包括筆者在內的七位『外賓』之外，其他將近二十五位都是北歐的學者與研究生，由此可見，這是一個迷你型的研討會。其實，這也是 Bekken 一開始的規劃，因為他所掌握的贊助款，僅夠二十五人左右開銷（還要涵蓋我們幾位在奧斯陸的訪問費用）。不過，會議規模小型了之後，參與者的互動頻率自然就增長好幾倍，這對於年輕學者或初入門者，絕對是最佳的學習機會，值得喜歡搞學術大拜拜者三思！

在三天半的研討會中，上午各場的報告時間為四十分鐘，保留給外賓或資深學者。第一天的論文報告者包括了 Otto Bekken, Fulvia Furinghetti, 筆者與 Aanders Tengstrand。首先，Bekken 補充了十四年來史家對於阿貝爾的更多了解。緊接著，Furinghetti 扼要說明了國際教育界有關 HPM 研究與教學的概況，當然也提及她在義大利 Genova 大學結合 HPM 與 PME 的努力與成果，所謂 PME 是指數學教育心理學及其國際研究群，Furinghetti 在該團體中也十分活躍。然後，則是則由筆者上場，一開始，我介紹了本系大四學生張耀元為《國語日報》所寫阿貝爾傳記，以及《HPM 通訊》的網頁，然後即以“A Teaching Experiment with Prop. IX. 20 of the Elements”為題，對於本系大四學生如何對比與反思『質數有無窮多個』的古典 vs. 現代證明，提出一個初步的研究成果。由於歐幾里得 (Euclid)《幾何原本》(The Elements) 中的古典證明已經很少人注意，所以，我的報告引起與會者的熱烈討論，他們對於學生（而

且即將擔任實習教師)的反應十分好奇,也提出了很多有意義的評論。報告完之後, Bekken 與 Edwards 還特別向我致意,對於古典文本引入課堂的策略,並且引發學生在認識論與方法論方面進行比較深刻的反思,他們都深有同感。對於筆者自己來說,我倒是沒有刻意言宣向歐幾里得這一位大師學習的好處!儘管如此,在我之後報告的 Anders Tengstrand 卻乾脆以“Back to Euclid”為題,說明他如何利用美國 Clark 大學數學系所佈置的『幾何原本網站』來進行教學。有興趣的讀者,不妨參閱

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>。

第二、三天上午登場的,主要是來自美國的 Fred Rickey、David Pengelley、Harold Edwards 與 Michel Helfgott。前兩位都根據他們的大一微積分教學經驗,舉例說明他們如何將歷史融入教學。任教於西點軍校的 Rickey 兩天的報告都是“*We Must Use History in Teaching Mathematics: Examples for the Calculus Classroom*”,這一位得過 MAA 等所頒贈的傑出教師獎的學者,經常利用數學史上的案例,在課堂上製造認知衝突,從而獲得極佳的教學效果。Rickey 博學多聞,隨身攜帶筆記本,走到哪記到哪,對於很多數學史實,如數家珍,令人豔羨。

相形之下,任教於新墨西哥州立大學的 Pengelley,卻堅持使用古代數學文本。他現身說法,指出他從 1989 年開始與同事 Reinhard Laubenbacher 合作,在該校數學系一門大一榮譽課程中,如何利用原始文本,引領學生體會數學發現之美!他的第一次報告以“*The Bridge between the Continuous and the Discrete via Original Sources*”為題,追溯阿基米德、費瑪、巴斯卡、伯努利一直到尤拉等等,說明他們如何代代相傳,在連續與離散之間搭橋,而在最終由尤拉集大成,掌握數值乘冪的總和公式 (formulas for sums of numerical powers)。在隔天的第二次報告中, Pengelley 則以“*A Graduate Course on Using History in Teaching Mathematics*”為題,說明他們的數學史與數學教學的結合,已經成功地升級到研究所層次了,而主要的刺激與激勵,則來自 1995 年開始,他們有機會主持好幾個在地的 K-12 年級數學教師工作坊。其中,他們指導教師運用古代數學文本,去發展後者在課堂中的『融入歷史的教學模組』(historical teaching modules),請參考他們的網頁:<http://math.nmsu.edu/~history/projects.html>。有了這些經驗,新墨西哥州立大學數學系將著手成立數學教育博士班,訓練 HPM 的學術研究人才。

此外,任教於紐約州立大學 Oswego 分校的 Michel Helfgott 則也開始介入中學數學教師的培育工作了。他以“*Ten Great Books in the History of Mathematics Teaching*”為題,說明他為這些未來的中學教師提供此一課程的動機、構想與實施成果。在隔天的報告中(講題:“*A Non-calculus Proof of the Fact that Fermat’s Principle of Least Time Implies Snell’s Law*”),他則是指出向大師學習不僅有利於教學內容的豐富,同時,也可以打開知識的新面向。

最後,則是紐約大學數學系的 Harold M. Edwards,他的兩個講題分別是:“*What Does it Mean to Solve a Polynomial Equation?*”與“*Abel’s View of Abel’s Theorem*”,對於阿貝爾與加羅瓦這兩位天才數學家的洞察力,有相當深刻的闡述。筆者初見 Edwards 於 1985 年紐約科學院的數學史與科學史演講會場,當年我就讀於紐約市立大學。出國前,我老早知道他採取歷史進路,撰寫了好幾部膾炙人口的著作如:*Riemann’s Zeta Function* (1974), *Fermat’s Last Theorem* (1977), *Galois Theory* (1984),我甚至於還讀過他所寫的『線性代數』與『高等微積分』教科書呢。Edwards 出身哈佛,任教 NYU 幾十年來,從未有機會指導研究生撰寫數學史論文,然而,喜好數學史並融入教學,一路走來,始終如一。

另一方面，Reinhard Siegmund-Schultze 也提交報告：“How Can We Use Descartes *La geometrie* for the Teaching of Fundamental Mathematical Notions and an Improved Understanding of the Mathematical Method?”。可惜，由於他的報告時間排在最後一天（六月十五日）早上，我必須在當日一早離開返回奧斯陸趕搭返國班機，無法聆聽他的報告，至感遺憾！德國籍的 Siegmund-Schultze 原任教於柏林大學，是國際學界頗為知名的數學史家，兩年前才受聘到 Agder 學院來擔任數學史教授 (professor of the history of mathematics)。可見，該校在 Bekken 的主導下，爲了強化數學教育博士班的教學陣容，已經將數學史列爲主要的訓練學科之一了。此外，2004 年主要負責承辦 HPM 國際研討會的 Sten Kaijser 也以 “Some Important Problems in the Development of Mathematics” 爲題作了簡短報告。他目前是瑞典數學會的副會長，雖然主要研究領域是泛函分析與調和分析，但是對數學史卻一直保持了濃厚的興趣。

四、初試啼聲的研究生

下午的報告時間從早上的 40 分鐘減爲 30 分鐘，提交報告者都是北歐在地的學者 / 研究生。這些研究生的報告內容儘管有一點生澀，但都充滿了在地的特色，可以體會他們的老師輩的 HPM 願景。譬如 Kristin Bjarnadottir，就以 *Algorismus*（約 1240-1270 年寫成）一書爲例，說明 12-14 世紀之間，基督徒如何將印度阿拉伯-數碼及其演算法則引進冰島。Kajsa Brating 來自瑞典 Uppsala，她的報告題目是 “Malmsten’s Proof of the Integral Theorem – An early Swedish paper on Complex Analysis”，介紹瑞典數學家 C. J. Malmsten (1818-1886) 如何發現哥西證明的不足，而企圖提出邏輯嚴密的證明。Johan Prytz 也來自瑞典 Uppsala，他的題目是 “Farewell Newton and Leibniz, welcome to school – A didactical study”，針對瑞典數學家 Emil Fogelmark 在 1873 年所寫的一本微積分教科書，分析它的內容並據以理解其教學法之相關脈絡（譬如作者如何考量哥西的經典著作 *Course d’Analyse*）。在茶敘時間之後，Bjorn Smestad 以 “Historical Topics in Norwegian School Books” 爲題，指出挪威一至十年級學生數學教科書內容中的數學史比例，結果發現只有 1-2% 的份量，其中還有史實的謬誤發生。此外，有一些教科書只納入歷史上的記數系統（尤其還只是羅馬記數法）而已。再者，對於哪些數學家應該選入成爲角色模範也沒有共識，奇怪的是，阿貝爾這一位挪威的民族英雄，竟然也幾乎不曾現身在這些教科書之中。不過，Smestad 認爲與其光是批評，不如起而行，他目前已就機率此一單元，考慮如何將相關數學史融入教學內容之中。

第二天下午，分別由 Claire Vaugelade Berg、Steffan Rodhe, Marit Lahn-Johansen 與 Ivar Salvesen 作報告。Berg 是法國人，目前正在 Bekken 的指導下，撰寫她的碩士論文，她的報告題目是 “Evaiste Galois”。Rodhe 是瑞典 Uppsala 大學的高級講師，剛剛在六月三日通過博士論文答辯。在他的報告中（題目爲：“Samuel Klingenskierna (1698-1765) – A study of his life and mathematics until 1731”），他簡要地說明了十八世紀這一位瑞典最重要數學家的生平事蹟，這位傳主可能擔任歐洲第一位物理教授 (Professor of Physics)，時間是 1750 年。Lahn-Johansen 目前任教於 Bergen 的一所高中，也正在 Bekken 的指導下撰寫碩士論文，她的題目是有關十八、十九世紀挪威數學家 Frederich Christian Holberg Arentz (1736-1825) 的故事，這一傳主曾任教於 Bergen 的教會學校。至於 Salvesen，則是前述的 Froland 地區的中學教師，他以一位中學教師的身份，上台報告 Kappable 數學競賽的內容，也講述了阿貝爾的生平故事。

第三天下午，提交報告者計有馬璵 (Ma Li, 瑞典籍的華人教授)、Peter Ransom、Steinar

Thorvaldsen 與 Bengt Johansson 等人。馬璵的講題是“Magic Squares in Ancient Times and Modern Classroom”，提及她在 Linköping 大學教授『線性代數』時，如何在例證中引入縱橫圖（或魔方陣）以提升學生的興趣。Ransom 則打扮得像他的傳主十六世紀的 John Blagrove，他的講題是“John Blagrove, gentleman of reading”。根據 Ransom 所拍得的照片，Blagrove 在教堂中的紀念雕像中出現了柏拉圖五種多面體，這是英國僅見的第四處類似雕飾品。Johansson 以“Kepler’s Contributions to Computing and Computer Science”為題，報告了他所研究的刻卜勒 (Johann Kepler) 之數值計算，其中還提及刻卜勒使用的計算機，可能比巴斯卡所發明的還早 20 年。

五、感想

綜觀這一趟挪威之旅，收穫良多，非常值得回味。首先，當然是對阿貝爾的脈絡的一個更貼近的認識，對於他的數學貢獻的一個更深刻的體會。回想三十幾年前，我還是一位生嫩的大二學生時，初讀高木貞治的《近代數學史談》，始終無法理解何以雙紐線在橢圓函數研究中佔有那麼重要的地位，又何以阿貝爾與傑可必 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1805-1851) 對橢圓函數產生那麼大的興趣？其次，我對當時柏林大學的 Crelle 更是另有一番評價。他創辦 *Crelle Journal* (現在易名為 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*) 固然為柏林大學的即將成為世界數學中心鋪路，不過，最重要的，卻是阿貝爾的所有論文都是在此一學報發表。或許阿貝爾英年早逝後即享盛名，也正是柏林學派崛起的背景下，他與傑可比競爭橢圓函數研究的一個自然結果吧。

不過，北歐儘管位處邊陲，但是，從第十世紀開始通過基督教與西歐接軌，到十九世紀時，科學、文學與藝術應該都已完全融入西歐體系之中了。以數學為例，當時十九世紀德國數學（以柏林大學為中心）逐漸崛起之際，阿貝爾適時到訪所引爆的不凡才氣，為未來柏林學派留下了美好的願景！另一方面，阿貝爾的英年早逝，並未阻斷他的挪威後濟者之數學膽識，在十九世紀的挪威數學史上，還有兩位偉大的數學家：Sophus Lie (1842-1899) 與 Lydvig Sylow (1832-1918)。事實上，在北歐學術圈之中，丹麥（譬如量子力學的哥本哈根學派）與瑞典（譬如斯德哥爾摩大學的 Gosta Mittag-Leffler）也都有令人驚奇的表現，值得我們效法與學習。

回到數學史與 HPM 上面來。由於 2004 年的 ICME-10 以及其 HPM 與 PME 衛星會議，都將在兩年後分別在丹麥與瑞典召開，所以，如前所述，本次研討會可以視之為 HPM 的會前會。正因為如此，筆者有幸應邀參加，得以深入瞭解北歐乃至於美國同行的工作實況，並思考將來促成 HPM 國際合作的可能性，實在是難得的一次旅程。期待 2004 HPM 國際研討會召開時，國內學者也能到場，提出令人驚豔的研究報告。最後，請容許筆者在此先感謝挪威政府以及我國國科會的部份旅費贊助。

參考文獻

- Bekken, Otto (1988). “Read the Masters – Read Abel! A biographical sketch”.
- Dunham, William (1999). *Euler: the Master of Us All*. Washington, D.C.: MAA.
- Jackson, Allyn (2002). “Norway Establishes Abel Prize in Mathematics”, *Notices of the AMS* 49 (1): 39-40.
- Lauben, Reinhard & David Pengelley (1999). *Mathematical Expeditions: Chronicles by the*

Explorers. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Studhaug, Arid (2000). *Niels Henrik Abel and His Times: Called too soon by flames afar*.

Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag.

《勾股舉隅》、《幾何通解》文本研讀內容摘要

北縣福和國中 黃清揚老師

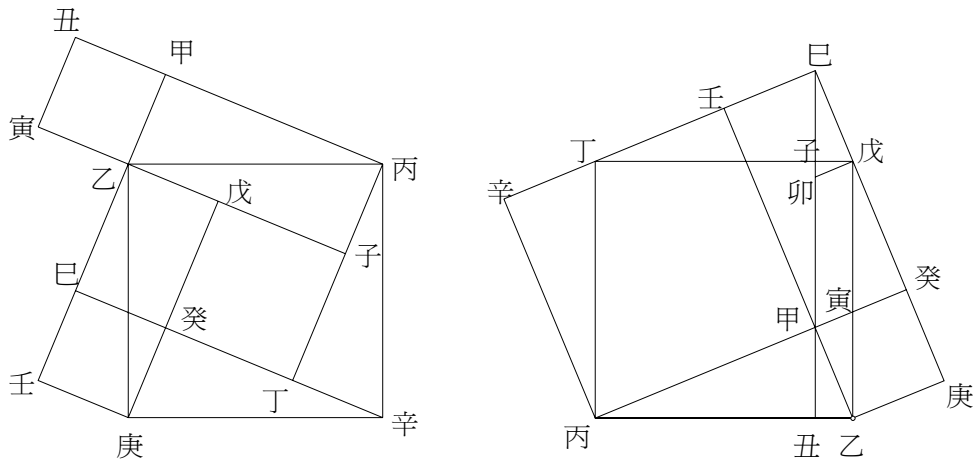
一、作者簡介

梅文鼎（1633-1721），字定九，號勿庵，安徽宣城人。他生於明崇禎六年。他自幼受家庭教育，九歲（1641）熟五經，通史事，早年拜塾師羅王賓，15歲（1647）補博士弟子員。約在29歲時，梅文鼎跟隨倪觀湖（1616-？）學習明代頒用的《大統曆法》，收獲甚大，不久即完成《曆學駢枝》，這是他的第一部著作。縱觀梅文鼎的一生，除經人推薦曾參加編寫《明史·曆志》的工作之外，他終身鑽研數學和曆法，不曾有過任何官職。此外，他也得到不少朋友的幫忙和支持，晚年更得到康熙皇帝的讚譽，使得他的學術地位更加穩固。

梅文鼎生平著述有百種之多，幾乎涉及到當時已傳入的西方數學的各個方面，並且也作到了初步的消化和闡發，其所著各書大多根據《幾何原本》（前六卷）、《同文算指》以及《崇禎曆書》。他去世之後，魏荔彤的兼濟堂刊刻了《梅勿庵曆算全書》，這是魏氏聘請梅文鼎的朋友、著名數學家楊作枚編輯整理的。梅文鼎之孫梅穀成晚年認為這套書「仇校不精，編次紊亂」，於是做了增減合併，更名為《梅氏叢書輯要》（1761）。以下介紹收錄在《梅氏叢書輯要》中第十七卷的《勾股舉隅》及第十八卷的《幾何通解》，兩者著作的年代約在18世紀後期。

二、《勾股舉隅》內容摘要

勾股舉隅為梅文鼎研究中國傳統勾股算術的著作，全書一卷，其中的主要成就，是對勾股定理的證明和對勾股算術算法的推廣。書中首列「和較名義」，其次以兩幅「弦實兼勾實股實圖」來說明勾股定理（如下圖），其論說的根據是出入相補原理。



在問題的陳述上，本書以問題、法、論曰為主，法為算法，論曰為證明，若有另外的算法，則再加上「又法」及「論曰」，部分題目則給出了「又簡法」，即速算法。書中的每個問題皆附上圖形，圖形的目地主要是用來說明出入相補法。在內容上，本書大致上可分作兩部分，一為勾股算術，另一主要為勾股測量。前者共列 14 題，後者則為 6 問。前者內容如下：

編號	題名	已知條件 (a 為勾, b 為股, c 為斜邊)
1	勾股求弦	a, b
2	勾弦求股	a, c
3	勾股積與弦求勾股	ab/2, c
4	勾股積與勾股和求勾股	ab/2, b+a
5	勾股積與弦較較求諸數	ab/2, c-(b-a)
6	勾股積與弦較和求諸數	ab/2, c+(b-a)
7	勾股積與弦和較求諸數	ab/2, (b-a)-c
8	勾股積與弦和和求諸數	ab/2, c+(b+a)
9	勾弦和股弦和求諸數	c+a, c+b
10	勾弦較股弦較求諸數	c-a, c-b
11	勾股較弦和和求諸數	b-a, c+(b+a)
12	勾股較弦和較求諸數	b-a, (b+a)-c
13	弦與勾股和求勾股用量法	c, b+a

其中「勾股積與弦較較求諸數」(5)、「勾股積與弦較和求諸數」(6)、「勾股積與弦和較求諸數」(7)、「勾股積與弦和和求諸數」(8)、「勾股較、弦和和求諸數」(11)、「勾股較、弦和較求諸數」等六個問題在歷史上是首度出現。此外，梅文鼎對這些題目中所給的算式中，最重要的是

$$[c - (b - a)][c + (b + a)] = [(b + a) - c][(b + a) + c] = 4\left(\frac{ab}{2}\right),$$

梅文鼎對其評價很高，他認為此式「乃立之根也。而其理皆具古圖中，學者所宜深玩。」這裡的「古圖」指的即是趙爽注《周髀算經中》之「勾股圓方圖」，對此式的證明也是利用此圖來完成的。

值得注意的是，「弦與勾股和求勾股用量法」一題中所用的尺規作圖之方法，與徐光啓《勾股義》中「勾股求容圓」來作比較，可以發現梅文鼎在尺規作圖的概念已相當正確，顯

示梅文鼎對《幾何原本》有一定深度的了解。另外，從梅文鼎在測量問題上所使用的出入相補法來看，其內容相當貼近楊輝乃至於劉徽的作法，有別於明末西方傳入的測量方法，這一點頗值得我們來作後續探究

三、《幾何通解》內容摘要

《幾何通解》的主要訴求是「以勾股解《幾何原本》之根」，梅文鼎的作法是採用傳統的勾股方法來解《幾何原本》前六卷的部分命題，其內容大致如下：

編號	內容
1	解幾何二卷第五題、第六題
2	解幾何二卷第七題
3	解幾何二卷第八題
4	解幾何二卷第九題
5	幾何二卷第十題
6	解幾何二卷第十一題，六卷第三十題，四卷第十、第十一題（解理分中末線之根）
7	解幾何六卷第二十七題
8	解幾何三卷第三十五題
9	解幾何三卷第三十六、三十七題
10	解幾何三卷第三十二、三十三增題

其中，梅文鼎花了相當多的篇幅說明「理分中末線」（即黃金比例），其曰：「幾何不言勾股，然其理並勾股也，故其最難者以勾股釋之則明。惟理分中末綫似與勾股異源。今為游心立法之初，而仍出於勾股。」由此，可見梅文鼎對傳統勾股術的重視。

四、參考文獻

- 孔國平，〈會通中西的天算家梅文鼎〉，收入吳文俊主編《中國數學史大系》第七卷（北京：北京師範大學出版社，1999），頁 139-177。
- 梅文鼎，《幾何通解》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。
- 梅文鼎，《勾股學隅》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。
- 劉鈍，〈梅文鼎在幾何學領域中的若干貢獻〉，收入梅榮照主編《明清數學史論集》（南京：江蘇教育出版社，1990），頁 182-218。
- 劉鈍，〈《勾股學隅》、《幾何通解》提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷四（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 431-432。
- 錢寶琮，〈梅勿庵先生年譜〉，收入《李儼、錢寶琛科學史全集》第九卷（瀋陽：遼寧教育出版社，1998），頁 107-139。

天津記行

參加第五屆漢字文化圈及鄰近地區數學史與數學教育國際學術研討會心得

台師大數學系教學碩士班 陳冠良

距上次搭飛機已是十年光景。說實在的自覺有飛機恐懼症，十年前應說是初生之犢不畏虎，無舊基模之影響，而現今卻是學習的動力所驅動。除此之外，踏上一段未曾經歷的旅程，很自然的會讓我思索未來的方向，或許是個性使然抑或是旅人們的共同交集。

踏上地理名詞—天津

昔日的地理名詞在經過約莫十個小時的行程終於不再虛擬，由於十年前搭機的舊經驗已不復存在，只能如小書童般亦步亦趨地跟著洪老師（其實目前我們在學術上的訓練亦如此接受老師的薰陶），隨著天津師大的接機人員搭上計程車往目的地出發，初入眼簾的是偌大的道路（天津的道路多以道為名），也見了許多大樓，但相對的覺得有點空，這並非存在著任何莫名的優越感，就好像在台北的街頭，熙來攘往的人群、車流、高聳的建築中，我亦覺得少了些什麼元素？

天津的第一天

抵達了天津師大後，被安排住進了留學生宿舍（像飯店的宿舍），大致安定好後，便把握時間直奔研討會場，沒料到因議程些許變動撲了空，正好見敏皓與人正在做學術上的交流對話，就湊了上去由於語言上的相通，溝通上更加方便、親切。這使我想到了 2000HPM 時的窘境，當然這不能當作藉口，在學術的研究上不能只期望都碰上同一語言文化之人；亦不能只閉門造車，文化的多面向的體認應是做數學史研究的基本素養。對話結束後陸續看到了同行的夥伴，也與與會的學者、天津師大的研究生做些許的交流，在這樣的一個氣氛與環境之中，分享是一種常態。

就像是初生的嬰孩，對於週遭事物滿懷好奇心，我想在做學問上也應該如此。一行人相約去壓馬路，首先，當然是去天津之地標—電視塔。塔周圍是市集，宛如台灣的夜市，但規模卻比台灣一般鄉鎮的夜市小了些，天津市的橋上的霓虹燈管、高塔、大樓是堪比大都會，但與消費能力又格格不入，或許整個大環境仍在調整之中，不知整個思維的深度與廣度是否也同步演化呢？

說著說著眼見十一點半，過了天津師大門禁的時間，一千人等未入境隨俗，只落得爬牆的窘境。雖然遇見一位韓國留學生，但他只有『我不知道』三個字說得最清楚，所以也是雞同鴨講，無奈以韓國數學史為研究主題的我，韓語學習計畫尚未實施，也沒法使得上力。大伙只好使勁地爬，真難為了瓊茹、文佩、美雲了。

Wow！郭書春老師

隔天起了個大早，背起背包裡頭裝了兩本郭書春老師的大作，等待時機滿足另一種偶像情結，就如同高中時期看了幾篇洪萬生老師的文章也想一睹廬山真面目一般。當上午的議程甫告一個段落，便趨前欲向郭老師自我介紹，說時遲那時快，他就已伸出手，出人意外地說：『你是冠良是吧！』當時頗感意外，在他的細心及親切中，也蘊含了學者的風範。這亦是拖



HPM 通訊第五卷第八、九期合刊第一一版洪老師的福，才讓他有此印象，接著與他拍照時，還幽默的選擇背景與角度。

當然其間亦見到了李迪、李兆華、郭世榮、馮立升等人，這些名字想必在許多人的參考文獻中出現過，他們也都不吝於分享他們的研究成果及回答我們所問的問題。與日本學者接觸的經驗也發現相同的風格，他們更熱情的承諾回日本後，會將更多的

相關資料蒐集完備寄送到府，可惜的是這次沒有韓國學者與會。

由這次經驗使我深覺得除了教學相長外，亦要透過批判與對話來拓展思維，當然是否建立這樣的一個環境機制是非常重要的。

參訪東陵－巧遇李善蘭

整個行程中有一天是安排戶外參訪，大伙兒多數決定要往郊外路線，主辦單位安排了參訪清東陵－清朝皇帝的陵墓（含慈禧太后）。縱使當年權傾一時、叱吒風雲的人物，亦是棺槨一具、黃土一坯，但是評論一串。在參觀皇陵的地宮時洪老師還機會教學一翻，指出九章算術中的羨除（墓道）。

就如台灣風景區常見的小販，但這些小販除了販賣紀念品、水果外，仍肩負著重責大任－管理先人的墳墓。原來他們大多是滿族人，而隨著朝代的更迭，境遇亦有重大的轉變。由於每個景點參觀時間有限無法詳細看盡，也因此稍加留連難免擔擱時間，但在這麼一個時間差中，讓我們巧遇李善蘭。

在向一位小女孩買冰棒時，眼尖的徐澤林教授（目前帶領一研究生研究九數略）發現盛冰的桶子上藏有玄機，大伙仔細一瞧，原來是李善蘭的畫像，應該是從教科書中撕下來糊冰桶用的，李善蘭名字一呼真是觸動了研究數學史的人之神經，大家呼朋引伴爭相探尋，小女孩發現事有蹊翹，馬上展現生意人的機



靈，蓋起冰桶蓋，當眾宣佈一買冰才給看，此時李善蘭著實幫他掙了不少銀子，除了數學上的貢獻外，這可能是李善蘭萬萬沒想到的吧！

當車行至下一站時，車門一開，小女孩又佇立門邊，或許期望那位冰桶上的人物能再為他多掙些錢吧！令我感到驚奇的是，小女孩是騎腳踏車啊！而我們是搭巴士，我不禁會心一笑，李善蘭的威力再



HPM 通訊第五卷第八、九期合刊第一二版添一筆。回程時腦海中浮現這些場景，也浮現一些問題，或許小女孩會快樂的數著鈔票，但不解為何李善蘭有如此大的魅力，也許她也沒機會去了解李善蘭是何許人也。

天津再見－再見東京

五天的感受無法在有限的篇幅中道盡，甚而有些仍在蘊釀、沉澱中。有學術上、文化上、政治上的種種感受，也交了一些朋友。思維上的交流及衝擊兼而有之，希望有機會再一一道來。揮別天津機場時一行人似乎仍受到特別關愛（被機場人員暗中拍照），深覺對岸在整體學術環境的演化上仍要一段長時間的進程，而今 2002 天津再見，亦期盼 2005 再見東京。



天津之旅

蘭陽女中 陳敏皓老師

八月中旬（8/8－8/13），筆者隨同洪萬生教授前往天津師範大學，參加第五屆漢字文化圈及近鄰地區數學史與數學教育國際學術研討會，同行還有慶章、冠良、文珮、瓊茹與美雲。這次會議除了再次貼近數學史的情境外，也同時拓展我的國際視野，並且有機會與許多數學史家如李迪、郭書春、李兆華、羅見今、杜瑞芝等當面請益，他們的熱情與謙虛，令我十分感佩。還有，那種出現在你面前的眼見為憑（To see is to believe!）的興奮，至今回憶仍覺得十分雀躍，從與談話中，更能體會什麼是大師的器度與風範。

談到此行的收穫，除了在數學史與數學教育議題有著更寬廣的視野外，同時更了解各與會學者目前所研究的領域與方向。此外，我想還有最重要一點，就是結交志同道合的好友，例如：結識一位來自於烏魯木齊的阿米爾教授（哈薩克人），他是新疆大學數學史專家，為人風趣且友善，雖然年逾六十，但是體力充沛，仍有一股動力想學習許多數學新知。他在研討會期間從不缺席，這種好學精神很值得大家借鏡。同時，他為了在新疆少數民族（哈薩克人、回人、維吾爾人等）中傳播數學史知識，特別用哈薩克文編寫一本數學史教科書。此外，我們還認識一位來自日本的朋友－柳本浩（日本南部和算研究所）。柳本浩為人極為謙虛且熱忱，講話慢條斯理很有學者風範，他帶來日本十七、八世紀所遺留下的珍貴數學遺產照片（『算額題』，匾額內的數學問題），並且非常熱心地向我們解釋、介紹其中內容，甚至還邀請我們到當地做學術交流。

這次去天津，洪老師還提議讓文珮及我上台報告論文相關議題，我的題目是「李之藻的中西會通工作」。因此，去天津師大是一則為喜、一則為憂，喜的是有機會能出國見識一番，憂的是想到要報告就惶恐不安，畢竟自己在數學史方面的造詣是還不深入，談的上只算報告自己所學內容。但是，一到報告會場那種鼓勵勝過責難的氣氛，馬上讓報告者心情舒坦許多，

我也就在如此的情境下，完成一項任務，多位聆聽的教授與學者們，並在我報告完畢後，給予我許多寶貴的建議與應修正部份，令我感到十分被尊重與肯定，這是數學史會議令人著迷的特點之一。

除了在學術方面有紮實且緊湊的會議外，這次大會在戶外旅遊方面，也十分用心，利用假日帶領大家參觀東陵（慈禧太后陵、清朝皇陵）與天津市郊的薊縣（保有許多古蹟及唐朝佛寺），許多文物與景觀摟令人嘆為觀止！天津市不論在政治、經濟、文化、商業都占有舉足輕重的角色，它在歷史發展的過程中，其地位也是不容許遺忘，例如：天津市區內有許多民初所留下的租界區，漫步其中就彷彿置身於浪漫歐洲街道中。我們幾位當然必須把握時光將天津市逛上一圈，因此，晚上的活動並不遜於白日學術演講緊湊，幾個市區著名的景點與夜市，都有大夥們的足跡與蹤影，大家也採購得非常快意！

總之，很感謝洪老師能讓我們這一群子弟兵有機會跟班，更由衷謝謝天津師範大學作為舉辦的東道主。他們的努力與熱忱，讓我們感覺備受尊重，不論是機場接送、大會議程、餐點飲食、住宿、旅遊參訪等細節，他們都已經做了最好模範。最後，特別要謝謝徐澤林博士在我們要離開天津的早晨，還特別準備巴士並且起了大早為我們送行，如此種種都是我特別懷念「天津之旅」的原因。

天津師大行旅

桃園縣青溪國中 王文珮老師

「第五屆漢字文化圈及近鄰地區數學史與數學教育國際學術研究會（ISHME5）」於 8 月 9 日至 12 日在天津師範大學舉行，筆者在洪萬生教授的帶領下與其他幾位研究生同行，很榮幸地能夠在研討會上發表論文，是一次難得的研究學術經驗。

我們一行五人提早在 8 日到達天津（洪老師與學弟二人晚一日），非常感謝李兆華教授指導下的二位研究生在機場的引領。當天的招待晚宴上，與來自各地的數學史家共進晚餐，而哈薩克族人阿米爾教授（任教於新疆大學）驚奇地說道，我們是他頭一回見到來自台灣的人民，我們也異口同聲地回應著相同的感受，阿米爾教授熱情地將他以哈薩克民族文字所撰寫的數學史著作回送我們。雖然面對的是陌生的文字，但可以感受到世界各地數學史家的熱誠與用心。每日早上安排約二小時的大會報告議程，其餘時間則進行分組報告。大會在同一時間將報告人員共分成四組進行，每場有二十五分鐘的報告時間，報告的內容極為廣泛，有關數學史、數學文化、數學教育，所涉及的地域有中國、阿拉伯、哈薩克、日本、越南、印度。大會在 11 日安排了市內旅遊及郊區踏青兩條路線任君選擇，筆者參加郊區活動。參觀了北京郊區的東陵及獨樂寺。當天必須起個大早，歷經三個半小時的車程終於到達目的地—東陵，參觀了慈禧太后、康熙及各阿哥的陵墓，有一「倒龍為鳳」以鳳在上，龍在下的雕刻立於慈禧太后陵



墓前，這是否也算是當時女性主義抬頭的證據之一呢？遊東陵時，有著一段小插曲。一位八旗後代的年輕女孩前來兜售雪糕，洪老師眼尖地瞧見箱子外糊著印有李善蘭畫像的紙張，對我們探討數學史的一行人產生了同時性（simultaneity）的效應而驚異不已，也為女孩帶來更多的生意。

筆者以此行後即將發表的碩士論文之部分內容為題，在研討會上進行報告。三年前幸運地進入台灣師大數學教學碩士班就讀，與大夥一同學習的日子是充實而愉快，在教學之餘能夠再度進入研究所修習課程，是一件幸福的事。隨著洪萬生老師的引領，得以窺見數學史的浩瀚風貌，促使筆者在洪老師的指導之下，完成以「楊輝算書探微：一個 HPM 的觀點」為題的碩士論文撰寫工作。在初讀文本時，確有丈二金剛摸不著頭緒的困窘，一天的進度不及一頁，但在洪老師及同學的鼓勵之下，相互切磋討論，逐漸能在文字中找到閱讀的樂趣。經過這二年的學術洗禮，不論成果如何，在學習過程中有困頓、迷惑，但承蒙洪萬生、郭書春、城地茂等多位老師的協助，也終究豁然開朗，其間的個中滋味只有親身經歷才是最真實的感受，知識的進步顯然是實際的收穫之一。此外，對於加諸自身工作的態度上亦較以往坦然，視之為提供學習的好機會，工作不再只是一件苦差事，愉快的心情是處事的重要因素，這是完成論文後的另一體驗。洪老師不斷地給予鼓勵和支持的正面態度，更加強了筆者完成論文的信心和毅力，裨在往後的教學生涯中為我樹立了為人師表應有的典範，這些都是論文寫作過程中點滴累積所得。

筆者此行報告的主題是截取楊輝《乘除通變本末》下卷的「加因代乘三百題」及「歸減代除三百題」，探討楊輝算書時較被忽視的部分。楊輝在下卷以專章詳列一至三百乘法與除法的說明及例題。以數學知識的角度來看，《乘除通變本末》上卷已經說明了乘除法則，下卷將六百題捷法一一詳列，似乎顯得太過多餘而累贅；但從 HPM (Relations between History and Pedagogy of Mathematics) 的觀點來看，楊輝算書以初等實用民生數學為主要的內容，適合初學者研讀，《乘除通變本末》下卷的安排就有其存在的必要性。以筆者的教學經驗為例，中等程度學生在學習的過程中，一次的說明是不足以將所需習得的概念加以建立，加強數學例題及花費更多時間的說明，在教學過程中有實際的必要，因此，筆者提出「量變」產生「質變」的觀點。吾曾在教學過程中，曾多次非正式地對於中等程度以下的學生加強基本數學題目的示範解說，並增加接觸練習題的次數及數量，並給予難題上的解答。在一學期之後，該類學生在數學的學習成果方面有明顯進展，進而提升其數學學習的興趣，不再需要太多的外在動力，便能夠在數學領域自我學習。這更促使吾人相信，量變產生質變在教學上的作用。在場者有李迪、郭書春、程貞一等幾位教授以及數位日本學者，特別要感謝郭書春教授的稱許及指正，使吾人此行後發表在即的碩士論文更為充實。會後，日本南部和算研究所的柳本浩教授贈予他編著的「高等學校數學基礎學力調查－問題集」一冊及上一屆本研討會所發表的論文數份，希望能帶回台灣與同好者一同分享他的研究心得。

感謝大會給予研究生在國際會議上有發表論文的機會，藉此成為進入學術研究領域的試金石。而筆者有幸參與，在學習過程中產生了重要的啟發功用。在之前僅能拜讀前輩們的大作，如今能在會議上親見大師們的風采，讀者對於他們的著作領受到更深一層的意義。除此之外，有機會結識各地的學習夥伴，與研究生們相互交換學習心得，更能理解到各方的研究環境。在回程中，於香港機場巧遇中研院史語所所長黃寬重教授，黃教授在宋代史方面有深入的研究，他的著作給予筆者在碩士論文中頗多幫助，當應再次致謝。此行共費時六日，返

家時雖感到幾分疲憊，心中卻是帶著一路上的愉快心情，與家人一同分享行旅中的點點滴滴。

PME26 英國行 (7/20~7/25)

彰師大科教所博士班研究生 蕭雅慧

懷著興奮的心情，我於 7/18 搭上長榮班機飛往倫敦，主要目的是參加 PME26，順道拜訪倫敦大學的教育學院，以及夢幻中的劍橋大學，想去探訪志摩走過的足跡，尋幽訪勝。

什麼是 PME 呢？PME 是一年一度的數學教育國際學術研討會，世界各地數學教育學者與會一堂。2001 年在荷蘭，2002 年在英國，2003 年在夏威夷，2001 年數學史國際研討會 HPM 在台灣舉行，2004 年在瑞典舉行。如果每年至少參加一次國際研討會，20 年後一定會博學又多聞吧！

今年來參加 PME 的台灣人有 10 位。林福來處長曾說，來參加 PME 的人數多的話，可以引起國際學者對台灣數學、科學教育的重視，提昇我們科學教育、數學教育在國際上的地位。國際研討會最重要的就是英文，論文寫完以後要翻譯成英文，present 時要說得流利，但因為非英語系國家還是佔多數，也不必說的太快，這樣大家才可以聽得清楚。討論時，最怕的就是聽力跟不上，就怕愈慌張愈聽不懂。

想起這兩年來，我每天都訓練自己的聽力，去年我在 PME25 晚宴時曾和德國教授東南西北的聊天，沒想到今年聽英國人演講時，還是聽不太懂。這才發現，外國人說的英文，以日本人說的英文最容易懂，其次是非英語系的如德國人、荷蘭人，英國人口音，我們聽不太習慣。美國人因為是他們自己的語言，演講或討論時，雖然已經注意速度要很慢，還是比對談時快很多，因為對談時，他可以根據你的回答來調整他談話的內容和速度，所以，與外國人一對一溝通，可能不是難事，但是團體討論時，如果你顧忌別人對你的想法，也許是有時聽不太懂，或者心慌對英文沒自信，就很難達到對答如流了。我想：這是我們多數沒有留學經驗的人，要克服的心理障礙。

有一位博士班學生第一次來參加 PME，看到他的學姊在 conference 的 presentation 做的很好，說：「學姊，你為什麼能做得這麼好？」，學姊說：「我也是經過很多的努力，一步一腳印才做到的，你最初來參加 conference，可能有很多聽不懂，就當作是付學費吧！不管學會什麼，都是要付學費的。」學妹說：「如果都聽不懂，來參加 PME 能學到什麼？」，我說：「去年，我來，最大的收穫，就是認識了在台灣為數學教育貢獻的前輩，平時他們很忙，特別去拜訪他們，還不見得有時間說話，反而是在 conference 時，比較有機會請教他們，和他們談話，使我覺得勝讀十年書的感覺。同時，他們也對我鼓勵有加，告訴我，數學教育需要很多人來共同參與。參加 PME，知道要努力加強英文聽和寫，知道自己努力的方向和目標，增長了許多見識，認識了許多朋友……這些對我來說，是很寶貴的。」

學妹說：「那麼，今年呢？」「今年，知道要加強了解，要先做準備，把當天要討論的議題，先做預習；了解來參加 conference，可以了解世界各國的數學學者研究的方向和時下的熱門議題，也定下了明年努力的目標。老師告訴我，可以在這裡找到研究的題目，也可以買到國內還沒出版的書。」

老師的話，使我想起爲什麼唐朝皇帝要表彰三藏西域取經的貢獻，從前交通那麼不方便。即使是現在，書籍仍然是很重的，教授們每年不辭辛苦的出國，把最先進的學問、書籍帶回來，使我們的科學教育、數學教育能與國際學術接軌，我們學生何其有幸？我們只要努力用功就能報答師長的栽培嗎？不，我們要努力的去傳承師長的學術以及他們做人做事認真，樂於學、勤於教，一生奉獻學術的精神，弟子要去追隨師長走過的足跡。如果有一天師長走不動了，弟子要繼續走，不使學術斷層。也就是說，在學術上承先啓後，任重道遠是我們不或忘的職責。

去年荷蘭行認識了兩位大師：Alan Bishop 和 David Tall，這次英國行認識了兩位數學教育大師 Babara Joworski 和 Lyn D. English 兩位大師。Alan Bishop 很帥，鋼琴彈的好極了，David Tall 很胖，學問可以和他的身材比美，David Tall 即將來台灣師大講學，問我要不要去上他的課，我告訴他，我很樂意去上課，但是我得先請示我的指導教授。平日讀 Babara Joworski 的文章，以爲她是一個道貌岸然的老夫子，想不到她是瘦瘦的，面帶微笑，很可愛的女教授。我去參加她所主持的 workshop，人氣很旺，很多人慕名而來，主題是：投稿期刊應該注意的事項。由於語言的不適應，這堂課雖然我沒有什麼收穫（因爲在台灣，課堂上都上過了），但是能發現，Babara 上課討論的方式，很高興竟然和張靜馨教授的建構教學模式一樣。常常覺得建構教學，教師應當以學生爲中心，先設計鷹架，讓學生在老師設計的鷹架裡，無形中 step by step 的主動建構，而不是放牛吃草，放任學生毫無方向的探尋。

每一次研討會，主辦單位都會舉辦旅遊活動招待與會學者，這一次我和台灣師大博士班學生楊凱琳同遊英國的大花園。凱琳善良、聰明，反應很靈敏，一路上很照顧我，我們是忘年之交，凱琳和金鈴老師的小師妹（現在是劍橋大學的博士班學生）交談甚歡，竟也討論我的年齡，他們驚訝於我看起來比實際年齡年輕，我半真半開玩笑的說：「可能是我很認真的討論學問時，常常忘我吧！甚至於地球也忘了轉動吧！」

我們在英國的大花園裡，巧遇 Lyn D. English。她在認知和 model 很有研究，編輯了一本有關數學教育的 handbook 很受重視。我想很難得的機會，要幫她照相，但是她不喜歡照相，只好偷拍。林處長說 11 月在台灣師大舉行國際研討會，會邀請他們來。我想國內舉辦的國際研討會若能踴躍參加，實在是太賺了，既省學費又省交通費。我看到國內教授們在國外所做的貢獻超越個人的恢弘氣度，深受感動，想到自己常常爲自己的小問題打轉，不禁汗顏。

Conference 很快的結束，每一個人的行囊裡，除了厚厚四本的資料，又增加許多新書。這些學者有一個共同的嗜好，喜歡讀書，看到和自己研究有關的新書如獲至寶，毫不考慮台幣英鎊是 50：1 的匯兌，真是可愛。我們在倫敦大學教育學院主要是去買書，學的是數學教育，但是有關數學、教育學、心理學、社會學、哲學的書，都是必讀的。買書之外，最重要的還是閱讀，閱讀之外還要多寫、多思考、多討論。參加 Conference 可以認識很多學問上的朋友，當我挑燈夜戰時，天涯若比鄰，我不覺得孤單。只要有任何問題，隨時可以和世界各地的學者以 Email 討論。重要的是，我要好好磨練自己英文的聽、說與寫，因爲那是知識之鑰。

戴煦與我

中山女中 陳啟文老師

今年對我而言是個特別的一年，不僅已辦妥「離職」手續，轉換跑道，重新適應另一個教學環境。也即將在台灣師大母校，辦理「離校」手續再度畢業。雖然同樣是懷抱著愉悅的心情以及親朋好友的祝福來離開，但不同的是，前者的所扮演的是老師，只要參加各校的教師甄選，以平常心通過筆試、口試與試教，便可達陣成功。而後者的角色卻是學生，除了要修畢應有之課程外，尚需兼顧工作與學業，在完成畢業論文後，方可如願。因而在最後一年，論文題目的取材與繕寫，就是一件極為挑戰的事了。

回想兩年前，如初生之犢，一時興起，打算以「數學史與數學教學」來做研究主題，也曾想以「數學史的教材編寫」為論文的主軸，當作主體架構來探討。因此，不斷地在各家圖書館的書架間穿梭，在坊間書店到處翻閱普科讀物，試圖蒐集一些有用的參考資料。此外，自己還在原來所任教的綜合高中，首開「數學史」的選修課程，自行編寫教材、擬訂教法，面對每週二個鐘點未曾有過的教學考驗。上述的這些作為，無非不是為了想讓自己多培養一點臨場感，希望能從學生的反應中，獲得實戰經驗，好為我的論文做好鋪路的工作。然而，事情並如預期的單純！雖說「不入虎穴，焉得虎子」，不過，在數學史與數學教育交會的領域裡，不得其門而入者，通常只能說是霧裡看花，不知葫蘆裡賣什麼膏藥。而能進入這座寶山者，也別高興得太早，因為在這塊俯拾皆學問的園地中，如何取舍史料，如何將之消化吸收，編寫成教材教法，實非一蹴可幾。幸賴指導教授洪萬生老師，平時不斷地資料提供，才勉為其難地激發出些許的靈感，做出一點心得來。

只是這樣的工作，愈是深入探索，就愈覺得自己才疏學淺，力有未逮，找不到問題的核心所在。再與洪教授討論後，建議我與其把精神分散在蒐集、整理的數學史教材，又要為自己的編排取材，做合理的論證，不如先行集中火力，在一個點上著力，然後將範圍逐漸加大，見好就收。說真的！對一個新手的我而言，起先是無法體會其中的奧祕的，當選擇以晚清算學八大家的戴煦為研究對象後，這個疑問方才煙消雲散，逐漸明朗化。

因為要完成戴煦及其算學的研究，勢必得要探討他所處的學術環境，對他的治學理念與算學取向的影響，而洪老師的《談天三友》、《孔子與數學》就是最好的參考依據，倉億與鳳珠的碩士論文是最好的入門讀物。要了解戴煦的生平事蹟，就需透過其個人或友人傳記的幫忙，方能理出個頭緒，因此《疇人傳》、《傳包》以及近人所寫的專文介紹，便是我的論文延伸的觸角所在。不過，這當中最難的，應是了解當代以文字敘述的代數運算，特別是三角函數與對數函數的冪級式展開式。因此，先行消化許多學者的論文著作，再回頭釐清戴煦文本中字裡行間的實質意義，是不可或缺的工作。於是，所謂由點漸漸的擴散到面，就這麼的開始了。

但由於起步較晚，與時間賽跑極為迫切。還好！許多同學的熱心協助，著實讓我省去不少摸索的時間。還記得曾有幾次向洪老師說：「清代的割圓八線的冪級數，唸起來蠻難的！」他以兩頭嘴角微向下彎的慣用表情告訴我：「這一部分的確有點難！」也讓心急如焚的我，頓時舒坦了許多。現在想回起來，當時想必是在安撫我，好讓我這位新手亦步亦趨，更有信心地一路走下去吧！

雖然論文目前已告底定，也順利地通過口試答辯，但它帶給我的感觸與回憶，確是十分深刻。譬如在洪老師的教導下，我才了解故宮博物圖書館裡頭的『傳包』是什麼玩意兒！在

第一次目睹清代所留下來的文稿之餘，尚能享受到濃郁筆墨撲鼻的香味，也算是一種特殊的經驗。好幾次偷偷地拿下口罩（規定要戴上，以防污損善本），很小心地以鼻頭「貼近文本」不斷來回地聞，目的也只是要確定那香味來是否真地來自於當時的墨汁，渾然忘了自己來此的目的！不過，我得到肯定的答案。

近日在整理論文準備裝訂成書之前，又再度細審前後文，大膽地給自己一點期許，終於製作完成戴煦的年表，算是替自己的階段性的研究，暫時劃下個「休止符」。或許有人會問為何不是「句點」？難道戴煦還會有什麼東西可以研究？沒錯！正如恩師洪教授常常所說的，任何問題如果你深入探討，可以由不同的面向來解讀的。其實，在我的論文研究後期，也發現到在清代數學社群中，戴煦的證明方法與現在形式化證明頗值得推敲的。另外，從現在大學生對「無窮」、「極限」認知的研究報告看來，戴煦個人在此方面的見解，亦值得我們這些教育工作者去關懷的。只是此刻的我，應該先享受一下畢業後感覺才對，這些問題還是等待下回分解吧！

感恩的心——寫在論文發表之後

馬祖中正國中 王連發老師

經過兩年的努力，在業師洪萬生博士的指導之下，論文《勾股算學家—明顧應祥及其著作研究》終於完成了。回想這兩年的時間，要感謝的人真的很多，也知道前人為何要「謝天」了。

在這兩年裡，筆者在馬祖任教，而馬祖的書籍（特別是古籍圖書）資料缺乏，對於個人的論文寫作是一大挑戰。筆者在選定了以明朝數學家顧應祥做為論文的主題之後，開始了資料的收集與整理。或許是前人對顧應祥的輕忽吧，除了他的基本資料外，對於顧應祥的研究是付之闕如。在資料的收集過程裡，也找到了一些少為人所知的資訊。或許這種艱苦的過程，能夠提供給別人一個可以『比較』的空間吧。業師洪博士希望我們這一群的畢業生能夠分別寫一些想法，我就以這一段的過程來留念吧。

寫作之初，對於顧應祥的生平事蹟，只知道他是浙江長興縣人，有四本的算術著作。因此，《長興縣志》就變成我第一本要找的書籍。由於網路資訊的進步，筆者在馬祖先透過網際網路搜尋各種相關資料，終於在國家圖書館找到一本清朝初年的長興縣志，於是，利用週末的時間，搭著飛機來到台北，開始了尋寶之旅。無奈的才知道，原來那本書籍是善本書，需要平常上班時間才能借閱。下一次只好星期五，請一天假來台北了。

第二次入寶山，終於沒有空手而回了。我知道了原來這些「善本書」還有完善的管理，還有保全系統。也頭一次帶著口罩仔細地翻閱這些寶貝。找到了一些相關的資訊，從這些為起點，慢慢的鋪陳出一些輪廓。反覆的利用圖書搜尋系統

〈<http://libmail.lib.ccu.edu.tw/agent/mainpage.exe> 國內圖書館圖書虛擬聯合目錄〉，到圖書館查書籍，甚至利用圖書館館際合作系統來借閱書籍。但是，此時的資料收集猶如大海撈針，事

倍而功半。只好改弦易轍，轉移陣地到中央研究院的傅斯年圖書館，因為此地圖書是採開架式的閱覽，方便筆者把明朝相關書籍取下一一查閱。皇天不負苦心人，在這裡終於找到許多的資料。

回顧這一段歷程，其實是很艱辛的，往往耗費了一整個白天的時間，所得到的資料是只有幾個字。總之，在這一段時間之中，要能夠忍受的住那種枯燥與寂寞。因為，找久了，就慢慢的知道方法與竅門了。經過這段時間的淬練，相信以後的資料蒐集，就會簡單許多了。

在接下來的論文撰寫中，也曾經遇到許多次的瓶頸。在一開始，我一直拘泥於傳統對明朝數學的評價，不知道該如何對顧應祥下筆。直到在洪老師的指導之下，重新回到明朝歷史的脈絡中，來檢視明朝的算學，才確定了唯有「在脈絡中」的探索，才能夠找到明朝算學的意義何在，也才能夠確認顧應祥的算學成果的價值所在。

一路走來，或許是辛苦的。但是，也讓自己知道苦盡甘來的甜美。悠游於算學史的典籍之中，或許只能算是初入門檻吧。但也提供自己一個在教學之外的新天地，在往後的時間中，如何結合數學史與數學教學，是自己要思索的課題。就從 H.P.M 出發吧。

論文寫作心得

西苑高中 阮錫琦老師

碩士論文完成，領到畢業證書的那一刻，心中激起了無限愉悅的浪花，久久不能自己。回顧這三年的研究所讀書經驗，筆者個人許多心得，急切希望與大家分享。

首先，在寫作心路歷程方面，綜合起來大該有下列六點。不過，它們通常是分頭並進，沒有必然的邏輯先後順序。儘管如此，文本的解讀卻是必要條件。至於如何進行，端看個人性之所好就是了。

文本的解讀：從文章的標點符號到古文翻譯成白話文，直書文字敘述的幕級數展開式，解讀成現代的代數符號表示式。對於算學家的算學研究，除了該作者的作品要逐字研讀外，並且要同時研讀同時期相關算學家的算學作品。排列比對深入探討，並釐清當時的算學的歷史脈絡。

其他相關論文收集：上網搜尋相關文獻資料或論文題材相關的作者，誠懇地向其索取資料。例如筆者曾向李迪和李兆華兩位大師索取徐有壬相關論文，也獲得其慷慨贈書，不勝感激。雖然筆者收集與翻印的書籍近七十本，影印相關期刊更是不勝其數。後來整理發現，最關鍵性資料都是出自於洪萬生老師所提供的，諸如〈「書呆子」算學家－江蘇巡撫徐有壬〉、〈談天三友焦循、汪萊與李銳：清代經學與算學關係試論〉以及〈清代數學家汪萊的歷史定位〉等等珍貴文獻。

資料的佐證與勘誤：論文寫作在論述方面，要正反兼顧，參酌他人觀點時也要提出自己的見解，而且指出他人不足之處，更要強調自己有意義論述及研究的取向。

同好的鼓舞：平時上班忙碌又要處理家務，必須忙裡偷閒利用零碎的時間來研讀文本與寫作，難免會有點倦怠，此時不妨打電話與同門師兄弟互相打氣，切磋寫作心得。

教授的指導：筆者認為自己以厚著臉皮，勤找指導教授指點迷津，也許聽教授的一席話，勝讀十年書，所有茅塞可能因而頓開。教授指示的文獻要仔細研讀，勤作筆記。

定期的書報研討：三五好友儘可能找出相同時間互相研討。請指導教授蒞臨指導，最主要的目的，是希望藉此督促本身，按照既定論文寫作進度，避免怠懈。

其次，筆者個人的專業成長，可以從兩個角度來看。在文本方面，筆者經過深入探討發現徐有壬的數學研究成果，深具創造力與啟發性。他運用簡單的初等數學模型，解決了複雜的高等數學問題。對中學教師而言，要如何幫助學生建構出數學理論基礎呢？徐有壬的數學思維與理論架構，是數學教學上絕佳的參考資料。由此看來，筆者認為徐有壬的數學著作不僅具有歷史研究的意義，同時，也可以對今日相關的數學教學有所啟發。在寫作能力方面，經過論文寫作的訓練之後，筆者認為本身對於修辭、體例、文章架構以及邏輯分析方面的能力大大地提昇。最重要的是，經過這番訓練，日後面對任何論文寫作便可以駕輕就熟、從容應對。這便是研究所研讀最大的收穫。

筆者經過論文寫作訓練之後，希望本著此項能力，能夠在數學史方面繼續鑽研，在算學的研究工作上努力深耕，並且以 HPM 的觀點，為中學的數學教育盡一份心力。

以上只是小弟個人拙見心得，希望各位看官不吝賜教，交換心得分享喜悅。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>