

HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中） 助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
 蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新竹高中）
 陳鳳珠（土城中正國中） 謝佳叡（台師大數學系）
 林倉億（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
 葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）
 陳彥宏（台師大數學系研究生） 林曼志（台師大數學系研究生）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 《幾何原本》(二) 文本研讀
內容摘要
- 人文社會科學史料典籍研讀
會之《測量全義》導讀
- 《測量異同》文本研讀內容
摘要
- 活動報導：2002 國語日報數
學年活動之「數學家的故事」
- 新書櫥窗：《從零開始》

《幾何原本》(二) 文本研讀內容摘要

台師大數學系碩士班研究生 林倉億

一、版本

明代初刻本 (1607 年) 之 1611 年『再校本』，現藏上海博物館與上海圖書館。上海文物管理委員會於 1983 年依據上述『再校本』，影印發行。

二、研讀文本

1. 《幾何原本》第三卷：界說第一、二、三、七、八則；第一、二、十三、十六題。
2. 《幾何原本》第四卷：第十、十一、十二、十六題。
3. 《幾何原本》第五卷：界說第一、三、五、六、八、二十則；第五題。
4. 《幾何原本》第六卷：界說第一、三則；第一、四、十三、十八、三十題。

三、研讀內容摘要

《幾何原本》第三卷主要是在論圓，計有十則界說，三十七題命題。在《幾何原本》第一卷的第十五至十八界中，已對圓、圓心、徑線（即直徑）與半圓作了定義，所以第三卷就不再定義這些名詞。在第三卷中，比較值得注意的是與切線有關的界說與命題。第二界是在定義何謂切線：

凡直線切圓界，過之而不與界交，為切線。

至於何謂「過之而不與界交」？其備註作了說明：

甲乙線，切乙己丁圓之界以乙，又引長之至丙，而不與界交，其甲丙線全在圓外，為切線。

意即與圓有交點且整條線全在圓外的線，就是切線。《幾何原本》對切線的定義與今日常見的定義：「與圓僅相交一點的直線。」並不相同，不過，今日的定義倒是可由第三卷的第二題推出。第二題是：「圓界任取兩點，以直線相聯，則直線全在圓內。」因此，由界說二及第二題，我們可以輕易地推得切線必與圓僅相交一點，而此性質亦被編入第三卷第十六題的

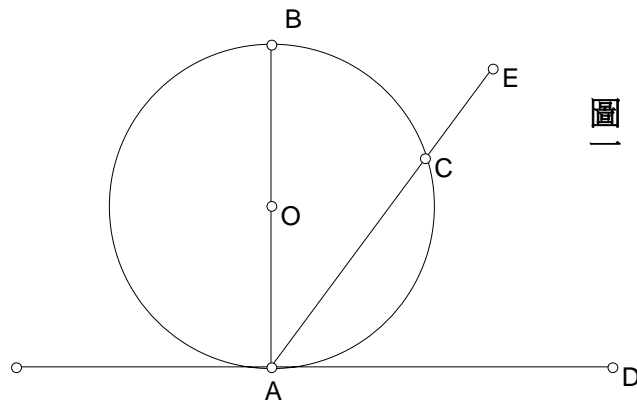
系。

至於第三卷的第十六題，則是筆者認為是整卷中最為有趣的一題：

圓徑末之直角線全在圓外，而直線偕圓界所作切邊角，不得更作一直線入其內，其半圓分角大於各直線銳角；切邊角小於各直線銳角。

現用今日的符號與術語，將此題的題意分為四個部分，並請參見圖一：

- (1) AB 為圓 O 的直徑，直線 AD 與直徑 AB 垂直，則直線 AD 全在圓外。
- (2) 切邊角 $BCAD$ 即由 BCA 弧與 AD 線段所構成之角，且無法在切邊角 $BCAD$ 之中插入任何直線（意即：若 E 為切邊角 $BCAD$ 內任一點，則 AE 線段必與 BCA 弧相交兩點）。
- (3) 切邊角 $BCAD$ 的半圓分角（即 AB 直徑與 ACB 弧所成之角 BAC ）必大於任何的直線銳角（即兩夾邊皆為直線的銳角）。
- (4) 切邊角 $BCAD$ 小於任何的直線銳角。



其中，切邊角的大小與性質，長久以來一直是西方數學家十分感興趣的問題（見 Heath, 1956, Vol.2, pp. 39-43），而這也反映在此題之後的「難曰」之中。「難曰」主要是先對切邊角提出兩點質疑，然後再作解釋。這兩點質疑是：為何切邊角不能被二分？若切邊角小於任一直線銳角，那麼切邊角存在嗎？對於前者，書中解釋的大意是，切邊角只是不能被直線二分，但卻可以用圓弧來二分、三分……等等。至於後者，書中的回答就十分耐人尋味了：

彼所言大小兩幾何者，謂能相較為大、能相較為小者也，如以直線分直線角、以圓線分圓線角是已，此切邊角與直線角豈能相較為大小哉！

言下之意，切邊角與直線角是屬於不能相較大小的兩類，那這豈不是與第十六題的敘述「切邊角小於各直線銳角」明顯地矛盾！對此，筆者十分好奇，為何利瑪竇、徐光啓在翻譯時未能察覺這麼明顯的矛盾？還是說他們對此有另一種的說法或看法？無論是哪一種情況，都有待更進一步的研究。

《幾何原本》第四卷主要是討論圓內接多邊形與圓外切多邊形，計有界說七則，命題十六題。其中第十一題與第十二題分別求作圓內接與圓外切正五邊形，第十六題則是利用圓內接正三角形與正五邊形來作圓內接正十五邊形，並在之後的「注曰」中提到：「依此法可設一法作無量數形。」

《幾何原本》第五卷則是與比例有關的內容，計有界說二十則（在原第十九則之後還增加一則），命題三十四題。此卷所談的比例，與今日的比例並不全然相同，例如三界「比

例者，兩幾何以幾何相比之理」，則界定了必須是同類的幾何量才可以相比。舉例來說，面積就只能和面積相比，而不能和體積相比，因為面積與體積是不同類的。又如第五界「兩幾何，倍其身而能相勝者，為有比例之幾何」，則又對能成比例的幾何對象設限，其在此界的備註中也特別指出：「切邊角與直線角是不能成比例的」，因為無論切邊角增加多少倍，它都無法大於直線角。所以，從今日的角度來看，第五界排除了類似「0:3」的情形。至於第六界：

四幾何，若第一與第二倍第三與第四為同理之比例，則第一、第三之幾倍倍第二、第四之幾倍，其相視或等、或俱為大、或俱為小，恆如是。

則定義了（以今日的符號來表示） $a:b=c:d$ ，其意思是對任意的正整數 $m、n$ ，當 $ma、nb$ 的大小關係與 $mc、nd$ 的大小關係皆一致時，則稱 $a:b=c:d$ 。今日在判斷 $a:b$ 是否等於 $c:d$ 時，最直接、簡便的作法，就是計算 a 與 d 的乘積是否等於 b 與 c 的乘積，但這種作法在第五卷中是行不通的，例如當 $a、b、c、d$ 都是面積時，面積與面積的乘積並不是一個幾何量，於是，也就無法據以判斷是否成比例了。

至於利瑪竇與徐光啓所翻譯的最後一卷，也就是第六卷，亦是與比例有關的內容，計有界說六則，命題三十三題。《幾何原本》第五卷的內容是在討論比例的基本性質，第六卷則是討論一個幾何圖形之中、或是兩個幾何圖形之間成比例的線或面。例如第一題是「等高之三角形、方形，自相與為比例，與其底之比例等。」第十三題則是求作給定兩直線的比例中項：「兩直線，求別作一線為連比例之中率。」至於第十九題以後，則是多與相似形有關的命題。

四、參考文獻

Heath, Thomas L. (1956). *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*. New York: Dover Publications, INC.

人文社會科學史料典籍研讀會之《測量全義》導讀

台師大數學系在職進修碩士班 麗山高中 彭君智老師

一、緣起

治元 13 年（西元 1276 年），元軍攻下南宋首都臨安城（今浙江杭州），隨後於大都（原名燕京，今北京）定都，並設立行省制度，大一統局面大抵告成，獨缺可統一頒行全國的曆法。同年夏末，元世祖忽必烈（1260~1294）親督設立一個專門編制新曆的機構 -- 太史局，徵調剛從督水監轉任工部郎中不久的郭守敬（1231~1316）入局，與太史局總負責人張文謙、「算數冠一時」的王恂、「明達曆理」的許衡等人一同編曆。編曆工作在郭守敬「曆之本在於測驗，而測驗之器莫先儀表」的觀點下進行，歷經四年，於治元 17 年（西元 1280 年）完

成《授時曆》。

明初洪武肇興，因循《授時曆》前制，改成新包裝 --《大統曆》頒行全國。不過，由於禁止民間熟習曆法，再加上當時「司天監」之功能僅限於考驗交食，故曆法自元至明久頒未修，已經不起考驗。終於，在「崇禎二年（西元 1629 年），推日食不驗，禮部乃始奏請（宣武門外）開局修改，以光啓（1562~1633）領之」，其他修曆主導者先後有太僕寺少卿李之藻（1565~1630）、光祿寺卿李天經（1579~1659，徐光啓奏請的接班人）及西洋耶穌會傳教士龍華民（Longobardi Nicolas 1559~1654）、鄧玉函（Terrenz Jean 1576~1630）、羅雅谷（Jacques Rho 1593~1638 義）、湯若望（Schall von Bell Johann Adam 1591~1666 德）等人。曆法編修前後歷時五年，所成書目分五次恭呈御覽，共計 137 卷為《崇禎曆書》。

本書內容涵蓋基本五目（法原、法數、法算、法器、會通）與節次六目（日躔、恆星、月離、日月交會、五緯星、五星交會），其效用則為「著定交食七政各有二百伍年表，可為二百年內推算之法；又有太陽、太陰永年表，可為千百年後再算之根；又各有歷指以析諸行之理；并究舊法所以差繆之原，頗明且盡」。其中羅雅谷譯撰的《測量全義》10 卷，見於崇禎四年（1631）八月初一日第二次進呈書目之首。

二、版本

崇禎 17 年（1644）清兵入關，湯若望將《崇禎曆書》刪修為《西洋新法曆書》103 卷進獻請降（自此，傳教士第一次進駐欽天監）。至乾隆 37 年（1772）開四庫全書館時，才又參考當時編曆奏疏及考測辯論之事，於書首增添 8 卷「緣起」，最後增刪為《新法算書》100 卷。

由於實際收藏於中研院傅斯年圖書館《西洋新法曆書》木刻善本版之《測量全義》僅有 8 卷，故此導讀文本，採用完整且較易取得的景印《文淵閣四庫全書》手抄版第 789 冊（頁 579~748）之子部《新法算書》卷 87-96。（由台灣商務印書館發行）。

三、內容

書首〈敘目〉開宗明義，即道出本書所論乃『法原』與『法器』之屬的度數之學，其大體輪廓如下：

《測量全義》十卷，前九卷屬法原，後一卷屬法器，法原者，法之所以然也，而「歷法之原有二」，「此書所論則推測之原也」，至於「古今言推測者又有二」，「此所論者，又綴術也！」，其中「綴術之用又有二」，「曰量法也」、「曰算法也」，因此「歷象之家兼用二法，如鳥之傳兩翼也，則無所不可之矣！」

茲將〈敘目〉所提「曆法之原」所涵蓋的內容，以下表呈現：

法 原	象緯之原 (天事也)	「如《測天約說》所論百中之一二耳，其他散見於《七政本論》，會而通之，聊足著明矣！」			
	推測之原 (人事也)	惠 術	可以形察、可以度審者		
		綴 術	不可以形察、 不可以度審者	量 法 算 法	總物以為度，論其幾何大 截物以為數，論其幾何眾

另外，參對《新法算書》與《西洋新法曆書》版本目錄如下：

卷	《新法算書》	《西洋新法曆書》	卷	《新法算書》	《西洋新法曆書》
1	三角形（無卷名）	敘目、測直線三角形	6	論體	測體
2	測地與物（無卷名）	測線上	7	球面曲線形	測曲線三角形
3	測地與物（無卷名）	測線上	8	解正球上大圈相交之度分	測球上大圈
4	測面（無卷名）	測面上	9	測星	測星
5	圓面求積	測面上	10	儀器圖說	儀器圖說

我們著重【探討】以下幾點：

- (1) 「惠綴之術」一詞應源自沈括（字存中，北宋錢塘人 1031~1095）。而「總物以為度，其幾何大」的「量法」，即今研究 magnitude 的幾何學；「截物以為數，論其幾何眾」的「算法」即今研究 number 的代數學與算術學。
- (2) 敘目中提及《測天約說》、《大測》、《七政本論》、《弧矢算術》與《測圓算術》等書，其中《測天約說》2 卷與《大測》2 卷見於崇禎四年（1631）正月二十八日第一次進呈書目，由鄧玉函編撰，湯若望修訂，今分別收編於《新法算書》11、12 卷與 9、10 卷。至於「七政」，自古即是日、月與水、金、火、木、土五星之總稱。而《七政本論》、《弧矢算術》與《測圓算術》目前未查得相同之書目。後兩者可能是明代數學家顧應祥所撰。

四、界說

〈敘目〉之後，便是與現今三角函數有關的 23 則界說。之後在第四卷之首，則列有與面有關的十三則『界說』。至於第六卷提要之後，雖無界說之名，卻有（與體有關的）界說之實，其餘各卷則不見界說之蹤跡。

有關第一卷『界說』23 則，我們探討了以下問題：

- (1) 《新法算書》的界說緊接於敘目之後，然後才是第一卷，而《西洋新法曆書》則將此界說融入第一卷之首，此與《幾何原本》排序相同，前者是否因未留意而於次序抄錄上有誤，待查。
- (2) 異於現今課堂上從直角三角形三邊的比例或從角的函數對應著手，早期的三角學從圖形上圓與角和半徑的對應來定義「八線」，如此多樣的教學進路，值得教師們多方參酌。又圖形上的半徑習慣以十萬為全數（界說 18），與現今的『單位圓』概念不同，故查表所得數據皆為整數，此等迴避小數的動作，或可顯現出人類「數系發展歷程」的一個縮影。
- (3) 1-3「通弧之相當線」中，「相當」一詞的引用，意指相對應，而非相等。
- (4) 1-4「圈徑」（今直徑）出現雙重解釋，不僅是圈內線「極大」，還要「過心」。
- (5) 1-8 對「徑之半」以「全弦」名之，然而文後仍習以「半徑」一詞用之。而「象限弧之正弦」中已出現 $\sin 90^\circ$ ，推測本書所以如此輕易就跨越銳角三角的鴻溝，應歸功於「八線」的定義。
- (6) 1-9「直線角」即今之圓心角。
- (7) 1-16~1-21 分別以多例談「假設法」的使用，是否為現今數學解題中「設未知數或已知數」的鼻祖？待查。
- (8) 「平形」一詞未見後文用之，似乎與今日「正方形」、「長方形」或「矩形」相通。
- (9) 本卷界說另在七、八、九卷有寬廣的舞台演出。

有關第四卷之界說 13 則，我們探討了如下問題：

- (1) 多處內容與《幾何原本》卷一 36 則界說有交集，但卻似乎是此一時、彼一時的各行其事。「討論、潤色原擬多用人員，今止臣一人，每卷必須七八易稿」，徐光啓在這方面的把關標準或許值得玩味。
- (2) 關於「有法之形」、「無法之形」的「法」字，多數時候純指“regular”，但常常“uniform”嘛ㄟ通，有機會應校對其翻譯母本的原文。(第六卷「有法之體」、「無法之體」與此同)。
- (3) 4-7 最後出現 4-12 定義的「中長線」，有無違反界說本身的遊戲規則？又中國自古以三為多，此「四界之面」特為列出，應是考量實際需求。
- (4) 4-9「定度者」與 4-10「量算」較不像界說“term”的味道。而量算中，「240 方步為畝」與《九章算經》「以畝法二百四十步」同，至於「25 方尺為步」出自何處？待查。
- (5) 4-11「中垂線」與現今國中「垂直平分線」之簡稱所指迥異。
- (6) 4-13「直線為有法形之徑」後文未見用之。

有關第六卷之界說無明確區別，今仿第四卷分為 12 界，茲探討如下：

- (1) 6-1「體者，面之積」。按徐光啓在《幾何原本》界說五不僅說「面為無厚」，還要強調「之極」，此處卻又接受「面之積」的操作定義，兩種截然不同的想法是衝突？還是併行不悖？另「面為線之積」vs.「面者，有長無廣」與此同。
- (2) 6-6 另有註解「因角體之面無定數，故左方不列其名」，將角錐視為「公法」不多贅述。
- (3) 6-5、6-7~6-10 引進五種正多面體，另有「《幾何原本》一十一卷詳解其理」之註解，至於其他如角柱 (prism)、反角柱 (anti-prism) 則以「有法之體」概括而未加詳述。

五、體例 (體例結構與定理引用未按實際出現先後次序排列，「*」後數字為出現次數)

卷	題	體例結構	定理引用
1	17	3 支 * 3 4 支 * 3 解曰 * 18 論曰 * 07 法曰 * 19 又問 * 2 又增題	# 《幾何》1-5、8、10、18、32 * 2、34、47 * 3 / 2-6 / 3-3 * 3、15、20、26 * 2、27、30、35、36 / 5-8、15、18、同類、異類、反理、轉理 / 6-4、13 / 7-19。 # 《全義》界說 5、界說 8 / 1-2。 # 書目：《勾股索隱》、《籌算》。 # 其他：「依邊與邊若角與角比例之法」(今正弦定理)、「再用前法」、「用加減法」、「依前論」、「用切割兩線」 * 8。
2	10	3 支 * 3 法曰 * 73 論曰 * 27 解曰 * 16 省算法 * 8	# 《幾何》1-29、32 * 2 / 5-11 / 6-2、4 * 3。 # 《全義》1-12-2。 # 儀器：象限儀、矩度。 # 其他：「因角與角之正弦若邊與邊」(今正弦定理)、「交立邊」 * 4、「交平邊」 * 5、「互交法」 * 3、「三率法」 * 3、「用切線」 * 6、「重表法」、「用正弦法」 * 5、「測遠法反用之」。
3	8	增題 * 5 論曰 解曰 法曰 * 3	# 儀器：象限儀、矩度、矩尺。 # 書目：《幾何用法》 * 2。 # 其他：「重表法」 * 3、「四表法」。

4	3	舊法*7 論曰*6 駁曰*3 解曰*3 法曰*4 系 *3	# 《幾何》1-26/7-17/14-12。 # 《全義》1-6、15、16。 # 書目：「能發之根與不發之根之同類異類相乘之容方積詳見《勾股索隱》」、「形之邊爲斷幾何：以邊數自之又加邊數半之爲形之積，見《算章》遞加法」。 # 其他：「後第三題」、「用勾股法」。
5	9	解曰*4 論曰*5 系 *5 第1~7圖 法曰*2 增題 其1~5 1~4設	# 《幾何》1-11、47/3-21、31、55/4-15/第6卷、6-1+增、2、3、19、33第十增/10-1/12-2。 # 書目：《圓書》、《勾股義》。 # 人物：亞奇默德。 # 其他：「三倍又七十之十則臚；三倍又七十一之十則盈」、「古設周問積法」、「古設徑問積法」、「量橢圓法」、「量體法」、「量面用法」、「變形法」、「截形法」、「借題」。
6	6	系 *3 論曰 法曰 亞奇默德曰 默德法曰 解曰	# 《幾何》5卷10界/11*2/12+7增題+系、32/13/14*2。 # 《全義》5-2。 # 亞奇默德之1-31、1-32、1-40。 # 書目：《幾何論》、《圓球圓柱書》。 # 人物：亞奇默德。 # 其他：三角形、平圓形、圭竇形、陶邱形、橢圓形。
7	52	系 *41 論曰*4 解曰*11 法曰*5 第1~10設 1~30求 1~3法 古法	# 《幾何》1-6、11、12、15/5卷+系+二系+解、5-19/6-4、10、14、17+系。 # 《全義》7-3-13系、7-4+系+13系/8。 # 《圓球原本》1-21 # 書目：《圓球原本》、《宗動天》向上諸篇。 # 人物：古德阿多西阿 (Theodesius, 100B.C.)。 # 其他：「兩率之中率」、「此二類自明無論」、直角形、斜角形（六問詳見後篇）、不等形、斜角形、「因除法爲繁，故約用乘法」、「三題十三系」、「前解」。
8	21	1~3求 其1~5 解曰 法曰*7 第1~3圖	# 《全義》7-1設、2設、3設、4設+2求、3求、斜角形、8設3求。 # 書目：《曆指》、《交食曆》。 # 其他：「用前正球一題第三求」、「用三設之第三求」、「見別卷」、「另卷有本表及其用，免算」、「用直角第四設、第二設」、「依上第三題」、「見正球說」、「法見正球四題」。
9	17	法*5 法曰	# 《全義》7-5。 # 人物：馬日諾 (Antonio Magino, 1555~1617)。 # 其他：「二求法見下第一假如」、「或用第二法」、「相易法」。
10	33	用法*7 論曰*4 按 *4 1~4測 分法*2 省算	# 《幾何》1-16/6-10。 # 《全義》3增題、4、9。 # 書目：《圭表說》、《揆日定訛》、《右弧矢儀說》、《幾何法》3-20、《曆指》、《恆星曆指》、《表度說》。 # 人物：多祿某 (Ptolemy, Claudius Ptolemaeus, 170~100B.C.)、日白耳 (Gemma Frisius Reiner, 1508~1555)、第谷 (1546~1601)、先儒丁氏 (P. Christophus Clavius, 1537~1612)。 # 其他：「舊法第一章」。

茲探討如下：

(一) 關於書目

- (1) 《圖書 (Measurement of the Circle)》、《圓球圓柱書 (De Sphaera et Cyliandro)》皆亞奇默德 (Archimedes, 287?~212 B.C., 今譯阿基米德) 著,《籌算》見納皮爾 (Napier, 1550~1617 英) 計算器。
- (2) 《幾何原本》、《勾股義》源於徐光啓。
- (3) 《曆指》、《交食曆》、《揆日定訛》、《恆星曆指》俱見《崇禎曆書》。若依進呈書目的先後次序而言,《月離曆指》、《交食曆指》與《五緯曆指》皆為第三、三、四次所進書目,而《交食曆》的出現應是同步編修的關係,遂在此(第二次進呈書目)提及。而此處《曆指》有可能是指《恆星曆指》、《日躔曆指》、《月離曆指》或《交食曆指》,待查。
- (4) 《勾股索隱》、《幾何用法》、《算章》、《幾何論》、《圓球原本》、《宗動天》、《右弧矢儀說》、《幾何法》、《表度說》、《圭表說》,目前未查得相同之書目。
- (5) 關於《幾何用法》、《幾何論》、《幾何法》可能都是指艾儒略(1582~1649)口譯、瞿式谷(清)筆授,仿照《幾何原本》前四卷所重新改寫,後被湯若望加進《西洋新法曆書》的《幾何要法》,此書是否因為徐光啓本身的關係而被剔除在《崇禎曆書》之外,待考證。

(二) 關於體例與定理引用

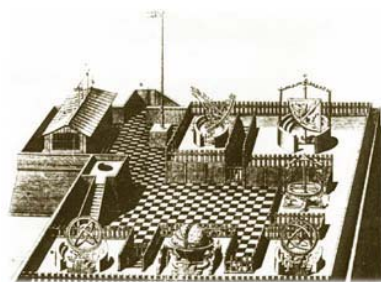
- (1) 綜觀古今歷史,曆書的編修多出自政治考量,以徐光啓的特殊經歷而言,是否在治本(透過欽天監發展科學學術並教導監生學習)與治標(政令宣導)的把關監控之間尋得平衡點,值得細究。
- (2) 十卷內容的體例撰寫盡量延用《幾何原本》的模式,然而彼此格式像是什錦燴飯,統一度不高,曆書編撰雖由徐光啓領之,但光啓已年邁困疾(他在觀象台考驗時,「不意偶然失足,顛墜台下,致傷腰膝,不能動履」),其憂心在奏疏的字裡行間,已表露無遺:「目下算數、測候、謄寫員役雖不乏人,而釋義、演丈、講究、潤色、較勘、試驗獨臣一身,即使強健逾人尚苦茫無究竟,況今疾困支離,臥病一日則誤一日之事,……,其理義甚奧而績,法數甚曲而繁,非集思廣益,何能速就?況臣既衰且病,不得不瀆臣於聖明之前也!」
- (3) 全書前後的結果常常自我引用,其邏輯論證體系可說是儘可能模仿《幾何原本》。不過,由於十卷所涵蓋的數學內容實在太廣,故無法自成一格,即或只是引述書目,就已超出徐光啓所掌握的《幾何原本》卷一至卷六的內容。又各題出現「解曰」、「論曰」、「法曰」體例不一,其出現與否的時機也值得探討。另值得注意的,是某些公式的引用(如正弦定理)常是不勝其煩的全盤托出,而不註明是第幾卷第幾題。同時,定理本身也缺少證明。更有甚者,是出現前文引「後果」(卷七:六問詳見後篇)、無須證明(卷七:此二類自明無論。卷八:免算),或是交代不清的情況(卷七:見別卷。卷八:另卷有本表及其用)。凡此種種,應當是徐光啓心有餘而力不足吧!

(三) 關於各卷

- (1) 〈敘目〉中,編者對三角形下了一個操作定義:「三角形繇兩視線、一徑線。徑線者,所測物之廣也,徑之兩端出兩直線,入交於目睛之最中而成形。」同時,也再次與《幾何原本》呼應,強調學習數學可以修養心性:「習之奈何?習手與目以求其貫也!習

心與意以求其信也！不習、不貫，未有能信者也！習且貫，未有不信者也！」

- (2) 第一卷出現不少三角函數的公式，如正弦定理、和差化積等，徐光啓如何面對這些只套用結果卻不論其證明的數學知識？而關於海龍公式更有一番長篇大論的說明，頗值得考古。
- (3) 卷二、卷三透過「象限儀」、「矩度」、「矩尺」等儀器說明各種測量高、深、遠、廣的處理與計算，若仔細區分，將發現這些原本放諸四海皆準的簡儀，似乎都有其習慣的使用時機。而卷十的內容，也不僅止於介紹儀器，其間尚夾雜「論曰」，甚至還有「按」，由此可見，編修者的出發點著實不單純。
- (4) 卷三末附有「割圓八線小表」（15分爲單位），應是配合卷二與卷三各種測量所需，而《新法算書》卷81、82，則另闢有以1分爲單位的「割圓八線表」。
- (5) 卷四對於正多邊形之介紹依序爲「量四邊形」、「量三邊形」、「量多邊形」，與今日中小學從正方形著手引進各種面積公式的方法相同。而其間所碰觸到的有理數、無理數則給了「能發之根」、「不發之根」的特別名稱。另有「駁曰」來辨證舊法、古法之謬誤。
- (6) 卷五引進圓面積的證明及阿基米德的《圓書》與《圓球圓柱書》，但是，此一數學知識的引進，對中算家而言似乎未激起任何漣漪。而文中對於古法「徑一周三」、「周自之，十二而一」以及「徑自乘，三之四而一」，則給予「究舊法所以差繆之原」，但對於圓周率求得精確位數一事，卻又覺得是畫蛇添足，多此一舉：「徑與周之比例，古士之法如此（指阿基米得的 $3\frac{10}{70}$ 與 $3\frac{10}{71}$ ），今士別立一法，其差甚微，然子母之數積至二十一字為萬億億，難可施用」，從 π 的發展史來看待此一歷史插曲，值得深思。
- (7) 第六卷提要對於關乎日、月、星等天文測量之事，何以要先研究點、線、面、體的「測量之全義」（本書名稱緣由）有一番充分的解釋，值得咀嚼。而對於體的介紹，多有《九章算術》之例，如「委粟」的倚垣、外隅、內隅、「塹堵」、「陽馬」、「鼈臙」等，而對於立體幾何興趣不大，五種正多面體的引進只因是「有法之體」，其用則單純爲「比例之法」。（直到梅文鼎才在《幾何補編》中揪其繆誤，同時還討論幾個阿基米德立體的演變）
- (8) 關於七、八、九卷的球面幾何知識，值得入門一探。
- (9) 卷10出現「地球」一詞，對當時的中土學者而言，「天圓地方」的世界觀，是否已很自然而然地轉化爲古老的「神話傳說」，其演變歷程待研究。右圖爲摘錄自《古今圖書集成》的北京古觀象台。



六、參考資料

- 洪萬生 (2002). 〈《幾何原本》(一) 文本研讀內容摘要〉,《HPM通訊》第五卷第四期
<http://math.ntnu.edu.tw/~hornng>
- 陳遵媯、湛穗豐 (1995).《中國天文學家故事》，台北：銀禾文化事業有限公司。
- 梅榮照主編 (1990).《明清數學史論文集》，江蘇：江蘇教育出版社。

《測量異同》文本研讀內容摘要

台師大數學研究所碩士班 楊瓊茹

一、徐光啟的生平、交遊與著作

徐光啟 (1562-1633)，字子先，號玄扈。其年譜大要如下：

1562 年 (嘉靖四十一年)，生於上海。

1581 年 (萬曆九年)，20 歲，考中金山衛秀才。

1597 年 (萬曆二十五年)，36 歲，鄉試中舉人。

1600 年 (萬曆二十八年)，在南京訪問利瑪竇。

1603 年 (萬曆三十一年)，從葡萄牙傳教士羅如望(Jean de Roacha) 領洗入天主教。

1604 年 (萬曆三十二年)，43 歲，北京會試中殿試三甲五十二名，賜同進士出身。

1605 年秋 (萬曆三十三年)，利瑪竇口授、徐光啟筆受，在北京合譯《幾何原本》前六卷。

1607 年 (萬曆三十五年丁未)，《幾何原本》前六卷北京刊行。與利瑪竇編譯《測量法義》。丁父憂回家守制。

1608 年 (萬曆三十六年戊申)，在家守制期間將《測量法義》定稿。撰《測量異同》。

1609 年 (萬曆三十七年)，著作《勾股義》。

1610 年 (萬曆三十八年)，利瑪竇逝世。

1629 年 (崇禎二年)，設曆局，督修曆法，用西法改曆，主持編修《崇禎曆書》。

1633 年 (崇禎六年)，官至太子太保禮部尚書兼文淵閣大學士，卒於北京。享年七十二歲，諡文定。



按明代政府官員的來源，除了國子監之外，大多數的文官是由科舉制度登入仕途。府州縣學的生員 (秀才) 每三年在省城會考一次，稱為鄉試，合格的稱為舉人 (鄉試第一名稱爲解元)。第二年全國舉人在京師會考，稱為會試 (會試第一名稱爲會元)，合格者再至殿廷覆試一次，由皇帝親自主持，稱為殿試，及格的則爲天子門生。榜單分爲一甲、二甲、三甲，一甲爲狀元、榜眼、探花，共三人，賜進士及第；二甲若干人，賜進士出身；三甲若干人，賜同進士出身 (二甲、三甲第一名稱爲傳臚)。

徐光啟是典型的科舉出身，但是，他的科舉之路卻是走得極爲辛苦，屢次應試都不能登第。整整有二十三年的時間，他只能以開設教館，教書爲生。一直到四十三歲，考中進士，才開始有機會表現他的才學。另外，也由於結識了利瑪竇等傳教士，得以學習到西方的科學知識。登入仕途與結識傳教士這兩點，似乎是徐光啟人生的轉折點。徐光啟晚年時，官高位重，官至文淵閣大學士。大學士的職責原是替皇帝撰擬詔誥、潤色御批公文等工作。然而，明太祖朱元璋廢丞相，內閣大學某種程度上便行使了丞相的權力。不過，徐光啟一生也致力於數學、農業、水利、曆法等學科研究，對於明末西方科學的引進有所建樹，著有《農政全書》。

二、研讀的版本

研讀文本《測量異同》，取材於《徐光啟著譯集》第 8 冊，也就是《周髀井田記·徐文

定雜著》的版本。

三、研讀內容摘要

1607年，徐光啓與利瑪竇編譯《測量法義》，引進了西方的測量儀器—矩度，並且應用相似三角形的原理以及三率法，來說明『法之義』。徐光啓著作《測量異同》一卷，可說是繼《測量法義》之後的補充和探討。本書總共列舉六題，逐一對比中國舊有的勾股測量與《測量法義》的異同，以達到「會通中西」的理想境界。《測量異同》的序文，說明了徐光啓的撰寫此卷的目的：

九章算法勾股篇中，故有用表、用矩尺，測量數條。與今譯《測量法義》相較，其法略同，其義全闕，學者不能是其所繇(由)，既具新論，以攷(考)舊文，如視掌矣。今悉存諸法，對題臚列，推求異同，以俟討論。其舊篇所有，今譯所無者，仍補論一則。

徐光啓序文中的『九章算法』指的是《九章算術》或《九章算法比類大全》，需要更確切的證據。因此，本文下列所論的六大題型，則以西法的《測量法義》和中法的《算學寶鑑》、《算法統宗》、《九章算法比類大全》、《神道大編曆宗算會》、《續古摘奇算法》、《九章算術》、《詳解九章算法》、《九章算術》對照。

第一題 以景測高

第二題 以表測高

第三題 以表測深

第四題 以重表兼測無遠之高無高之遠

第五題 以四表測遠

第六題 以重矩兼測無廣之深無深之廣

注文中「前篇」指的是《測量法義》；而「六卷四」、「一卷三十四」等等，則是《幾何原本》的命題。在求高的算法中，中法著眼於物（加表高）；西法著眼於人（加目高）。另外，《測量法義》僅有重表測高，而無重表測遠，所以，第四題補論重表測遠，即『舊篇所有，今譯所無』。在第四題的卯辛和第六題的辛丑，兩者取法並不一致，但是由《幾何原本》分比例的進路，徐光啓並沒有前後矛盾的錯誤，甚至已經跳脫平行線的囿限。

綜觀《測量異同》全卷，徐光啓以《幾何原本》和《測量法義》的相似三角形原理會通中西。其實，中算家的「出入相補原理」—『勾中容橫，股中容直，二積之數皆同』，徐光啓也相當熟悉，但是，在《測量異同》裡，徐光啓卻隻字未提。究其原因，從徐光啓早年屢試不第，到後來結識傳教士和登入仕途，得以發揮才能、貢獻一己之力，或許就不難理解徐光啓為何如此重視西方科學知識。

四、參考文獻

徐光啓 (1983).《徐光啓著譯集》，上海文物保管委員會主編。

吳文俊 (1986).《吳文俊文集》，濟南：山東教育出版社。

郭書春主編 (1993).《中國科學技術典籍通匯·數學卷》，卷一、二、四，濟南：河南教育出版社。

孫尚揚 (1993).《利瑪竇與徐光啓》，北京市：新華。

羅光 (1960).《徐光啓傳》，台北：傳記文學出版社。

異體字字典：<http://140.111.1.40/main.htm>

活動報導：2002 國語日報數學年活動之「數學家的故事」

台師大數學系碩士班研究生 陳彥宏

2002 國語日報數學年系列活動之一的「數學家的故事」，終於在 5 月 4 日洪萬生老師的精彩演說中告一段落。國語日報科學教室將今年（2002 年）訂為「數學年」，其目的是：一、宣揚該報數學班教育理念與特色，二、將其數學教學經驗提供給各界觀摩與討論，三、讓親子見到數學知識的趣味性與豐富性；當然最主要地，他們希望能夠透過這樣一系列的活動提高其數學班學生的招收率。該報從一年前開始著手進行籌畫，經過了一年的努力，終在今年 1 月 23 日正式開鑼，整個活動系列主要可以分為五大部分，分別是：一、寒假親子數學競賽，二、春季認識數學家，三、暑假生活數學列車，四、秋季數學種子教師研習，五、綜合活動。¹針對「數學家的故事」這一活動，國語日報曾在去年年底求教於洪萬生老師，洪老師建議該報與本系學生合作，筆者才能有機會與碩士班研究生黃哲男及師大數學系的學弟妹們共同參與，而由於其他活動筆者並未親身參與，因此本篇文章將只對「數學家的故事」作一簡單介紹。

洪萬生老師曾提出撰寫此類文章時，必須注意三個要素：一、數學知識的啟發與認知，二、數學家的人格特質，三、數學家與其所處的文化脈絡之互動。最初在人物的選擇上，我們達到一個共識：即不希望全部著眼於那些“最為人知”的數學家，並且最少包含一位女數學家 and 一位中國數學家，因為在學習的歷程之中，他們鮮少有機會去接觸到除了數學知識本身以外的其他面向（比如說，數學家的生平、身處之社會文化脈絡、...等等），另外，在強調西方“希臘傳統”數學知識的嚴謹結構性之時，東方的數學成就往往不知不覺中被“淡化”了。考量了上列幾項因素及參考資料是否容易取得等，最後選定阿波羅尼奧斯

（Apollonius, 約 262B.C.-190B.C.）、阿基米德（Archimedes, 287B.C.-212B.C.）、祖沖之（約 429-500）、費馬（Fermat, 1601-1665）、巴斯卡（Pascal, 1623-1662）、牛頓（Newton, 1643-1727）、高斯（Gauss, 1777-1855）、阿貝爾（Abel, 1802-1829）、桑雅·卡巴列夫斯基（Sonya Kovalevsky, 1850-1891）、希爾伯特（Hilbert, 1862-1943）、哈代（Hardy, 1877-1947）、艾狄胥（Paul Erdos, 1913-1996）十二位數學家，²此外，國語日報又加了六位數學家：畢達哥拉斯（Pythagoras, 約 580B.C.-500B.C.）、泰利斯（Thales, 約 625B.C.-547B.C.）、費波那契（Fibonacci, 1175-1250）、尤拉（Euler, 1707-1783）、拉瑪努江（Ramanujan, 1887-1920）、華羅庚（1910-1985）。

值得一提的是，數學年系列活動的主要對象是國小中高年級學生（當然也包括其家長），因此關於數學家的故事之寫作方式對我們來說著實是一項“挑戰”。鑑於一般人對於數學和數學家的刻板印象，以及過去相關書籍往往將數學家塑造成如“神”抑或“怪”一般的形象，在寫作時，我們希望除了能夠兼顧趣味性與簡單易懂，並且也試圖去突破此一窠臼，將數學家“平易近人”的一面與對於數學的熱忱展現出來。

十八位數學家的故事，共分為三個星期展出，每一星期展出六位，展出同時，國語日報也利用問卷的方式舉辦了有獎徵答活動，小朋友們必須從展出內容中找尋相關問題的答案。從每一週展出時小朋友與家長熱烈參與的情形與及最後有上萬封的讀者回函參加抽獎來看，筆者相信某一程度而言，我們已達到了讓參與者“貼近”數學與數學家的目的。而 5 月 4 日當天洪萬生老師的演講，會場座無虛席，有的更是“全家動員”，當中不時可以見到聽眾努力作筆記與發表意見，令人不禁感到一絲絲的欣慰：除了學校的課程之外，原來大家亦會對表面上看來與升學無關的其他面向“感興趣”！



活動照片一 國語日報
數學家的故事展示會場



活動照片二 參觀人潮



活動照片三 5月4日洪萬
生老師於國語日報大樓演講



活動照片四 於演講後進行公開抽獎

註釋 1

2002 年國語日報科學教室數學年系列活動

主題	活動日期與時間	活動內容	活動地點	參加對象	
A 寒假親子 數學 競賽	1月23日 (週三)	09:00 ∩ 12:00	A-1 數學解題講解比賽	9樓科學教室	小朋友
	1月23日 (週三) / 2月3日 (週日)	09:00 ∩ 17:00	A-2 數學立體造型勞作與幾何作圖競賽	本報 1樓大廳	親子
			A-3 數學燈謎解題競賽		
			A-4 數學解題挑戰有獎徵答		
	2月3日 (週日)	14:00 ∩ 17:00	A-5 數學命題有獎徵答	9樓科學教室	小朋友
			A-6 數學益智遊戲暨數學玩具與圖書販售		
	2月3日 (週日)	14:00 ∩ 17:00	A-7 數學解題講解決賽	本報5樓 大會議室	親子
			A-8 立體造型勞作與幾何作圖評選 數學命題抽獎暨頒獎活動	本報 1樓大廳	

B 春季 認識 數學家	B-1	3/3~3/31 每週三 15:00, 17:00 暨週六,日 10:10,13:00, 15:00 各 解說一場, 自由參加	B-1 認識數學家解說活動暨有獎徵答 1 (5月4日演講時公開抽獎)	9樓科學教室	親子	
	B-2	3/3~3/31 每週一 二四五 10:00~15:00 接 受學校團體預約參觀 解說	B-2 認識數學家解說活動暨有獎徵答 2 (5月4日演講時公開抽獎)	9樓科學教室	親子	
	B-3	3/5~4/30 每週二 閱讀國語日報第6版 科學版【數學家的故 事】內容參加有獎徵答	B-3 閱讀國語日報暨網站數學文章有獎徵答 (5月4日演講時公開抽獎)	國語日報暨 網站	親子	
		5月4日 (週六)	14:00 ∩ 16:00	B-4 認識數學家【演講】暨有獎徵答抽獎活動	本報5樓 大會議室	社會大眾
C 暑假 生活 數學 列車		7月3日~ 7月31日 每週三下午	17:00 ∩ 17:30	C-1 觀賞中視兒童天地數學節目有獎徵答 (8月10日假本報公開抽獎)	中視兒童 天地節目	親子
		7月6日週 六及7月21 日週日2天	10:00 ∩ 15:00	C-2 奇妙的數學專車之旅	本報 1樓大門口	親子
		7月8日 / 7月21日	08:30 ∩ 17:00	C-3 生活數學經驗省思暨有獎徵答 (8月10日假本報公開抽獎)	9樓科學教室	親子
		8月10日 (週六)	14:00 ∩ 16:00	C-4 生活數學【演講】暨有獎徵答抽獎活動	本報5樓 大會議室	親子
D 秋季 活動		9月2日~ 9月30日 每週一晚上	18:00 ∩ 21:00	D-1 數學種子教師研習	本報8樓 數學教室	小學教師
E 綜合 活動		12月14日 (週六)	10:00 ∩ 15:00	E-1 親子生活數學嘉年華	本報 1樓大廳	親子
		12月14日 (週六)	14:00 ∩ 17:00	E-2 數學教育成果展示暨綜合研討會	本報5樓 大會議室	社會大眾

註釋 2 各篇文章與作者分別為：

師大數學系 王建弘，偉大的幾何學家－阿波羅尼奧斯、近世最多產的數學家－艾狄胥

師大數學系 王香評，中國數學家－祖沖之

師大數學系 呂正基，古怪的天才－哈代

師大數學系 李虹儀，傳奇人物－巴斯卡

師大數學系 林芳成，站在巨人肩膀－牛頓

師大數學系 莊佳富，業餘數學家之王－費馬

師大數學系 張裕旻，女性數學家－桑雅

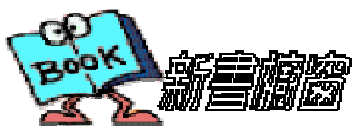
師大數學系 張繼元，貧窮的天才－阿貝爾、數學王子－高斯

師大數學系 鄭勝鴻，出色的風笛手－希爾伯特

師大數學系 劉宜雯，百手巨人－阿基米德

以上各篇文章皆刊於國語日報網站「2002 數學年數學家的故事」中。網址：

<http://www.mdnkids.org/mathematician/mathstory.htm>



與『空無』對話

台師大學數學系 洪萬生教授

書名：《從零開始》

作者：羅伯·卡普蘭

出版：究竟出版社

頁數：293

本書是有關數目零的第二本數學普及著作之中譯。這幾年來，幾個特殊的實數如圓周率 π ，尤拉數 e 與虛數 $\sqrt{-1}$ 的故事相繼登場，為數學普及書寫注入了新鮮的活力，對於有志於此道的作者，應該帶來很大的鼓舞作用。

這幾個實數是『尤拉公式』($0 = 1 + e^{\pi\sqrt{-1}}$) 的主要組成部分。此一公式曾被國際數學家社群評定為最漂亮的數學公式，大概它最符合數學家所謂『簡單而深刻』的根本要求吧。因此，有關 π ， e ， $\sqrt{-1}$ 與 0 的故事，都在一九九零年代成為科普書寫的話題。不過，後兩者的故事遠較前二者曲折，譬如相較於 π 與 e 來說， $\sqrt{-1}$ 與 0 都花了相當長時間才獲得了『正當性』。其實，數學史家也不過是在這二十年內，才比較看清楚這兩個數目的滄桑容顏，他們的研究成果，也因而惠及相關的科普著作（譬如本書）。

這應該也可以解釋：何以本書竟有 218 條註解，而且參考文獻更是多達 232 則左右，尤其包括不少古典文本（請查閱：牛津大學出版社網站）。由此，我們可以了解本書作者卡普蘭的苦心造詣。卡普蘭擁有高深數學專業，精通多國語言（包括拉丁文與梵文），同時，在哲學與各個民族（包括印度與馬雅）的歷史與（宗教）文化等方面，也有全方位的修養。更難得的，他畢生致力於推廣數學，非常樂意分享數學學習的喜悅。因此，他追隨『自然主義式』的書寫風格，文類則在敘事之外，兼採論說與抒情，從容地『追蹤零的符號與意義』。我們在捧讀本書時，難免被他『隨興』安排的岔路暫時打斷，不過，通過他的眼睛來觀察『空無』的世界，也的確賞心悅目。

本書共有十七章，作者在安排時別出心裁，特別從『第零章』開始，而非從第一章。顯然，作者運用了『 0 』的形象比喻，說明他的敘事並非結束，反而是一個入口，引領我們進入永遠等待完成的數學風情畫之中。就全書的論述結構來說，第七章（『典範的轉移』）是『 0 』的歷史之發展關鍵。在本章中，作者借用了『典範』（paradigm）一詞，來表彰古印度數學家對於『 0 』的歷史演化。同時，他也運用了一個『數目共和國』（Republic of Number）的比喻，說明『 0 』得以入籍為此一共和國的一介公民的曲折與艱辛。此處，值得引述他的說法：「數（目）共和國的特色在於，如果某物成為一個數（目），它就必須要能和現存的數（目）來往，至少要能和它們寒暄。它必須要能和其他數（目）以常見的方式結合。零如果要跟其他數（目）平起平坐，我們就必須瞭解如何用零來進行加減乘除的運算：這正是古印度數學家所做的事。」結果，『他們促成了一種典範的重大轉移。』

事實上，這一個歷史解釋，也呼應了數學史家、數學教育家對於數學概念本質的考察成果。換句話說，像無理數 $\sqrt{2}$ ，虛數 $\sqrt{-1}$ ，乃至於0這一類『外來』概念，在取得數目共和國的身份證之前，通常都必須先與其他數目公民建立『運算』關係，直到磨合得這些『外來客』的『身份』變明朗時，才能通過審查而入籍成為新的公民。數學概念這種通過『關係』而確立『結構』的演化歷程，是本書最具有啓蒙意義的比喻，值得讀者，尤其是中小學的數學教師，好好地咀嚼與反思。

不過，本書作者用字遣詞時，還是儘可能避免『以今鑑古』。這種風格在介紹馬雅文明出場時，尤其顯得審慎與節制。誠然，本書第八章（『馬雅間奏曲』：計算的黑暗面）的確是一個間奏，因為我們無從得知馬雅人的數學遺產是否注入『0』的主流發展。無論如何，馬雅文化『充分地證明了零的觀念與符號可以在一個地區獨立發展。』這是作者的多元文化關懷之表現，只是他也指出：馬雅人由於恐懼『零神』而表現的『野蠻行徑』！

本書其他章節順便論及的符號代數、微積分之發展，既有歷史的興味，也不乏發人深省的觀點，就留待讀者自行享受開卷的樂趣了。不過，由於本書內容相當博雅，譬如作者闡述數學知識結構的演化非常用心，同時，也刻意摻入相關的（宗教或神話）文化意義，所以，我們建議讀者第一次閱讀時，能夠把握本書的一些例證或例題，來作為閱讀與思考的憑藉。至於本書作者在第七章錯誤地解讀了『重演說』，就當作賢者之失好了。還有，中譯本如能附上『索引』，那麼，閱讀起來將會有更大的幫助才是。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>