

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（實踐國中）唐書志（百齡中學）  
 蘇俊鴻（新店高中）洪秀敏（新竹高中）洪誌陽（新竹高中）  
 陳鳳珠（土城中正國中）謝佳叡（台師大數學系）  
 林倉億（台師大數學系研究生）黃清揚（台師大數學系研究生）  
 葉吉海（台師大數學系研究生）黃哲男（台師大數學系研究生）  
 陳彥宏（台師大數學系研究生）林旻志（台師大數學系研究生）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 如何利用古代數學文本作為認知的媒介？
- 《測量法義》文本研讀
- 《測量法義》的第九題『以平鏡測高』：HPM 的反思
- 尚書數學家顧應祥
- 新書櫥窗：《在費曼之前》

## 如何利用古代數學文本作為認知的媒介？

台師大學數學系 洪萬生教授

對於如何活用古代數學文本到教學之中，荷蘭 HPM 學者 Barbara Van Amerom 引述了她與 Leen Streefland 合寫的一篇論文，其中利用了中國漢代《九章算術》『方程章』中的第八題，來說明『以物易物脈絡』(barter context) 如何地可以協助學生「發展出（前）代數 ((pre-)algebra) 的記號與工具，比如對於基本運算與其逆運算的一個良好理解、對於字母與符號在不同情境中的意義之開放態度，乃至於推論已知或未知數量的能力。」茲先轉述此一題問、『答曰』與『術曰』如下：

今有賣牛二、羊五，以買一十三豕，有餘錢一千；賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足；賣六羊、八豕，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？

答曰：牛價一千二百，羊價五百，豕價三百。

術曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三負，餘錢數正；次，牛三正、羊九負，豕三正；次，五牛負、六羊正，八豕正，不足錢負。以正負術入之。

現在，將上述解法翻譯成現代形式。如設  $b$ 、 $w$ 、 $p$  分別代表牛、羊、豕之價錢，則利用『方程術』，我們可以將它轉換成寫出如下聯立方程組：

$$\begin{cases} 2b + 5w - 13p = 1000 \\ 3b - 9w + 3p = 0 \\ -5b + 6w + 8p = -600 \end{cases}$$

爲了利用此古典一文本，Van Amerom 與 Streefland 將上述方程組改寫成如下形式：

$$\begin{cases} 2b + 5w = 13p + 1000 & (1) \\ 3b + 3p = 9w & (2) \\ 6w + 8p + 600 = 5b & (3) \end{cases}$$

他們顯然是爲了在此一從算術過渡到代數的階段中，避開負數及其加減法則。而後者正是《九章算術》『正負術』之精華所在。不過，更重要的，是他們相當敏銳地注意到上述方程式(2)中的『以物易物』之意義解讀。其中，由於不涉及錢數，所以， $b$ 、 $w$ 、 $p$  也可以表徵動物本身。至於方程式(1)、(3)所引進的錢數的結果，則不止因而改變了方程式的媒介 (medium of the equation) -- 從『動物數』到『錢數』，同時，也改變了未知數 (unknowns) 的意義 -- 從『實體相關』(object-related) 到『實體性質相關』(quality-of-object-related)。

接著，或許大家也有興趣瞭解《九章算術》作者（不詳）如何利用所謂的『方程術』來解此一聯立方程組。請先欣賞郭書春針對本題的現代白話文翻譯：

假設賣了 2 頭牛、5 隻羊，用來買 13 隻豬，還有餘 1000 錢；賣了 3 頭牛、3 隻豬，用來買 9 隻羊，錢恰好足夠；賣了 6 隻羊、8 隻豬，用來買 5 頭牛，不足 600 錢。問 1 頭牛、1 隻羊、一隻豬的價錢各是多少？

答：1 頭牛的價錢是 1200 錢，  
 1 隻羊的價錢是 500 錢，  
 1 隻豬的價錢是 300 錢。

術：如方程那樣求解。佈置牛的頭數 2、羊的隻數 5、正的，豬的隻數 13，負的，餘錢數，正的。接著，佈置牛頭數 3，正的，羊的隻數 9，負的，豬的隻數 3，正的。再佈置牛的頭數 5，負的，羊的隻數 6，正的，豬的隻數 8，正的，不足的錢數，負的。將正負術納入之。

按照中國古代籌算圖示，此一聯立方程組可以運用算籌佈置成下列圖一形式。如果我們將它逆時針旋轉改寫成現代（矩陣）形式，則有如圖二。再運用『方程術』（近於增廣矩陣的『高斯消去法』或『列運算法』），則可以變換成圖三形式，於是得出一個同義方程組如下：

$$\begin{cases} 2b + 5w - 13p = 1000 \\ 11w - 15p = 1000 \\ 8p = 2400 \end{cases}$$

如此一來，就可以求得答案了。

至於所謂的『方程』，按照魏晉劉徽的《九章算術》注文：「程，課程也。群物總雜，各列有數，總言其實。令每行為率，二物者再程，三物者三程皆如物數程之，并列為行，故謂之方程。」再對照郭書春的白話文翻譯：「程，就是求解其標準。各物品混雜在一起，各列的數值都有差別，總的表示出它們的實。使每行作為率。兩個物品的情形有二程，三個物品的情形有三程，程的的多少都與物品的種數一致。把各列並列起來，就成為行，所以叫做方程。」我們多少可以瞭解這是『聯立方程組』(system of equations) 的意思。不過，難免有如劉徽所指出的『空言難曉』，所以，他特別舉例說明。事實上，針對本章第一題，劉徽的註解非常詳盡，依據它我們很容易還原中國古代的『方程術』，而且也可以確定：此『術』與矩陣理論中的列運算法，的確十分神似。不過，這些都無關國中數學教學，我們就不多說了。

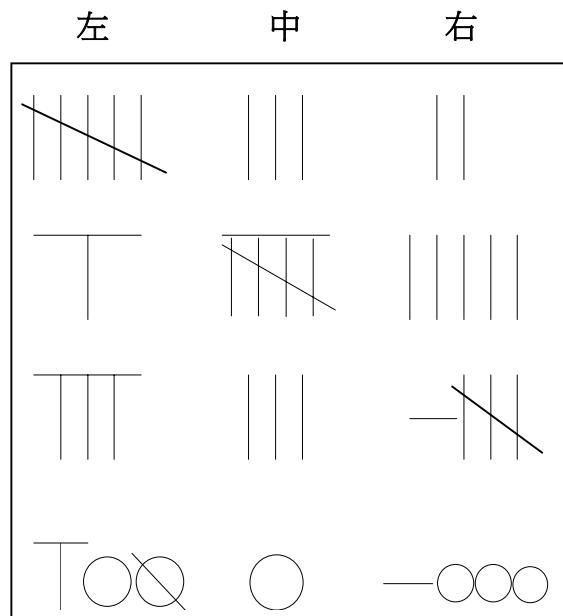


圖 一

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{bmatrix}$$

圖 二

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & -1 & -15 & 1000 \\ 0 & 0 & 8 & 2400 \end{bmatrix}$$

圖 三

## 參考文獻

- Fauvel, John and Jan van Maanen eds. (2000). *History in Mathematics Education: An ICMI Study*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Streeland, Leen and Barbara A. van Amerom (1996). “Didactical Phenomenology of Equations”, in Gimenez, J., Campos Lins & B. Gomez eds. *Arithmetics and algebra education: Searching for the future* (Taaarragona: Computer Engineering Department, University Rovira I Virgile), pp.. 120-131. .
- Van Amerom, Barbara A. (2002). *Reinvention of Early Algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Ph.D. dissertation thesis. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- Van Maanen, Jan (2001). “Research on History in Mathematics Education in the Netherlands: The ‘Reinvention Studies’”, presented to The Netherlands and Taiwan Conference on common Sense in Mathematics, November 19-23, 2001, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan,
- HPM台灣網頁：<http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng>。
- 郭書春譯注 (1998). 《九章算術》，瀋陽：遼寧教育出版社。
- 郭書春、劉鈍校點 (1998). 《算經十書》，瀋陽：遼寧教育出版社。

## 《測量估義》文本研讀

台東大學數理教育系 潘玉樹教授

### 一、 版本介紹

#### 1. 《周髀井田記》

《周髀井田記》舊裝五冊，目前藏上海圖書館。封面題字為『周髀井田記』與『徐文定雜著』，內容除徐光啓已刊未刊之作外，其餘大部份為錄自明代人或明以前人關於算術、井田、水利之類的作品，可能是徐光啓所收集作為學術研究資料用的，可貴的是其中保存了徐光啓很多未刊之作。

徐光啓（1562 - 1633），字子先，上海人，萬曆二十五年舉鄉試第一，又七年成進士，累官至禮部尚書兼東閣大學士。早年受乃父思誠影響，「自六籍百氏，靡不綜覽而攬其菁華」。但陽明心學對他的影響頗大。其師黃體仁對陽明心學頗有心得。徐光啓曾四次參加鄉試，皆不中，第五次應試時，獲主考官焦竑賞識拔為第一名。成進士後，徐光啓開始批判明末流行的玄虛學風，尤注意反省、清算佛老對學風的影響。徐光啓的治學一直在求儒效，求富國強兵，求良好的道德政治，也一直堅持有用無用這一標準的普善性。「善疑」的批判精神，博究天人主實用的治學態度，富國強兵的高遠之志，構成徐光啓精神風貌的主要內蘊，這也是他理解和接受西學的視野和出發點。因為善疑，故能對自己曾浸潤其中的思想傳統展開反思和批判；因為主實用、求富國強兵，故能突破夷夏之辯的思維框架，較為開放的面對西方文化，希冀取彼之長以補己之短，並會通以求超勝。徐光啓在宗教上雖為虔誠的天主教徒，但其目的則是欲借助他認為切實可行的天主教道德體系，以期達到儒家理想中的三代之治。這種借耶補儒的方法及最終目的的傳統特色，表明他能仍是在儒學的框架內接受、容納西學的，而不是完全拋棄作為他賴以理解、接受西學的前提的儒學。他不是一個盲目的全盤西化論者，但他在思想文化、科學上明確反對閉關，倡導虛心接受的態度，以及冷靜會通的工作，則表現出他對異質的科學成果、思想方法和一些觀念的敏銳的適應性，而且令人深思，他是一個能超越自己，善於而且敏於應付時局的科學家、思想家。現代無神論者盡可以拒斥、批判他的宗教信仰，但卻不能不珍視並研究他對外來思想、科學的方法及其具體貢獻（以上內容摘自：孫尚揚著《明末天主教與儒學的交流和衝突》，文津出版社，民國八十一年）。

#### 2. 《天學初函》

天學初函為明末李之藻所編輯，一六二八年刊刻，次年李之藻卒。李之藻（1565 - 1630），字振之，號涼庵、涼安居士，萬曆二十六年進士，官至工部水司郎中。萬曆二十九年利瑪竇甫抵京城時，即已與之交遊。由利瑪竇向他講述的天文學理論、具體知識及其所繪製的《坤輿萬國全圖》，增強了他對西方科學的興趣和信心大柱石。李之藻晚年時，輯集利瑪竇、徐光啓、龐迪我、熊三拔、畢方濟、艾儒略、陽瑪諾，以及他自己的譯著，合成兩編：一為理編，一為器編；每編收書十種，共二十種，題為《天學初函》。理編所收十種，為討論天主教理、敘述西洋學術概要，及介紹世界地理。內容為：

- a. 西學凡：艾儒略。一卷。

- b. 唐景教碑附：李之藻。一卷。
- c. 畸人十篇：利瑪竇。上下二卷。
- d. 交友論：利瑪竇。一卷。
- e. 二十五言：利瑪竇。一卷。
- f. 天主實義：利瑪竇。上下二卷。
- g. 辯學遺牘：利瑪竇、徐光啓。一卷。
- h. 七克：龐迪我。七卷。
- i. 靈言蠡勺：畢方濟、徐光啓。二卷。
- j. 職方外紀：艾儒略、揚廷筠。五卷。

器編所收十種，為論數學天文水利各科的譯書，這十種科學譯述，為中國近代翻譯科學書籍的最早紀錄。其內容為：

- a. 泰西水法：熊三拔、徐光啓。六卷。
- b. 渾蓋通憲圖說：李之藻。上下二卷。
- c. 幾何原本：利瑪竇、徐光啓。六卷。
- d. 表度說：熊三拔、周子惠、卓爾康。一卷。
- e. 天問略：陽瑪諾。一卷。
- f. 簡平儀說：熊三拔、徐光啓。一卷。
- g. 同文算指：利瑪竇、李之藻。前編二卷，通編八卷。
- h. 圓容較義：利瑪竇、李之藻。一卷。
- i. 測量法義：利瑪竇、徐光啓。一卷。
- j. 勾股義：徐光啓、孫元化。一卷。

《天學初函》的編輯體例頗有意味，理編中不僅包含像《天主實義》這樣的「預備福音書」，而且包括介紹西方學術概況、習俗、政治等著作，器編則介紹西方科學技術的書籍。這種分法無疑仍是儒家「形而上者謂之道，形而下者謂之器」這類觀念的體現，但卻暗示了李之藻承認西方文化是有道有器的整體。李之藻在科學和宗教方面的思想與徐光啓相比，具有較為顯明的形而上學的傾向。

## 二、測量法義的內容

測量法義的內容分為兩大部分。第一部分引進了矩度這個測量儀器，其構造基本上就是直角相似三角形的應用。其次講到直景與倒景，且與矩度配合使用的方法，矩度的構造可參考文本。

對於矩度的用處，徐光啓曾在他的奏摺中講到下面一段話：

教演大銃……一切裝放皆有秘傳。如視遠則用遠鏡，量度則用度板，未可易學，亦不宜使人人能之，所謂國之利器，不可以示人也。臣嘗深慮，以為獨宜今世臣習之，自動戚子弟以及京衛武臣，擇其志行可信、智勇足備者教之。

可見矩度的重要性。

第二個部分是以十五個命題講高、深、廣、遠的測量方法，並將矩度應用到不同的場合中。對每個命題都做證明。證明的體例全以《幾何原本》為標準。十五個題目分類為：

1. 矩度的用法：第一、二、三題。

2. 矩度的應用：第四、五、六、七、八題。
3. 用中國傳統的工具（平面鏡、表、矩尺）做測量工作：第九、十、十一、十二、十三、十四題。
4. 簡捷算法：第十五題。

### 三、測量法義在軍事上的應用

以下面的參考資料為主：

1. 黃一農，〈紅夷大砲與明清戰爭 — 以火砲測準技術之演變為例〉，清華學報，新二十六卷第一期，民國八十五年三月。
2. 黃一農，〈天主教徒孫元化與明末傳華的西洋火砲〉，中央研究院歷史語言研究所集刊，民國八十五年十二月。
3. 清蔚園網站 (<http://vm.nthu.edu.tw/>)。

## 《測量法義》的第九題『以平鏡測高』：HPM 的反思

台師大學數學研究所教學碩士班 麗山國中 蕭文俊老師

### 一、驚喜

《測量法義》的第九題以平鏡測高（附錄圖一），竟然就是國中數學課本第五冊第一章相似形中第 56 頁的第 1 題（附錄圖二）。這份資料對我而言真是太珍貴了，因為明年我的任課班（2 年 2 班）在這一段課程中，將享受一份全新的教法，我相信會比以前的方式來的更有效。

### 二、以前的教法

師曰：請翻開課本第 56 頁，各位同學請看第（1）題，前幾節各位同學所學的相似形是非常有用的，我們可以用它來量樹的高度，那要如何做呢？老師希望各位同學睜大雙眼看看這個圖形、、、思考、、、有哪位同學告訴老師你的發現？

甲曰：我看到兩個相似三角形。

師曰：很好，甲生看到了兩個相似（大聲強調）三角形，不知有哪位同學對甲生的發現有什麼意見？

乙曰：為什麼那兩個三角形會相似呢？

師曰：很好的問題、、、證明、、、利用相似三角形性質算出樹高。

### 三、未來的教法

師曰：請翻開課本第 56 頁，各位同學請看第（1）題，前幾節各位同學所學的相似形是非常有用的，我們可以用它來量樹的高度，那要如何做呢？老師希望各位同學睜大雙眼看看這個圖形、思考、有哪位同學告訴老師你的發現？

甲曰：我看到兩個相似三角形。

師曰：很好，甲生看到了兩個相似（大聲強調）三角形，不知有哪位同學對甲生的發現有什麼意見？

乙曰：為什麼那兩個三角形會相似呢？

師曰：很好的問題。

打出（投影片一）

古人很早就會利用相似三角形來計算樹高之類的問題。

甲生不容易喔！這種方法在古代可是秘密，只有大臣能看的，他卻能一眼看穿。

打出（投影片二）

乙生更了不起了，簡直就像徐光啓一樣偉大。所以請你們回家查一下資料，下週再來做分享。

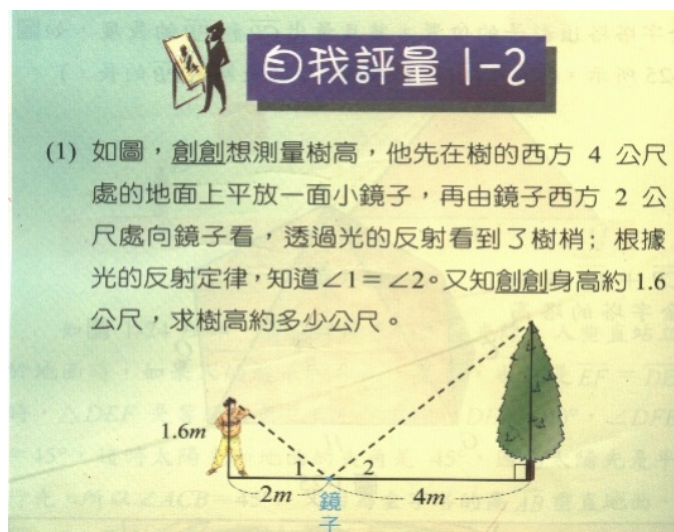
一週後、由同學們的分享，確實地證明了兩個三角形相似、利用三角形相似性質算出了樹高。

### 四、結語

身為教育工作上第一線的我，已在國中任教近十五年的年頭，近年來卻屢屢為與學生之間的教學互動所苦，在教材日益精熟之際，卻也不免流於陳年老套的惡性循環之中，正所謂老狗變不出新把戲，對於自許為專業教師，實為一大羞恥。

何其有幸能參與這個『人文社會科學史料典籍研讀會』，在各位老師的引讀之下，倘伴於數學歷史演進的脈絡之中，每每在單純的歷史人物或事件之間，不由自主的就與國中教材起了或多或少的連結，在日益枯竭的教學園地中，似乎又多了一股源源不絕的活泉。衷心期盼這個『人文社會科學史料典籍研讀會』能夠持續下去，更盼望研讀會的老師們都能隨時將心得與啟發分享給大家，共同灌溉這塊屬於大家的 HPM 園地。

### 附錄



(圖一)

內角等廿一卷卽與壬巳辛角等故以表爲第一數倒景爲第二數巳庚口爲第三數依法算之亦得巳壬之深。注曰乙戊直景三度巳庚井口十二尺依法算得四十八尺卽巳壬之深丁癸倒景四十八度依法算同

第九題

以平鏡測高

法曰欲測甲乙之高以平鏡依地平線置丙人依地平線立于丁目在戊向物頂甲稍移就之令目見甲在鏡中心是甲之景從鏡心反射于目成甲丙戊角卽目光至鏡心借足至鏡心兩線作戊丙

(圖二)

投影片一

內角等廿一卷卽與壬巳辛角等故以表爲第一數倒景爲第二數巳庚口爲第三數依法算之亦得巳壬之深。注曰乙戊直景三度巳庚井口十二尺依法算得四十八尺卽巳壬之深丁癸倒景四十八度依法算同

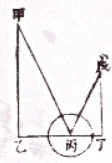
第九題

以平鏡測高

法曰欲測甲乙之高以平鏡依地平線置丙人依地平線立于丁目在戊向物頂甲稍移就之令目見甲在鏡中心是甲之景從鏡心反射于目成甲丙戊角卽目光至鏡心借足至鏡心兩線作戊丙



## 投影片二



丁角與甲丙乙角等此論見歐几里得鏡書第一題 即甲乙  
丙戊丁丙為等角形乙丁兩背直 則足至鏡心  
丁丙與目至足之高丁戊之比例。若物之底至鏡心乙  
丙與其高甲乙也。六卷 今量丁丙為第一數。丁戊為第  
二數。乙丙為第三數。依法算之。即得甲乙之高。  
注曰。可以盃水當鏡。若測極遠。可以水澤當鏡。

第十題

以表測高

法曰。欲測甲乙之高。依地平線任立一表于丙。為丁丙  
與地平為直角。凡立表以線垂下。三面 次依地平線。退

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

## 尚書數學家顧應祥

台師大數學所教學碩士班 馬祖中正國中 王連發老師

### 一、前言

明代的數學，一般的評價都不高，有的人說：「中國古代傳統數學到明代幾乎失傳」，<sup>1</sup>有的人說「自明初至清初，約當公元 1367 年迄 1750 年，前後凡四百年。……是稱中算沈寂時期」，<sup>2</sup>有的人說：「在 1400 年間到 1500 年間，幾乎沒有一部值得注意的著作」。<sup>3</sup>而指標性的『天元術』之失傳，更顯示明代數學遠比宋、元落後。顧應祥在《測圓算術》的自序中所講的「但每條細草止以天元一互筭，而漫無下手之處」，更是明證。

但是，明朝數學的滄桑，應該回到明朝的脈絡中去討論才更有意義。因此，我們以這個指標性的人物——顧應祥為研究對象，來考察明朝數學一些真實風貌。

本文是筆者的碩士論文摘要，以下就各章重點簡略陳述，請讀者不吝指教！

### 二、顧應祥小傳

顧應祥的傳記資料並不出現在正史之中，因此，我們必須從其他的資料中去拼湊出來。所幸，方志之中還存在有他的個人資料，可供我們參考研究。目前筆者收集所得大致如下：

1. 浙江省《湖州府志》（人物志、藝文志）
2. 浙江省《長興縣志》（人物志、藝文志）
3. （明朝）徐象梅的《兩浙名賢錄》
4. （明朝）黃宗羲的《明儒學案》卷十四之〈浙中王門學案四〉
5. （明朝）徐中行的《天目先生集》卷十五：〈資善大夫南京刑部尚書贈太子少保箬溪顧公應祥行狀〉
6. 《國朝列卿記》載有徐中行的〈資善大夫南京刑部尚書贈太子少保箬溪顧公應祥行狀〉
7. （明朝）王世貞的《弇州山人四部稿》有〈明故資政大夫南京刑部尚書贈太子少保箬溪顧公墓誌銘〉
8. （清朝）阮元的《疇人傳》

其實，以上的資料所本的，不外乎是收錄在徐中行的《天目先生集》中的〈資善大夫南京刑部尚書贈太子少保箬溪顧公應祥行狀〉一文。

現在，根據上述這些文獻，我們試圖還原顧應祥的生平事蹟。

顧應祥，字惟賢，號箬溪或箬溪道人，<sup>4</sup>湖州長興人。<sup>5</sup>他生於明憲宗成化十九年九月二十五日<sup>6</sup>（西元 1483 年），幼年時候就喜歡讀書，其父親恬靜翁就親自教學<sup>7</sup>。明孝宗弘治十

<sup>1</sup> 錢寶琮，《中國數學史》，頁 230。

<sup>2</sup> 李儼，《中國算學史》，頁 142。

<sup>3</sup> 李約瑟，《中國科學技術史》(Science and Civilisation in China) 第三卷，頁 117。

<sup>4</sup> 明《唐荆川先生年譜》卷二，四十三頁有「箬溪：太平寰宇記云在長興縣南五十步，夾溪悉生箭箬故云，尚書顧惟賢取以自號」。

<sup>5</sup> 顧應祥的著作中都標示為吳興，吳興即是今之湖州府。

<sup>6</sup> 徐中行，〈資善大夫南京刑部尚書贈太子少保箬溪顧公應祥行狀〉。

<sup>7</sup> 同上。

八年（西元 1505 年）他登進士第，與嚴嵩、湛若水同年<sup>8</sup>。武宗正德元年（西元 1506 年）年，奉旨擔任輜軒使者，參與編纂《明孝宗實錄》於南畿。

明武宗正德三年編修完成，他改授饒州府推官。適值姚源洞盜匪作亂，樂平縣令汪和被抓去作了俘虜，當眾人無計可施時，顧應祥帶著一老卒、騎著一匹老馬，前往盜賊城堡招安，後汪和脫險，賊亦散去，<sup>9</sup>自此之後顧應祥聲名大起。武宗正德六年辛未，他以臺諫徵召至京師，上因其年少，遂先補為錦衣衛經歷。正德七年壬申，王陽明先生是年四十一歲，在京師擔任考功清吏司郎中。按《同志考》，是年穆孔暉、顧應祥、鄭一初、方獻科、王道、梁谷、萬潮、陳鼎、唐鵬、路迎、孫瑚、魏廷霖、蕭鳴鳳、林達、陳洸、黃綰、應良、朱節、蔡宗堯、徐愛等人，一同受業於王陽明。<sup>10</sup>

武宗正德十二年，吏部推薦顧應祥為大理卿，可是，他力辭不就，因改任廣東嶺東道僉事（正五品）。此時，王陽明擔任都察院左僉都御史，巡撫南、贛、汀、漳等處。顧應祥在王陽明的指揮之下，先後討平汀、漳山寇、海寇、郴、桂的賊寇，半年間打了三次勝仗。正德十四年寧王宸濠叛亂，顧應祥又奉派擔任江西按察副使，負責巡察南昌地區，但是尚未到任，叛亂已平定，他隨即撫循瘡痍，招集流亡，盡全力做好善後事宜。<sup>11</sup>

嘉靖五年，他昇任陝西苑馬寺卿，掌管六監二十四苑之馬政<sup>12</sup>。嘉靖六年四月，他升任山東布政使司左參政，<sup>13</sup>隨即又升任按察使。嘉靖九年（西元 1530 年）四月又升為右布政使，<sup>14</sup>十一月，再升為都察院右副都御史巡撫雲南。<sup>15</sup>先生極意經略，疏凡二十餘章<sup>16</sup>。嘉靖十二年（西元 1533 年）正月，聞母楊淑人喪，未待朝廷派出職務代理人，他即返家奔喪，等到知道按例需要等候代理人時，馬上回到雲南，並且上章自劾，遭革職返鄉。<sup>17</sup>是年夏天四月，他在滇南巡撫行堂寫下了第一本數學著作，亦即《勾股算術》。

遭罷職後返回故鄉，家居者十五年。在這十五年間，他坦泮孤城、峴山之間與尚書蔣瑤、劉麟共組苕溪詩社，準備終老於此。

嘉靖二十七年（西元 1548 年）因為都察院的薦舉，他再以都察院右副都御史巡撫雲南擔任原職。<sup>18</sup>時方議征元江，他『以那鑑孤豚，困獸不可急』，不宜急著進兵。適巧他又派升南京兵部右侍郎（嘉靖 28 年七月）而離開雲南。繼任的人執意出師而兵敗，導致布政使徐波石死亡。

嘉靖庚戌（西元 1550 年），他榮陞刑部尚書。以法律條令繁雜，因此將其刪改解釋，命郎官吳維岳、陸穩定為永例，撰寫了《律解疑辨》。<sup>19</sup>在朝廷之中，他獎拔于鱗、元美等人，因此，名重天下。<sup>20</sup>這一年，他寫了《測圓海鏡分類釋術》。此時嚴嵩擔任首輔，朝中之人皆

<sup>8</sup> 劉健等編，《明代登科錄彙編》，明弘治十八年刊本。

<sup>9</sup> 王世貞，《弇州山人四部稿》卷 86〈箬溪顧公墓誌銘〉。

<sup>10</sup> 《王陽明年譜》。

<sup>11</sup> 此段參考《王陽明年譜》，與徐中行，〈資善大夫南京刑部尚書贈太子少保箬溪顧公應祥行狀〉。

<sup>12</sup> 同注 6。

<sup>13</sup> 《明世宗實錄》卷 75。

<sup>14</sup> 《明世宗實錄》卷 112。

<sup>15</sup> 《明世宗實錄》卷 119。

<sup>16</sup> 《明督撫年表》卷五〈雲南卷〉。

<sup>17</sup> 同上。

<sup>18</sup> 《明世宗實錄》卷 350。

<sup>19</sup> 《長興縣志》，〈藝文志〉。

<sup>20</sup> 黃宗羲，《明儒學案之王門學案》。

懼其權勢。他因與嚴嵩為同年登進士第，故以耆舊自處，而導致嚴嵩不悅，才剛上任三個月，就被調任南京刑部尚書。最後，他在癸丑年致仕，又十二年卒，年八十三。

顧應祥獨好讀書，未嘗無故一日不讀書。因此，九流百家皆識其首尾，而尤精於算學，相關著作有《測圓海鏡分類釋術》，《弧矢算術》與《授時曆撮要》等書。<sup>21</sup>其他的著作，還有在他高齡七十九時所編寫的《長興縣志》、<sup>22</sup>在他去世前一年所著作的《惜陰錄十二卷》等。<sup>23</sup>其後代整理了他的詩詞書信，編為《崇雅堂集》十四卷。

### 三、顧應祥的數學思想

明朝數學的退卻，導致整個數學學習大環境的不利，顧應祥自承：

賤子數學原無師承，只是鑽研冊子，得之中間多有不蹈舊格者，反若簡便至於立法之故必須指授者，往往未得於心。<sup>24</sup>

他又說到：

自幼性好數學，然無師傅，每得諸家算書，輒中夜思索至於不寐，久之若神告之者，遂盡得其術。<sup>25</sup>

顧應祥為童子時，常以小紙九片寫一、二、三、四、五、六、七、八、九，擺列成圖縱橫皆成十五，及長始見洛書圖與之暗和，可見天地之數與人心相通<sup>26</sup>。

從以上的敘述可知，顧應祥雖然拜王陽明為師，曾致力性理學探討，但是，數學卻始終是他的興趣所在。或許因為他的無師自通，對於比較簡單便捷的『天元術』，他反而未得於心。究其原因，當然也可能是如他所說，「議士著書，往往已秘其機為奇」，「蓋止用成數而不言立算古算法」<sup>27</sup>。誠然，從元朝末年到明朝數學知識的停滯與斷層，的確使得顧應祥對『天元術』的理解產生了問題。由他自己的見證：「前元以算取士，必有明於其術者，回授其旨使吾輩生于其時相與議論於一堂之上，怒亦未必多讓耳」，<sup>28</sup>可知到了明朝的中葉十六世紀時，中國數學家對前朝比較精深的數學知識之理解，已經有了很大的侷限了。這絕非是顧應祥個人的責任，因為同時期的《九章算法比類大全》（吳敬撰），《算法統宗》（程大位撰）等著作，也已經隻字不提『天元術』了。甚至到了十九世紀中國數學家華蘅芳（1833~1902）初讀李冶《測圓海鏡》（『天元術』的集大成之作）時亦格格不入，最後豁然開悟，遂寫下十分深刻的心得：

初學天元之人，每不知天元為何物，則心中存一意見，以為所求之數尚未知，何以能立一天元，遽謂即是此數，且所求之數或大至十、百、千、萬，安能概以一當之，此由於不知天元之一不是實數，乃是所求之數之個數也。以天元為一個所求之數，則天元可以任何大、任何小也。<sup>29</sup>

另一方面，顧應祥也指出：

故其為術也亦玄，非心細而靜者，不能造其極也，若造其極則天地之高深、日月之

<sup>21</sup> 黃宗羲，《明儒學案之王門學案》。

<sup>22</sup> 《長興縣志》，〈舊志源流〉。

<sup>23</sup> 顧應祥，《靜虛齋惜陰錄》，自序。

<sup>24</sup> 顧應祥，《崇雅堂文集》卷十三〈復唐荆川內翰書〉。

<sup>25</sup> 〈勾股算術自序〉。

<sup>26</sup> 顧應祥，《靜虛齋惜陰錄》卷四〈讀易〉。

<sup>27</sup> 顧應祥，《崇雅堂文集》卷十三〈復唐荆川內翰書〉。

<sup>28</sup> 顧應祥，《崇雅堂文集》卷十三〈復唐荆川內翰書〉。

<sup>29</sup> 轉引自洪萬生，〈數學史與代數學習〉，《數學月刊》第二十七卷第七期。

運行如指諸掌矣，儒者罕通此術，遂以九九小伎目之謬矣。<sup>30</sup>

可見，他對於把數學視為九九賤伎，非常的不以爲然。此外，他更認爲：

外夷之人不爲文義牽繞，故其用心精密如此，我中國之儒錯用心於無益之虛文，而於數學知之者鮮，寧不可惜哉。<sup>31</sup>

諦觀《四元玉鑑》所載平圓，立圓用徽術、密術之法固爲詳細，然以愚觀之猶有未盡。初賤子之好算也，士夫聞之必問之曰：能占驗乎？答曰：不能，又曰：知國家興廢乎，曰：不能，其人莞爾曰：然則何爲不得已應之，曰：將以造曆，其人愕然曰：是固有用之學也，殊不知歷算亦不過數中一事耳。<sup>32</sup>

從這些敘述，我們也可以知道，顧應祥對數學的價值與意義之體會，是頗有自信的。

其次，我們考察陰陽思想對顧應祥的影響。他認爲「天地之所以神變化而生萬物者，陰陽而已。一陰一陽交互錯綜而變化無窮焉。聖人因其交互錯綜之不齊而置爲數術以測之。於是乎天地之高深，日月之出入，鬼神之幽秘皆可得而知之矣」<sup>33</sup>，也就是說，他認爲天地間萬事萬物的變化規律均是從陰陽對立、相互依存、消長變化而造成的，而數術更是駕馭錯綜複雜、變化無窮的陰陽之根本。顯然，他強調把陰陽思想引入數學，並賦予其神奇的威力。

34

此外，他還提到「九數之術，其大要不過一開、闔而已，開者除也，闔者乘也。乘以併之、除以分之，或先乘而後除、或先除而後乘，雖千變萬化不同，其實皆乘除也」<sup>35</sup>，亦即：數學中的乘、除運算，也成了天地間陰陽二氣聚散分合的數量表達與體現。這種由陰陽觀念引伸出來的每物必有對立物的思想，體現在宇宙中是有天必有地；體現在數學運算中，則有乘必有除、有加必有減（即有正必有負），有多必有少，因而，在數量上的變化可以與陰陽消長規律互相吻合。

最後，以勾股算術爲主軸。從顧應祥的著作來看，他以勾股算術爲起點，更以勾股算術貫穿全部的數學思想：「九數之中惟勾股一術最爲玄妙，用以測高深望遠近，尤儒者所當知者」。<sup>36</sup>在中國數學史上，他更是第一位把「勾股」獨立出來編寫成一本書的數學家。「弧矢者……而其法不出乎勾股開方之術，以矢求弦則以半徑爲弦，半徑減矢爲股，股弦各自乘相減餘爲實，平方開之得勾，勾即半截弦也」。<sup>37</sup>我們可以看出來，他的《弧矢算術》也仍然是以「勾股」爲出發點。還有，「又以其所立通勾邊股之屬，各以類分」，則是《測圓海鏡分類釋術》的精神所在，其中我們可以知道它仍然是與勾股有非常密切的關連。看起來，顧應祥把全部的注意力都擺在對勾股術的研究上了。這也可以說：他的數學思想是以「勾股算術」爲主軸來論述的。

#### 四、顧應祥的數學著作簡介

《勾股算術》共有上、下二卷，前面有嘉靖癸巳（1533年）顧應祥在滇南巡撫任上所寫

<sup>30</sup> 顧應祥，《靜虛齋惜陰錄》卷六〈通論九章算法〉。

<sup>31</sup> 顧應祥，《靜虛齋惜陰錄》卷六〈論回回曆〉。

<sup>32</sup> 顧應祥，《崇雅堂文集》卷十三〈復唐荆川內翰書〉。

<sup>33</sup> 顧應祥，《測圓海鏡分類釋術》十卷，即自序

<sup>34</sup> 金福，〈對明代數學思想的幾點分析〉。

<sup>35</sup> 顧應祥，〈通論九章算法〉。

<sup>36</sup> 顧應祥，《靜虛齋惜陰錄》卷六〈論勾股法〉。

<sup>37</sup> 顧應祥，《靜虛齋惜陰錄》卷六〈論弧矢算術〉。

的自序。其中，他說明了撰寫這本書的動機。原來，他接觸《周髀算經》和《四元玉鑿》之後，對於

所謂勾股弦和較、黃中之說開闔折變，悉得古人立法之旨，求之于心，無不吻合，蓋有不假于思索者，恐其久而忘也。政務之暇，手錄其詳節，各為問答一二章附之，名曰《勾股算術》，俾后之學算者因此求之，庶有以得其要領云。<sup>38</sup>

於是，在正卷之前他特別撰寫〈勾股論說〉一篇，其中給出了四十個有關勾股形三邊與三邊和與差（五和、五較）之間的各種關係及互求公式。有了這些公式，可以較方便地計算各種勾股問題。這本書是有關勾股形的第一部數學專著，而〈勾股論說〉則是其總綱。其中，除勾股本身的問題外，還有些應用問題，總共分爲三十八類，每類包括若干問題共七十八問，其中包括「方五斜七」的方斜術五問。

《弧矢算術》卷一前，也有顧應祥自序一篇。在正卷前，則有〈弧矢論說〉和〈方圓論說〉二篇短文，分別討論弧矢和方圓的一般性問題。前者運用到了解四次方程方法；后者主要是研究『方五斜七』和圓周率，但對圓周率並沒有給出更好的近似結果，僅轉述  $\frac{22}{7}$  和  $\frac{157}{50}$

而已。其中更摻入一些『陰陽象數』的思想。全書的內容主要是討論弧、矢、弦、截弦和截積等之關係，主要是通過勾股定理，有些要歸結爲解方程求出結果，其中有 10 個四次方程的解法是傳統的增乘開方法。就該書的主題而言是『弧矢計算』，可以說是這方面的一本專著，至於他，則可以說是這一方面的早期研究者。

《測圓海鏡分類釋術》十卷，前有古濠沐于嘉靖庚戌（1550 年）序。正文之前有『測圓海鏡總率名號』，和〈勾股步率〉，分別爲《測圓海鏡》之『總率名號』和『今問正數』。顧應祥對李冶《測圓海鏡》的全部問題，重新分類和進行注釋，<sup>39</sup>都用傳統的高次方程解法和算術方法求出結果，他的具體的解法，要比《測圓海鏡》詳細得多，還算是一部有些價值的資料。但是，他把原來書中的『天元術』內容全部刪去，並認爲：

但其每條下細草，雖徑立天元一，反復合之，而無下手之術，使后學之士茫然無門之可入。輒不自揆，每章去其細草，立一算術，又以其所立通勾邊股之屬，各以類分。可見，顧應祥仍然是建立在『勾股算術』的基礎上。但也因爲「但其每條下細草，雖徑立天元一，反復合之，而無下手之術」，而飽受後代算家與史家批評。

《測圓算術》四卷，前有顧應祥嘉靖癸丑（1553 年）自序和同年龐嵩后序。全書是在《測圓海鏡》的基礎上，重新編錄的一部勾股容圓專著。在本書中，他同樣地刪去了『天元術』，而採用傳統的高次方程解法和算術求解。此書可以算是《測圓海鏡分類釋術》的簡易推廣版。是一部容圓問題的入門教材，只是無從得知讀者的反應如何了。

## 五、顧應祥與唐順之<sup>40</sup>

顧應祥與唐順之是中國明朝中葉的著名數學家。但他們兩人對『天元術』的茫昧不解，卻被認爲是中國數學在十四世紀之後由盛而衰的一個見證。

<sup>38</sup> 顧應祥，〈勾股算術序〉。

<sup>39</sup> 《分類釋術》中有九題是顧應祥編入，但《測圓海鏡》有八題未編入前書。

<sup>40</sup> 唐順之（1507—1560），字應德，號荆川，武進人。嘉靖八年會試第一。先後任武選主事、翰林編修、春坊司諫等職，嘉靖十九年因與羅洪先、趙時春一起請百官於元日朝見太子，被世宗削職爲民。嘉靖末以其知兵事而被徵召入朝，先後任車駕主事、兵部郎中、僉都禦史等職，嘉靖三十九年病逝於禦倭舟中，年五十四。爲明朝有名的文學家、軍事家、數學家，數學著作有〈數論六篇〉，收錄在《荆川文集》。

唐順之抄錄了一份《測圓海鏡》給顧應祥，並且在給顧應祥的信中提到：「藝士著書，往往以秘其機為奇，所謂立天元一云爾，如積求之云爾，漫不省其為何語。」<sup>41</sup>至於顧應祥則謂：「細考《測圓海鏡》，如求城徑即以二百四十為天元，半徑則以一百二十為天元，既知其數，何用算為？似不必立可也。」<sup>42</sup>這兩則文件，都顯露了他們對天元術的茫然與不解。但是，『天元術』的再度被接受卻是到了清朝，西方代數學傳入中國以後才開始的，這是否意味著如果沒有西方代數學的傳入，天元術的被理解就沒這麼快了呢？

無論如何，二人維持著亦師亦友的論學關係。比如說吧，《測圓海鏡分類釋術》十卷是顧應祥根據唐順之的手抄本改寫而成的；《弧矢算術》也是由唐順之提供了他自己的〈弧矢論〉，由顧應祥演之成書。<sup>43</sup>另一方面，唐順之也有「願從請益之語」，「問數學於顧箬溪，久之乃有獨得之處。」<sup>44</sup>儘管如此，他也對顧應祥的《測圓海鏡分類釋術》提出了一些中肯的建議：「然鄙見竊以為此書形下之數太詳，而形上之義或略，使觀之者尚不免有數可陳而義難知。及示人以鴛鴦枕而不度與人以金針之疑，僕意欲明公於緊要處提掇一二，作法源頭出來」。<sup>45</sup>顧應祥更請唐順之為《測圓海鏡分類釋術》做序，但因為唐順之晚年「因久病早衰，近年稍從事於槁形灰心，究意道家之說」，這篇序文終究未曾刊出。

## 六、結論

明朝數學的發展確實停滯，要遠比宋、元落後。但是，如果我們回到明朝歷史的脈絡中來看，顧應祥整理了勾股問題而做成了《勾股算術》，重新用自己的觀念整理了《測圓海鏡》的知識內容，而成為《測圓海鏡分類釋術》，他的背景是整個明朝士大夫率以空疏相尚，朱熹、王陽明的理、心之學爭鬥的學術環境。以一個做到尙書這樣大官的人而言，能夠對數學有這樣的認知與成就，或許可以說是歷史的異數吧！

<sup>41</sup> 唐順之，《荆川文集》卷七，〈與顧箬溪〉。

<sup>42</sup> 顧應祥，《崇雅堂文集》卷十三〈復唐荆川內翰書〉。

<sup>43</sup> 同 45

<sup>44</sup> 唐鼎元編，明唐荆川先生年譜，卷二及卷三

<sup>45</sup> 同注 44。



## 自在地進出科學知識後門

台師大學數學系 洪萬生教授

《在費曼之前》(Einstein & Co.: Eine kleine Geschichte Wissenschaft der letzten hundert Jahre in Portrats)

作者：恩斯特·費雪 (Ernst Peter Fisher)

譯者：陳恆安博士

出版社：究竟出版社，2002

ISBN 957-607-763-X (309)

本書是《從亞里斯多德以後》(Aristoteles & Co.) 的續篇，德文書名為“Einstein & Co.”，可見兩書風格一致，體例也相通，作者都想通過偉大科學家傳記的書寫，作為說明現代西方科學史發展的一個主軸。這種手法，是為『科學造廟』的典型敘事，對於科學事業的關照當然不夠全面。不過，正如作者在本書〈中文版序〉中所陳述：「因為科學是人們從事的事業及其成果，所以從科學事業中的先驅者著手、透過闡述其研究動機來理解科學的做法便是可以理解的。」事實上，本書所介紹的十位傑出人物之貢獻，都涉及現代物理、化學、生物乃至於數學，其專業知識門檻非經基礎科學嚴格訓練，大都很難跨過，因此，一般人若能了解他們『解謎』或『建構理論』的動機與背景，那麼，或許可以多少分享這些知識的價值與意義吧！

作者認為這種利用『歷史的進路』(historical approach) 來介紹科學知識的方式，是通往科學殿堂的一座後門樓梯。「雖然從後門樓梯進來的人都是靜悄悄地進入知識之屋，但是絕不會得不到真誠的歡迎，反而都能獲得豐富的報償。」顯然，『歷史進路』是我們對於科學知識及其創造者的一種『另類的貼近』，它同時也幫助我們體會有別於『教科書印象』的科學知識之演化意義。然而，本書儘管論及科學家面對科學知識本質（意料之外）再現 (representation) 的掙扎與不安，作者還是努力在『知識』與『實在』(reality) 之間，尋找一個古典且優雅的平衡點。不過，讀者要想在火爐邊放鬆心情說幾個科學（家）故事，這似乎是個值得考慮的選擇了。

至於作者何以挑選這十位偉大科學家入列？譬如納入馮紐曼這位當中的唯一數學家之考量何在？或許這是他有意留給讀者的一個謎題，就留待大家來一起發揮想像力吧！