

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中） 助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
 蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新竹高中）
 陳鳳珠（土城中正國中） 謝佳叡（台師大數學系）
 林倉億（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
 葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）
 陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 數學史與 HPM 的生力軍
- 《同文算指》的承先與啓後及其評價
- 論文摘要：
 - 《《同文算指》之研究》
 - 《句股算學家—顧應祥及其著作研究》
 - 《中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術》
 - 《中國 1368~1806 年間的勾股術發展之研究》
 - 《李朝世宗時期的朝鮮數學》
 - 《楊輝算書的探討；一個 HPM 的觀點》
 - 《清代算學家徐有壬及其算學研究》
 - 《清代算學家戴煦及其算學研究》
 - 《明代算書《算法統宗》》

數學史與 HPM 的生力軍

台師大數學系 洪萬生教授

又是畢業的季節了。今年八月底以前，我們預計有九位研究生完成他（她）們的論文答辯，榮獲碩士學位。他們論文主題，無論是完全以數學史為主，或是旁涉了 HPM 的相關議題，都表現的中規中矩，堪稱是本土的數學史與 HPM 研究的生力軍。

在本期中，我們除了分別刊出他（她）們的論文摘要，也要在此表達誠摯的祝賀之意。現在，且讓我們邀請他（她）們出場：

林倉億：中國清代 1723-1820 年間的借根方與天元術。

黃清揚：中國 1368-1806 年間的勾股術發展之研究。

葉吉海：李朝世宗時期的朝鮮數學。

王文珮：楊輝算書的探討：一個 HPM 的觀點。

王連發：句股算學家 – 顧應祥及其著作研究。

阮錫錡：清代算學家徐有壬及其算學研究。

陳啓文：清代算學家戴煦及其算學研究。

陳威男：明代算書《算法統宗》。

陳敏皓：《同文算指》之研究。

在這些論文中，有專題的探討（如前三篇，已經完成答辯），也有著重中國明清兩代的算學家及算書之內容解讀（譬如後六篇，預計八月底完成答辯）。儘管數學史論述都不曾忽略這些歷史問題，然而，上述這九位作者卻能綜合前人的研究成果，輔以自行發掘的史料，而得以賦與相當全面性的考察。總之，他們生嫩的拳腳功夫是否能留下痕跡，當然有待考驗，不過，假以時日，或許他（她）們也可以分享新世紀的數學史學願景與夢想吧！

《同文算指》的承先與啟後及其評價

國立蘭陽女中 陳敏皓老師

李之藻於《同文算指》的（通編）卷六中的『測量三率法第十一』，主要是承襲徐光啓的《測量法義》；而其中所附《勾股略》，主要是承襲徐光啓的《勾股義》的部分。李之藻（1565~1630）與徐光啓（1562—1633）過從甚密，常一起討論西算。李之藻所著的《同文算指》中的「測量三率法第十一」有許多題型與內容，與徐光啓所著的《測量法義》相同。於此，我們先介紹《測量法義》。

《測量法義》是徐光啓同利瑪竇合譯《幾何原本》前六卷（1607年）後，認識到《幾何原本》是「度數之宗」、「眾用之基」（徐光啓譯《幾何原本》序），因而以《幾何原本》的公理體系和演繹推理對「西泰子之譯測量諸法」「系之義也」（徐光啓《題測量法義》）的首次嘗試。徐光啓認為西方測量術，就「法」而論，同中國古代《周髀算經》、《九章算術》的『勾股測望術』是「不異」的，然而，西方測量術有《幾何原本》為理論依據，故「貴其義」。於是，他先介紹西方測量術的工具—造器「矩度」的構造；次「論景」，講以直景、倒景佈算的原理；然後，以十五個題目由淺入深講高、深、廣、遠的測量諸法，並進一步提供證明。

《同文算指》承《測量法義》的部分

徐光啓譯《幾何原本》後，即編譯《測量法義》，這是由於他認為測量之法，「廣其術而以之治水治田之，為利鉅、為務急也」（徐光啓《題測量法義》）。這體現了徐光啓既重視數學理論，又重視數學與實踐相結合，這兩者構成了他的數學思想中相輔相成的兩個側面。且讓我們先比較兩本書在編排上的體例順序：

《同文算指》（李之藻、利瑪竇編譯，1613年）	《測量法義》（徐光啓著，1607年）
(1) 量影測高	第二題
(2) 從高測影	第三題
(3) 以目測高（圖形順序不同）	第六題
(4) 地平測遠	第七題
(5) 測深	第八題
(6) 平鏡測高	第九題
(7) 以表測高	第十題
(8) 以表測地平遠	第十一題
(9) 以矩尺測遠	第十二題
(10) 以重矩兼測無廣之深無深之廣	無此題
(11) 移測地平遠及水廣	第十三題
(12) 以四表測遠	第十四題
(13) 測高深遠近不諳布算而得其度	第十五題

由上表，可以明顯看出李之藻與利瑪竇在編譯《同文算指》中的「測量三率法」，絕大部分是承襲徐光啓的《測量法義》，¹而且，其中問題都是使用三率法或簡單的相似觀念即可解決。然而，有一不同點為徐光啓在《測量法義》敘述題目時，都會先置「法曰」，這是《同

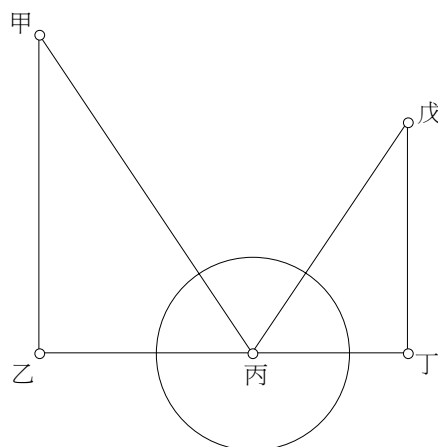
¹ 李之藻在《同文算指》中有云：「詳見徐太史測量法義」。見《中國科學技術典籍通彙》第四卷第206頁。

文算指》所未曾出現的。茲舉（6）、（10）兩題為典範例子說明。而（9）、（13）則分別呈現學習幾何所必備之知識。

（6）平鏡測高：

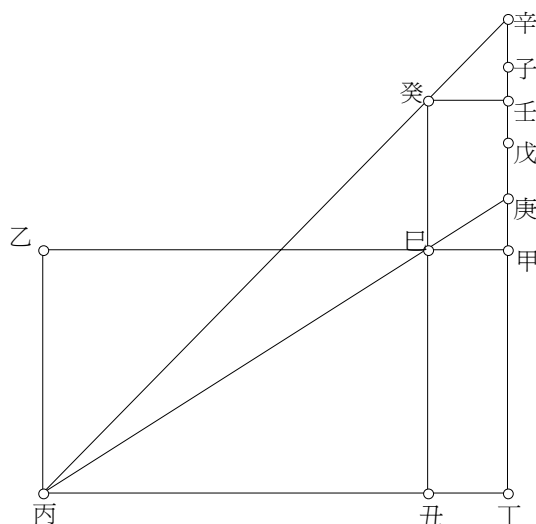
欲知甲乙之高，置平鏡于丙，人立於丁。其乙丙丁取平，人目在戊，向物頂之甲稍移就之。令目見甲在鏡中心，而甲影從鏡心射目，乃量自丁至丙之度為首率，丁戊為次率，乙丙為三率，算之，得甲乙高。

以此題為例，是因為此論首見於歐幾里得的《鏡書》第一題，而本題所使用的方法為利用一次三率法，然此題卻是「眾用之基」，因此，歐幾里得把此題放在第一題，一定有其深切用意。



（10）以重矩兼測無廣之深無深之廣：

有甲乙丙丁壁立深谷，不知甲乙之廣，欲測乙丙之深。則用重矩法，先于甲岸上依垂下直線，立戊甲巳勾股矩尺，其甲巳勾長六尺。直以目截取戊甲股上之庚甲之高，得五尺。取壬去甲一丈五尺壬癸勾亦長六尺，從股尺上視勾末癸與谷底丙相參，目截取辛壬之高八尺，如欲求深，以前股所得庚甲五尺與兩勾間壬甲十五尺相乘得七十五尺為實，以兩股所得庚甲辛壬相減之較辛子三尺為法，除之即得乙丙深二十五尺，如欲求廣者，以勾六尺與兩勾間十五尺相乘得九十尺為實，以辛子三尺為法除之，即得甲乙之廣三十尺。（甲乙之廣應為三十六尺才正確）



此題並非徐光啓《測量法義》中的問題，雖為李之藻所新立獨創的，但是仍不脫《測量法義》的範圍。不過，也值得在此討論。徐光啓的譯註書中，關於利用『重差術』來實施測量的不在少數。例如《測量法義》第十題『以表測高』；及徐光啓《測量異同》第四題『以重表兼測無遠之高，無高之遠』，第六題『以重矩兼測無廣之深，無深之廣』，皆是運用『重差術』。²

然本題所使用的方法為利用兩次三率法，但其簡潔程度仍不失數學本色。現在我們利用現在方法來做比較。

解：

令甲丁長為 x 尺，丙丁長為 y 尺

$$\therefore \frac{\text{庚甲}}{\text{甲巳}} = \frac{\text{庚丁}}{\text{丙丁}}, \therefore \frac{5}{6} = \frac{x+5}{y} \quad \therefore y = \frac{6}{5}(x+5)$$

$$\text{又} \frac{\text{辛壬}}{\text{壬癸}} = \frac{\text{辛丁}}{\text{丙丁}}, \therefore \frac{8}{6} = \frac{x+23}{y} \quad \therefore y = \frac{6}{8}(x+23)$$

$$\therefore \frac{6}{5}(x+5) = \frac{6}{8}(x+23), \therefore 8(x+5) = 5(x+23), \therefore x = \frac{5 \cdot (23-8)}{8-5} = \frac{5 \cdot 15}{3} = 25$$

$$\text{代入得 } y = \frac{6}{5}(x+5), \therefore y = \frac{6}{5} \times (25+5) = 36。$$

中國古代不但在測量工具上種類齊全，並且理論根據完備，³在測量方面，也有不少創見與發明，而且在各古書中屢見不鮮。同時，古算經的測量問題的數據也大都選自實際情境，見下表整理：⁴

書名	題號	篇名
《周髀算經》	卷上	測太陽直徑
《九章算術》	勾股章第 22 題	測遠
《九章算術》	勾股章第 23 題	測山高
《九章算術》	勾股章第 24 題	測井深
《海島算經》	第 1 題	測山高、山遠
《海島算經》	第 3 題	測城廣
《海島算經》	第 4 題	測谷深
《孫子算經》	卷下第 25 題	以影測高
《數術記遺》	記數篇	測河寬 ⁵

然而，針對本題李之藻所使用的重表測量法，其實就是中國古代既有的重差算法。劉徽《九章算術》注的〈自序〉中說：「輒造重差，並為注解，以究古人之意，綴於勾股之下。」而重差術的思想肇始於「以景度日」。⁶即下圖所示：

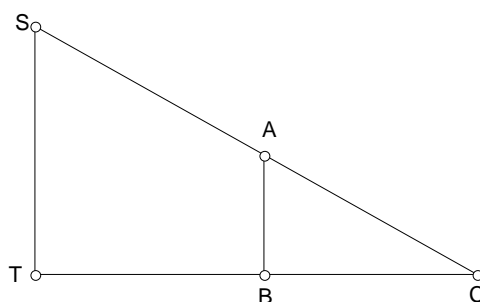
² 詳見李儼，〈重差術源流及其新注〉，收入《李儼錢寶琮科學史全集》第十卷（瀋陽，遼寧教育出版社，1998年），頁 75—81。

³ 理論根據《周髀算經》中所言：『以率率之』；及劉徽所說對兩個直角三角形『其相與之勢不失本率也』。

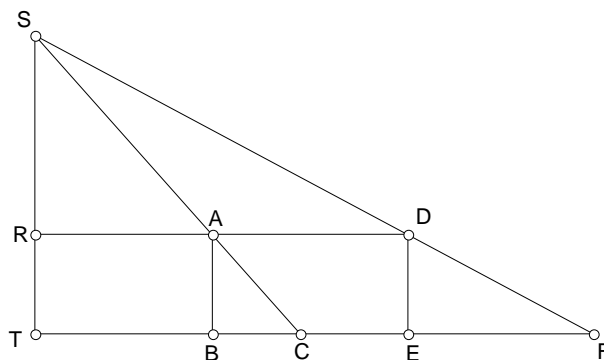
⁴ 詳見沈康身，《中算導論》（上海教育出版社，1986年），頁 145—148。

⁵ 此類型題目在《數書九章》卷七、卷八；及《四元玉鑿》也有類似的測量問題。

⁶ 詳見李國偉，〈從單表到雙表—重差術的方法論研究〉，收入何丙郁等著，《中國科技史論文集》（台北，聯經出版社，1995年），頁 85—102。



劉徽非常重視推理過程，他曾於《九章算術》注序的前段說：「事類相推，各有攸關，故枝條雖分而同本幹者，知發其一端而已。」接下來，劉徽給重差的典型：「立兩表於洛陽之城，令高八尺。南北各盡平地，同日度其正中之景，以景差為法，表高乘表間為實，實如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表乘表間為實，實如法而一，即為南表至南戴日下也。以南戴日下即日去地為勾、股，為之求弦，即日去人也。」這就是建立重差術的來源。如下圖所示：



令 S 為日，T 為日下，AB、DE 為等高二表，BC、EF 為表影，所以

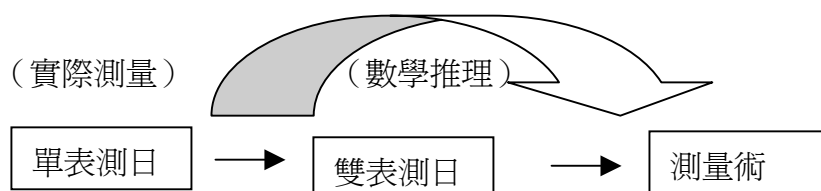
$$\therefore \frac{EF}{RD} = \frac{DE}{SR} = \frac{AB}{SR} = \frac{BC}{AR} = \frac{EF - BC}{RD - AR} = \frac{EF - BC}{AD} \quad (\text{不失本率原則})$$

$$\therefore \frac{AB}{SR} = \frac{EF - BC}{AD}, \therefore \frac{SR}{AB} = \frac{AD}{EF - BC}, \therefore SR = \frac{AB \times AD}{EF - BC}$$

$$\text{則 } ST - AB = \frac{AB \times BE}{EF - BC}, \therefore ST = \frac{AB \times BE}{EF - BC} + AB$$

(即日去地 = $\frac{\text{表高} \times \text{表間}}{\text{景差}} + \text{表高}$)

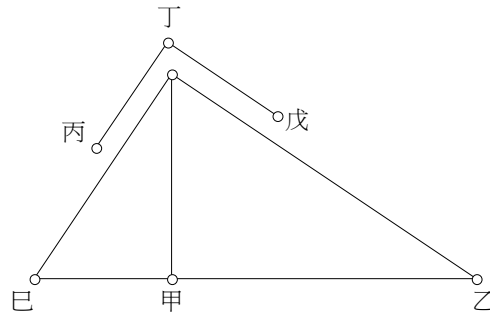
如此，我們或可刻畫劉徽的思路歷程如下：



事實上，這也就是重差公式的演進。

(9) 以矩尺測遠：

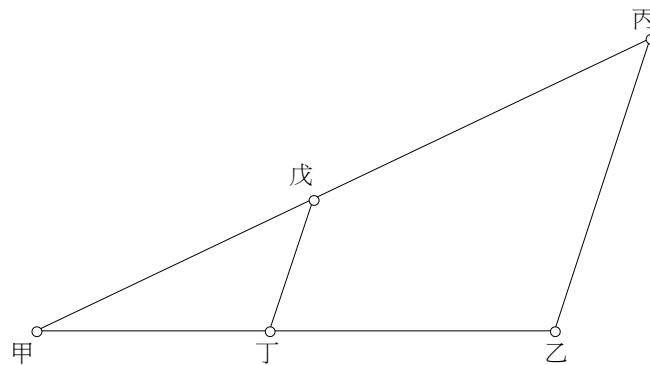
欲于甲測地平遠者，先立一表為甲丁與地平為直角；次以矩尺之內直角置表末丁上，以丁戊尺向所望遠際之，乙稍移就之，使丁戊與乙相參直，次迴身從丁丙尺上亦望地平之已使丁丙與已相參直，乃量已至表下甲為首率，身丁甲為次率又為第三率，依法算之得甲乙遠。



徐光啓在中進士前一年，即萬曆癸卯（1603年），在致上海侯劉一塘（著有《量算河工及測量地勢法》）函中，表明他很善於測量之術，並且提到勾股量深法、重矩勾股量深法、重矩重表勾股量高法、以矩尺測遠等測量知識。⁷可見，他的確擅長這一方面的知識。

(13) 測高深遠近不諳布算而得其度：

凡測量必先得三率，而推得第四率。三率者其一直影度或倒影度；其二所立處距所測物之底若不能至者，則其影較度或兩測較度也；其三表度或距較度也。設如測一高其影較八，而距較十步，其影較八【一率】，與表十二【二率】之比例，若距較十步【三率】，與其所求之高【四率】。



如不諳算法則于平面畫作甲乙丙兩直線任相交于甲，從甲向乙用規作八平分為影較，甲丁次用元度從丁向以規取十二平分為矩度丁乙，次從甲向丙規取十平分為矩較甲戊【此用度與前兩率度任等不等】，乃從戊至丁畫一直線，次從乙亦畫一直線與戊丁平行而截甲丙線于丙，次取甲戊元規度丙向戊畫得若干分，即所求之高。

《同文算指》承《勾股義》的部分

李之藻『測量三率法第十一』之後補上《勾股略》，曾云：

測量之法專用半矩，則勾股所必藉也，故補入勾股以顯測望原本。舊法勾三、股四、

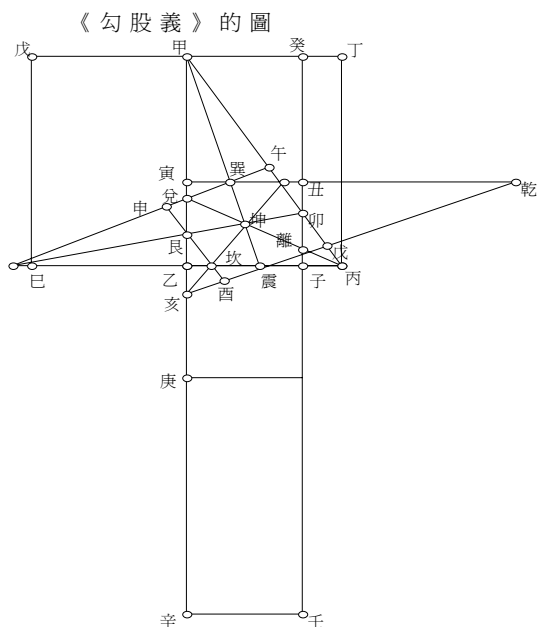
⁷ 見張傑恆、許康，〈徐光啓的數學理性觀與數學教育思想〉，收入李迪主編，《數學史研究文集》第一集（內蒙古大學出版社，九章出版社，1993年），頁 117-123。

弦五，蓋勾自乘股自乘併之即弦自乘數，故得勾股可以求弦、得勾弦可以求股、得股弦可以求勾，而引申其義，可以求勾股中容方容圓；可以各較求勾求股求弦；可以各和求勾求股求弦，其變化無窮，今撮其要者十五則著於篇。

徐光啓的《勾股義》撰於1609年，是緊接翻譯《幾何原本》前六卷（1607年）、《測量法義》（1607年）後，徐光啓從利瑪竇身上學的許多西方測量之術。他顯然希望能從論證三角形的方式來討論『勾股術』。這是有別於中國古代討論勾股的方法，例如元代李冶的《測圓海鏡》運用天元術討論勾股容圓的問題，徐光啓就突破孤立考察三角形本身的舊法，而把三角形和圓形的關係聯繫起來考察，從而給出三角形論證的模式。徐光啓將九章的『勾股術』重新整理為十五條正法。就在這個基礎上，他分別論列勾股諸法體現的原理。

正如前述，《同文算指》中所附《勾股略》主要的基礎，是承襲徐光啓的《勾股義》的部分。李之藻於《勾股略》中許多勾、股、弦的求值問題，廣泛地應用平方差與平方和的解題策略，因此，在體例方面有許多都是類似的。另外，李之藻也做了許多刪除與修正，例如：徐光啓的《勾股義》全文長達二十一頁（不包含序與後記），徐光啓除了論曰之外，也補再論曰，因此使得篇幅過長，而李之藻的《勾股略》卻僅有七頁。至於修正的部分，如《勾股義》第九題之法曰中的「以股自之得一千一百九十六」，李之藻在《勾股略》已修正為『以股自之得一千二百九十六』。

此外，如徐光啓的《勾股義》第七題（勾股求容圓）問題，爲了探討三條內角平分線交於一點（內心），及內切圓與三角形的關係，分別從三個方向出發，但是其中贅言不少，整題論述達五頁，極有可能的原因，是徐光啓並沒有深切地掌握住「相切」的概念。由下圖可以看出（勾股求容圓）這題應該是很困擾著徐光啓。

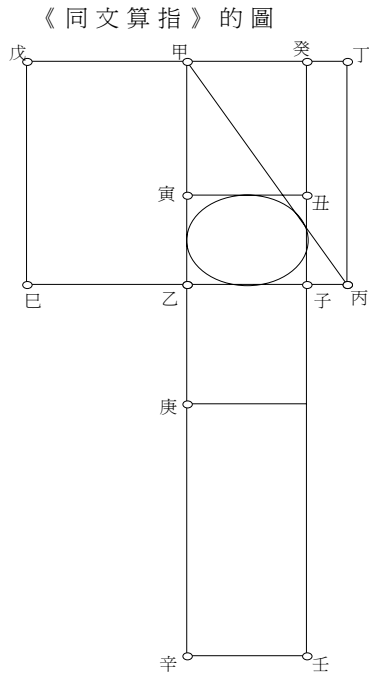


比較《勾股略》的（勾股求容圓）一見下圖：

甲乙股六百，乙丙勾三百二十，求容圓？以勾股相乘得一十九萬二千為甲乙丙丁方形，倍之得三十八萬四千為丙丁戊己方形以為實，別以勾股求弦得甲丙邊六百八十，併勾股弦得甲辛長線一千六百為法除實，得辛壬癸甲長方形其辛壬邊相等之乙子二百四十即容圓徑。

可見，李之藻善用內心的性質（到三邊等距離），外加利用三角形的面積關係，使得

$$r = \frac{\text{三角形面積的兩倍}}{\text{弦和和}} \quad (r \text{ 爲內切圓半徑})。$$



另一方面，徐光啓門人孫元化在『敘曰』之後抄錄的『勾股』，爲「刪爲正法十五條」的初稿（但缺圖），全文五頁，內容與《勾股略》極爲相似。由此可見，李之藻是經過嚴格的增刪與思考過後，才附上《勾股略》。

現在，且將此十五條轉列成表格，則見端倪如下。假設勾爲 a ，股爲 b ，弦爲 c ，容方的邊長爲 d ，容圓的半徑爲 r ：

題 目	已知條件	所求目標
(1) 勾股求弦	a, b	c
(2) 勾弦求股	a, c	b
(3) 股弦求勾	b, c	a
(4) 勾股求容方	a, b	d
(5) 餘勾餘股求容方求勾 求股	$a-d, b-d$	d, a, b
(6) 容方與餘勾求餘股與 餘股求餘勾	$d, a-d$ 或 $d, b-d$	$b-d$ $a-d$
(7) 勾股求容圓	a, b	d
(8) 勾股較求股求勾	$b-a, c$	a, b
(9) 勾弦較求勾求弦	$c-a, b$	a, c
(10) 股弦較求股求弦	$c-b, a$	b, c
(11) 勾股和求股求勾	$a+b, c$	a, b
(12) 勾弦和求勾求弦	$a+c, b$	a, c
(13) 股弦和求股求弦	$b+c, a$	b, c
(14) 股弦較勾弦較求勾 求股求弦	$c-b, c-a$	a, b, c
(15) 勾弦和股弦和求勾 求股求弦	$a+c, b+c$	a, b, c

結論

中國現存最古老的天文算經《周髀算經》卷上，就提及用矩（曲尺）—有刻度的直角尺來間接做測量。爲了獲得直角，《周髀算經》提出『折矩以爲勾廣三、股修四、徑隅五』的說法。在《九章算術》中，也有章節特別介紹勾股定理的性質及應用。⁸李之藻所補上之《勾股略》中的『勾股求容圓』爲中國古代既有之問題，李冶《測圓海鏡》十二卷（1248）中曾云：「以勾股容圓爲題，自圓心圓外縱橫取之，得大小十五形。」，也曾在《測圓海鏡》⁹自序稱：「老大以來，得洞淵九容之說，日夕玩繹，而嚮之病我者，使爆然落去，而無遺餘。」由此，可臆測李之藻的數學觀點，並不全然承襲利瑪竇的想法。請參看『九和』與『九較』的比較如下：

九和（兩數并爲「和」）			九較（兩數差爲「較」）		
勾股和 $a+b$	股弦和 $b+c$	勾弦和 $a+c$	勾股較 $b-a$	股弦較 $c-b$	勾弦較 $c-a$
弦和和 $c+a+b$	勾和和 $a+b+c$	股和和 $b+a+c$	弦和較 $a+b-c$	勾和較 $b+c-a$	股和較 $a+c-b$
弦較和 $c+b-a$	勾較和 $a+c-b$	股較和 $b+c-a$	弦較較 $c-b+a$	勾較較 $a+c-b$	股較較 $b-c+a$

論文摘要

《同文算指》之研究》摘要

國立蘭陽女中 台師大數學系教學碩士班 陳敏皓老師

《同文算指》是介紹歐洲筆算的第一部著作，該書是根據克拉維斯(Christopher Clavius, 1537—1612, 明末中譯名『丁先生』)所著的《實用算術概論》(Epitome arithmeticae practicae, 1583)、《算法統宗》等書，由利瑪竇與李之藻編譯而成。它是歐洲近代實用算術傳入中國的開始，對後來的中國算術演算有巨大的影響。同時，李之藻藉此書編譯所播下的西學東漸之種子，也在清朝時開啓新的一頁。《同文算指》一書分爲《前編》、《通編》、《別編》三部分。李之藻《同文算指前編》序稱：「蒼輯所聞，厘爲三種：《前編》舉要，則思已過半；《通編》稍演其例，以通俚俗，間取《九章》補綴，而卒不出原書之範圍；《別編》則測圓諸術，存之以俟同志。」即說明其編譯體例及取材範圍。

《前編》二卷（1613年）主要介紹了筆算的定位法和整數及分數的四則運算，其中加法、減法、乘法及分數除法和今日運算方法基本相同；整數除法是十五世紀末義大利數學家應用的「削減法」（亦即「帆船法」），十分複雜，但值得探索。本編中的分數記法，與古

⁸ 《九章算術》勾股章第一題有劉徽注：“短面曰勾，長面曰股，相與結角曰弦”。

⁹ 《測圓海鏡》卷二，正率十四問，首十問爲：（勾股容圓）、（勾上容圓）、（股上容圓）、（勾股上容圓）、（弦上容圓）、（勾外容圓）、（股外容圓）、（弦外容圓）、（勾外容圓半）、（股外容圓半）。

代籌算記法或歐洲的筆算記法正好顛倒過來，李之藻把分母置於分數線之上，分子置於分數線之下。另外，驗算法是印度『土盤算法』中，由於擔心數碼隨時會被抹去，而要求檢驗結果的正確性而產生的，它在筆算中已逐漸失去作用而終被淘汰，而李之藻也認為它『繁碎難用』，只是『錄之備玩』而已。最後，總結通問十四題是運用加、減、乘、除四術，由淺入深、由易入難。

《通編》八卷（1613年）是全書的中心，內容有三率法中含比例（包括正比、反比和複比）、比例分配、疊借互徵法（盈不足問題）、雜和較乘法（多元一次方程組）、數列（包括等差數列和等比數列）、級數（包括等差級數和等比級數）、測量三率法、勾股略、開方（包括開平方、立方與多乘方）與帶從開平方、冪次方等。此外，還輯入《算法統宗》中的一些難題，及徐光啓的《勾股義》與利瑪竇和徐光啓合譯的《測量法義》等內容。其中多元一次方程組、開帶從平方與開多乘方等方法，由於未見於《實用算術概論》，顯然是取自中國算書。

《別編》一卷（未提編譯年代），只有「截圓弦算」一節，全節談論的重點在天文測度方面，整節分成七個部分，內中學及正弦餘弦表至小數七位，為近代西方三角學傳入中國之首。

本論文將深入分析《同文算指》的內容，並且探討筆算與當時學術環境的關聯，用以確立李之藻在明末算學研究的地位及其影響。例如，梅文鼎在撰寫《筆算》五卷（1693年）時接受了《同文算指前編》所授的四則運算法；他在撰寫《少廣拾遺》一卷（1692年）時，也根據一些書籍及《同文算指》中開方作法本原圖，重新發揮了『立成釋鎖法』的作用。至於《數理精蘊》下編中的卷八、卷九講盈朒、借衰互徵、疊借互徵的部分內容，亦取自《同文算指》。還有，清代李善蘭在算式翻譯工作中，繼承了《同文算指》以一、二、三、四、五、六、七、八、九、〇為數碼，並襲用了《同文算指》的分數記法，將分母置於分數線之上，分子置於分數線之下。事實上，《同文算指》介紹的筆算，與現今的算法十分接近，清代數學工作者很重視它，並不斷地克服了它的缺點，使筆算漸臻完善，筆算的應用也逐漸普遍起來，可見《同文算指》是具有時代意義及研究價值。

《勾股算學家—顧應祥及其著作研究》論文摘要

台師大數學系教學碩士班 王連發

在中國算學史中，明朝是一個特別的時期，宋、元兩朝所高度發展的算學，到了明朝卻呈現停滯、衰退的現象。最常被史家引為證據的，莫過於顧應祥對於宋元『天元術』的無以索解，而《測圓海鏡分類釋術》中刪去『天元細草』。事實上，顧應祥承認：「但見其每條下細草，雖徑立天元一，反復合之，而無下手之術，使后學之士茫然無門之可入。輒不自揆，每章去其細草，立一算術，又以其所立通勾邊股之屬，各以類分」，『遂貽千古不知而做之譏，惜哉！』

儘管如此，如果我們回到明朝歷史的脈絡中來看，那麼，顧應祥的算學研究還是值得我們注意。這是因為他首先整理了勾股問題而著述《勾股算術》，其次，重新用自己的勾股知識整理《測圓海鏡》的內容，而寫成《測圓海鏡分類釋術》，最後，為普及「測圓」知識，

他又將前書改編成較簡易的《測圓算術》。環視他的背景，是整個明朝士大夫率以空疏相尚，朱熹、王陽明的理、心之學爭鬥的學術環境。以一個做到尚書這樣大官的人而言，能夠對數學有這樣的認知與成就，可以說是中國歷史上的一個異數吧！

筆者在這篇的論文中，嘗試回到明朝的算學史中，解析顧應祥的數學觀點與他的數學著作，希望還給他一些不同的歷史評價。

《中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術》論文摘要

台師大數學系碩士班研究生 林倉億

借根方與天元術皆是用以處理一元多次方程式的方法，前者在清朝康熙年間由傳教士所傳入，並載於康熙帝御製的《數理精蘊》中；後者則是在金、元時期發展成熟的中國傳統算學，以金、元算學家李冶的《測圓海鏡》與《益古演段》二書為代表性著作。雖然這兩者所處理的對象相同，但在康熙朝時，清朝算學家已無人能曉天元術，因此，在借根方傳入與流傳初期，並未有算學家意識到借根方與天元術間的關係，直到梅成提出「天元一即借根方解」的說法後，才陸續有許多算學家將這兩者相提並論，也開啓了借根方與天元術間的互動。

1723~1820 年間的借根方與天元術的發展與互動，是清朝數學史中至為精彩的部分，算學家們在這兩種方法上所進行的會通、對話，甚至是辯論，不僅反映出當時的學術風氣（乾嘉學派學風與西學中源說）與數學發展（會通中西學與興復古法），更具有豐富的認識論面向。本文將先從今日的角度，對借根方與天元術進行比較，而透過比較這兩者，我們將發現這兩者個別的術語、長處與侷限，確實影響了算學家們對它們的理解，也因而影響了它們在清朝的發展與互動。

其次，在筆者所得見的算書中，此時期載有借根方或天元術的，計有何夢瑤的《算迪》、梅成的《赤水遺珍》、李銳的重校《測圓海鏡》與《益古演段》、《弧矢算術細草》、《句股算術細草》、焦循的《天元一釋》、張敦仁的《緝古算經細草》、駱騰鳳的《藝游錄》、《開方釋例》、安清翹的《學算存略》、張作楠的《量倉通法》、《方田通法補例》、《倉田通法續編》、羅士琳的《比例匯通》，本文將根據算學家在算學著作中所呈現的借根方或天元術內容，分析他們對這兩者的認識及看法。而透過對個別算學家的分析，我們將會看到相同的借根方或天元術，在不同的算學家的詮釋之下，展現了不同的面貌，而這是見證了在知識的傳播中，知識接受者並非僅是被動的「複製」知識，相反地，知識接受者本身固有的知識、所處的文化背景，都會對知識接受者產生重大的影響。

《中國 1368-1806 年間的勾股術發展之研究》論文摘要

台師大數學研究所碩士班研究生 黃清揚

所謂「勾股術」，又可稱為「勾股算術」，即指以勾股定理為核心而發展出的算法或公式，其中又可分為勾股互求、勾股測量、勾股容圓、勾股容方、勾股比率及整數勾股等等。中國勾股術的形成甚早，其起源乃在於窺天測地的需要。現存中算史料中，以《周髀算經》及《九章算術》最先提及勾股術，兩者皆只給出算法。在此之後，歷代算家對勾股術多所研究。其中，理論性的論述則首見魏晉南北朝的劉徽及趙爽，兩人分別利用「出入相補法」來進行勾股術的幾何證明工作。而到了宋元時期，算學家更發展出了「天元術」及「四元術」，採用代數的進路來研究勾股，突破了幾何方法的限制。與此相較，從 1368 年明代朱元璋開國至清代算家李銳在 1806 年撰成《勾股算術細草》為止，期間勾股術的發展，也是由算術進路到幾何進路最後走向代數進路。整體來說，1368-1806 年間勾股術的發展似乎與明代之前有著些許的類似性。

雖然如此，但當我們仔細檢視明代至清中葉的勾股術之發展後，即可了解兩者在本質上有著極大的不同。然而，除了少數算家之外，這一時期的勾股術基本上沒有受到相當的重視及討論，特別是明代算學的部分。所以，筆者認為有必要對 1368-1806 年間的勾股術之發展作一詳細的分析。

為此，本論文將以勾股術中的「勾股互求」為主軸，透過對十部相關文本的分析，來探討 1368-1806 年間勾股術的發展。這十部算書分別是吳敬的《九章算法比類大全》、王文素的《算學寶鑑》、顧應祥的《勾股算術》、周述學的《神道大編曆宗算會》、程大位的《算法統宗》、徐光啓的《勾股義》、方中通的《數度衍》、梅文鼎的《勾股舉隅》、康熙御制《數理精蘊》以及李銳的《勾股算術細草》。除此之外，由於這一時期跨越明清兩代，算學家對勾股術的研究內涵改變甚巨，尤其是在西學輸入後，中算家對西方數學之學習與會通，以及乾嘉時期以「西學中源」為中心的學術風潮，在在皆與勾股術有密切的關係。所以，經由對這十部算書的研究，正可以了解此一時期算學家對勾股術的看法之不同面貌，進而探討算學家之間的交流與影響。

《李朝世宗時期的朝鮮數學》論文摘要

台師大數學系碩士班研究生 葉吉海

李朝的算學發展過程中，世宗朝可說是一個黃金時期。算學興起的原因，史家們認為是因為世宗朝大規模的測地量田，算學需求大增所致。然而，他們卻忽略了開國太祖及後繼的太宗時期，也都進行大規模的量田事業。當然，測地量田的事業使得算學的需求增加，但並不能使得算學就此興起才是。事實上，從《世宗實錄》的記載，算學的興起應始於對天文曆算的重視。在對李朝世宗時期的朝鮮算學發展進一步瞭解之後，我們可以清楚的得知，世宗大王對朝鮮數學發展的貢獻。世宗極力想掌握天文曆算的企圖心與擁有能自行造曆、頒行精準不輸中國曆法的能力，重用了算學人才及培養了算學人才，使得算學得以興起。

世宗朝之初期，由於對於天文曆算掌握的迫切性，對於算學人才就更加地渴望。世宗朝的數學教育，因天文曆算的需求與測地量田等需求而受到重視。世宗先後設立了「習算局」、「算法校正所」與「曆算所」以因應算學人才的需求。其中，「曆算所」的設置，更是集『歷代算學之法』於一身，它的考講制度更是讓世宗朝的算學人才相繼而出。誠如世祖朝的吏曹所言：『若無曆算所，我國知算法者絕無矣』。

曆算所的算學人才養成教育，使得曆算學官的數學能力不僅『粗習乘除』而已，「開方」、「開立方」、「三乘方」、「四乘方」以至「九乘方」，還有「方程正負」、「開方釋鎖」、「度高測深」、「重表」、「累矩」、「三望」、「四望」以及「勾股」與「重差」的方法，都是必備的素養。透過交流傳入朝鮮半島的《楊輝算法》、《算學啓蒙》及《詳明算法》，對李朝數學史的影響相當大。其中，尤以《算學啓蒙》和《詳明算法》，在後來的著作中被大量引用，顯示世宗時期的朝鮮數學發展，對於後世的影響，也更加肯定世宗時期中韓數學交流所注入的一股『活力』的意義了。

《楊輝算書的探討：一個 HPM 的觀點》摘要

台師大數學系教學碩士班王文珮

宋元數學經過隋唐時代，在知識體系的累積中逐步建立起來，站上了中國算學發展史上的顛峰時期，呈現出的是綜合算學之後的豐富樣貌。有宋一代，政治安定、商業興盛、貿易往來頻繁，促使人們對於籌算的速度要求更高，實用數學成為算學家們重視的主題之一。除了當代在經濟上的高度發展之外，印刷技術的精進，也促使民間學習的風潮更加盛行。在理學思想的映照之下，學術風氣更顯得開放創新，算學當然也成為其中非常重要的一環。而楊輝正是處在此一黃金時代（宋末元初）的南方算學家之一。

現存楊輝的著作中，除了《詳解九章算法》（1261）是為了註解《九章算術》的算書以外，其餘尚有《日用算法》及《楊輝算法》二本，皆以解決民生問題所發展的實用民生數學及初等算學為主要的題材。其中《日用算法》（1262）僅殘存跋、序及日用斤秤數題。《楊輝算法》共分為三個部分：《乘除通變本末》（1274）、《田畝比類乘除捷法》（1275）以及《續古摘奇算法》（1275）。《乘除通變本末》共三卷，卷上首先提出〈習算綱目〉的教學計畫，依序導引各式基本乘法技巧；卷中介紹進階的乘除捷法，有加法五術、減法四術、求一、九歸等算法諸術；卷下以闡釋卷中內容為要務，詳列一至三百的捷算總術。《田畝比類乘除捷法》共二卷，卷上介紹各類田畝求積問題，並在題後以「比類」型式呈現可以轉化為田畝求積以解答的其他問題；卷下以田畝問題呈現解二次方程式以及一個四次方程式的內容。《續古摘奇算法》共二卷，卷上討論縱橫圖以及 48 個各類問題；卷下是將各算書中的「摘奇」題目集合並說明。雖然楊輝算書是以普及實用民生數學知識為其職責，但卻不因此而稍稍減其對數學知識深度及內涵的探索與重視，故而在中國數學史上仍佔有極其重要的歷史地位，並對後代算學產生了一股不可忽視的影響力。誠然，楊輝對於普及實用民生數學知識的觀點及作法，的確可提供今日數學教育上的重大啟發。

楊輝算書在實用民生數學方面，有他獨到的見解及方法論方面的特色。在多位數學史家對於楊輝算書的研究與考證分析之下，筆者才得以對楊輝算書的內容有一初步的認識。在此一基礎上，從身為中學數學教師的角度出發，因著楊輝算書於初等數學中有如此重要的標杆地位，筆者乃有將它引入數學教學課程之中的構想。因此，筆者遂採用 HPM (Relations between History and Pedagogy of Mathematics) 的觀點，來撰寫本文。希望楊輝的算書風格，可以幫助我們反思目前數學教學的一些理念與作法。同時，以楊輝為師，我們或許也可以在中學數學教學的情境中，恰當地融入古代數學文本，以便提升教學成效。

《清代算學家徐有壬及其算學研究》摘要

台師大數學系教學碩士班 阮錫琦

自 1723 年康熙御製的《數理精蘊》出版後，讓清代的算學家能夠有系統地學習地西方所傳入的數學知識。在乾嘉時期，西方數學不能繼續傳入中國，古典考證學成爲一時風氣，在以「興復古算、昌明中法」爲職志的乾嘉學派所經營的學術環境下，中國傳統算學得獲得極大闡揚與重視。至於其手法，顯然是許多人透過西法來解釋中法，其西法的依據就是《數理精蘊》。透過乾嘉學派的輯佚、校勘與考證的工作，讓失傳五百年之久的古算典籍如《算經十書》、乃至宋金元四大家的傑出作品，得以重見天日。在這時空環境之下，數學發展所提供豐富的資源，培育出許多優秀的中西會通數學家。本論文的主角徐有壬（1800~1860）正好處於清中、晚期，乾嘉學派由盛到衰，西法派捲土重來的交替時期，因此，徐有壬及算學研究，可以說是我們洞悉清中晚期算學研究風貌的極佳切入點。

徐有壬早年曾在天文台當天文生，接受西算的訓練，關於割圓術、三角函數冪級數的展開式、對數造表法、截球體積表面積深受《數理精蘊》的影響。又在乾嘉學派所經營的學術環境中，能夠博覽許多中國傳統數學書籍如《四元玉鑑》、《算學啓蒙》等。可徵之於他的自述：「余讀四元玉鑑究心於垛積招差之法，推之割圓諸術無所不通。」事實上，徐有壬自稱《造各表簡法》是在研究《四元玉鑑》的基礎上得出，他對垛積招差之法最有所心得，並推廣至割圓諸術而無所不通。由此可見，徐有壬的八線對數展開式研究，完全是在中國古代數學基礎上，從割圓術方面所得到的成果。此外，徐氏在研究截球體積方面，也有其獨創性的心得。他是以梅文鼎和《數理精蘊》的理論爲架構，透過巧妙的幾何模型並綜合運用出入相補和祖氏原理，推導出簡單又嚴格的球體積公式，並求得有關球表面積、球帶、球冠和球外切圓柱側面積的關係。因此，「算學創新」與「昌明中法」原來並不矛盾。這也可說明：徐氏的算學著作真是「中學爲體西學爲用」，且兼具「獨能貫通西術，宣明古蘊」的長才。

本論文將深入分析徐有壬的算學著作《務民義齋算學》七種本，《割圓八線綴數》四卷，也將探討徐有壬與同時期中算家之間的互動關係，以便瞭解探討其算學研究與學術環境的關聯，以及可能顯現的意義。此外，我也將參考清代學者與現代數學史家對他的評價，來釐清徐有壬在清代算學研究的地位與價值。同時，也期待藉由研究徐有壬的算學著作，提供給數學教師的教學和學生的數學學習上，讓他們獲得更多的啓發和應用。

《清代算學家戴煦及其算學研究》摘要

台師大數學系教學碩士班 陳啟文

明末清初西方數學的傳入，給予算學家吸收外來學術的機會，但同時也造成「西學」與「中算」孰優孰劣的爭辯衝突。當時所傳入的西方數學知識，雖然已在康熙御製的《數理精蘊》中，獲得了保存與闡揚的機會，但卻也因康熙「西學傳自東方」之思維的推波助瀾，反使「西學」面臨另一波的嚴厲挑戰。再歷經雍正採取保守的閉關政策，西學無法傳入，直至乾隆、嘉慶年間「乾嘉學派」的興起，方使「中算」轉獲得更高的地位，成為古典考據的寵兒。一時之間，中國古代算書的注釋與刊印，蔚為風潮，很多古算便成為算學家爭相研究、討論的議題。所幸《數理精蘊》因被冠以御製，即使在乾嘉學派中法的主導，它仍是研讀中算的憑藉，甚至連著述編纂(如早期的李銳)的取材，也無不受到《數理精蘊》的影響。本文主角戴煦，即在該書為基礎下，開始他對二項式展開式以及級數展開式的研究。

但此股以「復古為尚、中法為尊」的乾嘉學風，卻因對傳入之西法漠視與韃伐，又加上除了發掘、整理傳統的中算典籍外，對於數學的創新卻少有貢獻，致使清代中葉的算學研究存在極大的限制與隱憂！於是這些中法派，終在「西法派」的質疑與「鴉片戰爭」的失利，西方數學再度傳入，而喪失優勢。事實上，即使在當時，是由乾嘉學派主導了中法的學術環境，但算學家對於西方的數學研究並未停止！從「杜氏三術」到明安圖的「杜氏九術」，仍然是許多傾向西學派學者的注意焦點，甚至連對傳教士如艾約瑟都不假詞色、稱故拒見的戴煦，其研究成果仍都以西學為宗。

儘管如此，乾嘉學派對於當時的中算家仍有很大的貢獻(譬如李銳等人的研究成果)，而且在其「非專不精，終身以之」學風的薰陶下，晚清算學研究便轉向了西方數學，同時算學家的角色亦從專門名家中逐漸地分化出來。因此在數學專業化與制度化兩方面，都為清中葉算學家留下了珍貴的資產，戴煦就是受惠者之一。

本論文將藉由上述的歷史回顧，探討戴煦如何在當年的學術環境中，透過自己對古算學的鑽研，將《數理精蘊》的西學內容延伸推廣，走出自己在「對數」和「三角函數的冪級數」的專業素養；同時也要以一位從事數學教育者的角度，從現有的一些有關其著作《對數簡法》、《續對數簡法》、《外切密率》、《假數測圓》的研究報告，再予重新解讀和補充。另一方面，我們也要試圖從 HPM 的觀點，在儘可能地與戴煦原有的思維接軌的要求下，從其文本的字裡行間，細審戴煦的數學思考模式以及處理手法，期待對今日數學教師在教學上，能有更多的啟發或省思。

《明代算書《算法統宗》》摘要

台師大數學系教學碩士班 陳威男

一般人談到晚明較有名的數學書，印象最深刻的大概都是《算法統宗》一書。在《算法統宗》出版前後，明代有許多數學書出版，均流傳不廣，只有《算法統宗》受到人們的普遍歡迎。在該書出版後，不斷的翻刻、再版、重印，而且出現各種改編本、縮編本，甚至流傳到朝鮮、日本等國。究竟《算法統宗》有何魅力，能夠造成這麼大的流行？其原因為何？實在是值得我們對該書的作者及內容，做全面性的研究。

本論文主要藉由分析《算法統宗》成書的時代背景及各卷的內容，將其以現代語言呈現出來。我們期望該書的輪廓因而更為清晰，而讓我們有助於掌握《算法統宗》所繼承的數學傳統，和該書的創造性等。

本文先從《算法統宗》一書的寫作過程以及所處的時代背景談起；其次，則介紹作者程大位，包括其生平事蹟、思想、著書原由等。緊接著，即是本論文的中心主題，我們將分析並探討《算法統宗》全書內容：包括珠算的基礎算法及定位法、傳統數學的應用問題集（分方田、粟布、衰分、少廣、分田截積、商功、均輸、盈朒、方程、勾股等卷）及難題雜法等，內容十分豐富。此外，由於本書中收集了大量的趣味算題，並以詩詞歌訣的形式命題，涉及到的內容豐富多采，妙趣橫生，有不少至今仍在社會上流傳。所以，我們不僅可以從這本書中獲得珠算知識及數學知識外，還可以獲得樂趣。在探討完內容分析後，我們所關心的問題是《算法統宗》的體例結構，為了使讀者對於本書有一個更完整的了解，本論文將從本書的內容摘要、編寫方式及本書的取材來源三方面，逐一介紹。

從分析內容可看出，程大位已將計算工具由「算籌」，成功的轉換為「算盤」。不論在計算過程或在計算速度上，皆有明顯的改善，這可說是程大位的一大貢獻。此外，由於本書是明代算書中，涉及珠算內容最完整、最豐富的著作，因此，《算法統宗》堪稱是明代珠算理論的集大成之作，也是中國珠算史上第一部兼綜百家的作品，它不僅是一部數學書，也可說是一部珠算書。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>