HPM通訊

第五卷 第四期 目錄(2002年4月)

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

研討三月天

台灣師範大學數學系 洪萬生教授

從三月二十一日開始，我在十天之內連趕了三場與科學史有關的研討會。第一個溯自南台灣的高雄科學工藝博物館（簡稱『科工館』)，主題是『科技、醫療與社會』（三月二十一、二十二日），吸引了高雄師範大學與高雄醫學大學的很多師生，前來共襄盛舉，實在是難得的盛會。相較於二千年該館舉辦的『李約瑟紀念研討會』，本次參加的成員除了多了醫療工作者之外，在地學生的比例看來也提升了。以我自己參與的『科學史與科學教育』這一部份來看，高雄師大的林煥祥、洪振芳教授，就分享了他們教學與研究的心得，以及他們長年在南台灣所累積的相關學術資源，比如新近出版的科學史（特別是化學史）著作的收集，都是令人耳目一新的貢獻。

或許這種南台灣的『在地』(in context) 特色可以逐漸突顯出來吧！以雲林科大林崇熙教授的『拼裝車』研究報告為例，就充滿了『都市佬』頗難體會的衝力與動量。假以時日，我們相信一個非常獨特的『南台灣論述』(southern Taiwan discourse) 一定會成功地開展出來，因為有活力的學術聚落已經形成了。

在歷史上很長一段時間內，南台灣都是外來文化的入口，直到東北亞日本勢力的崛起，它的發展重心才逐漸北移，從而逐漸淪落成為邊陲地帶。儘管如此，三月天的南台灣還是洋溢著和煦的陽光，也讓我的研究報告看起來不致於過份『文謅謅』。我的論文題目是『中日韓數學文化交流的歷史問題』，企圖在此一論述結構中，為『東算』（韓國本土數學）及『東算家』尋求一個歷史定位。不過，其中有關中日算學交流之研究成果，主要仰賴天津師範大學徐澤林、馮立升兩位教授的出色表現。至於日韓算學之交流研究，則無從聞問，或許史料之闕如是一個主要因素吧。

順著同一個思考進路，我在『第六屆科學史研討會』（三月三十、三十一日，中研院數學所）也發表了〈數學文化的交流與轉化：以南秉吉 (1820-1869) 的《算學正義》為例〉。在本文中，我利用《算學正義》作為一個 “DEMO”，以便探索朝鮮李朝『儒家明算者』南秉吉如何轉化傳入的中算，以及他如何與『中人算學者』互動。關於南秉吉研究，本文是我所撰寫的第三篇論文，如果再加上我與研究生楊瓊茹等人合作、即將完成的有關《九章術解》的校勘研究，我們對南秉吉的算學成就應該有了起碼的認識，接著下來，我們就可以進一步探索十九世紀中葉朝鮮社會文化脈絡中的南秉吉了。另一方面，我們或也可以運用比較史學

的進路，來對比南秉吉與同時代的中算家李善蘭 (1811-1882)，了解這兩位異國數學家在中韓各自數學現代化進程中，究竟扮演了何等的角色。

四月一日一早，我開車到長興街載金永植 (Kim Yung Sik) 教授，一道前往清華大學，參加由該校歷史研究所主辦的一場研討會，主題是『科技的公眾認知與新世紀科技研究的角色』(Public Understanding of STM and the Roles of Science Studies in the 21st Century Asia) (STM: Science, Technology, and Medicine)。由於這是雪梨、北京與新竹三市輪流舉辦的 Sino-Australian Symposium 第二屆研討會，除了代表北京市的中國科學院學者因故未克與會之外，澳大利亞則有三位學者出席。此外，俄羅斯數學史家 Alexei Volkov也從加拿大趕來與會。我負責報告的題目，則是籌辦者傅大為教授所建議，他覺得在這種場合非常值得介紹《HPM通訊》，因此，我遂以 “The Circulation of the *HPM Tongxun* (Newsletter) and Its Relevance to the Mathematics Teacher Community in Taiwan” 為題，針對本刊的發行旨趣與內容大要，及其與台灣數學教師社群之相干性，做了三十分鐘的報告。由於時間有限，無法說明讀者的回饋意見之分析，實在可惜。不過，倒是激起了相當熱烈的迴響。或許本刊得以在『非制度化』與『非專業化』的背景下存活 — 迄今共發行 30 期，總數為A4 開式 498 頁，才是它贏得大家注意的主要原因吧。當然，我們的編輯群有能力『及時』推出一些頗具特色的專輯，也功不可沒。還有，讀者的厚愛與參與，也是鞭策我們繼續前進的動力。請大家參閱我們所提供的讀者回饋問卷之分析，並繼續惠賜高見，讓我們攜手一起成長。

忙碌的三月天終於過去了！在此，我要特別感謝科工館與傅大為教授，讓我有從容的機會，具體地呈現這幾年與台灣 HPM 社群共同創發的一點成果。還有，這三場研討會都有一個共同的主軸，那就是 STS（科學、技術與社會），欲知詳情，請參閱台灣 STS 虛擬網站：http://sts.nthu.edu.tw。

中國的測量術

國立新店高中 蘇俊鴻老師

前言

一談起測量方法，大家腦中馬上浮現「三角測量」--藉助三角函數的幫助，我們只要測量出某些長度及角度，就能處理那些我們無法實際量測的問題。這也是數學教師在三角函數的學習上，用來強化三角函數學習「正當性」的最佳理由。事實上，每個文化在某些特殊條件的限制下，可能發展出不同於我們現有既存的概念或策略。比如說，中國古代缺乏一般角的概念，因此，今日我們所熟知的三角學理論並沒有在中國發展起來。[1]但中國仍建立起非常發達、程度極高的測量技術。本文想藉由中算史的一些數學文本的討論，說明測量問題使用三角函數來處理，並非唯一的途徑。

由於中算上缺乏一般角的概念，因此只好藉助直角三角形(勾股形)來處理，這樣的方法稱之為勾股測量。我們可由測量工具的使用得到驗証，傳統上使用的工具有兩種：一是矩；另一是表。矩就是彎曲成直角的曲尺，表就是垂直的量杆，都是為構造出勾股形而使用的。

之後中算家在勾股測量的基礎上，改進技術與方法，造出「重差法」。本文則是對勾股測量一個初步的介紹。

勾股測量與《九章算術》

測量技術的發展，離不開實際應用的需要，如天文的觀測、建築工程、土地丈量及地圖的繪製等，因此，勾股測量在中國發展極早。以多數讀者熟知《九章算術》來說，在卷九「勾股章」所談的便是與勾股形相關的問題。全章共 24 個問題，其中第 1~5 個問題，是勾股定理及直接應用，第 6~13 及第 24 個問題是解勾股形的問題；第 14~15 個問題是勾股容方、容圓；第 16~23 個問題則是測望問題。試舉幾例如下：

第 19 問　今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木，出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木，問邑方幾何？[2]

第 21 問　今有木去人不知遠近。立四表，相去各一丈，今左兩表與所望相直。後右表望之，入前表三丈。問木去人幾何？

第 22 問　今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木東三里，望木末，適與山峰斜平。人目高七尺。問山高幾何？

第23問　今有井，徑五尺，不知其深。立五尺木於井上，從木末望水岸，入徑四寸。問井深幾何？[3]

這幾個問題與各位所常見的測量問題相當類似，可以當成課堂教材的補充。第 16~20 問與方形的城池(邑方)有關，筆者特別挑選第 17 問有幾個原因：(1)劉徽在這個問題上給了我們兩個不同面向的注解—「率」及「出入相補」；(2)這個問題的術文所導出的一元二次方程式 $x^2+(20+14)x=2\times20\times1775\Rightarrow x^2+34x=71000$，[4]是中算史上第一個出現帶有一次項的二次方程式。

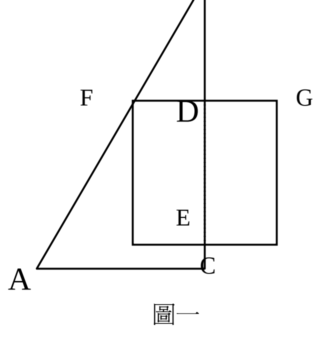
第 19 問的題意如圖一，為便於表示，筆者用現在的數學符號輔以說明劉徽的注解。首先是利用「率」的觀念，

此以折而西行為股，自木至邑南一十四步為勾，以出北門二十步為勾率，北門至西隅為股率，半廣數。故以出北門乘折西行股，以股率乘勾之冪。然此冪居半以西，故又倍之，合東，盡之也。[5]

設邑方 $\overline{DE}=x$，則 $\overline{AC}$ 為股，$\overline{BC}$ 為勾，$\overline{BD}$ 為勾率，$\overline{FD}=\frac{1}{2}x$ 為股率。則

$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{FD}:\overline{BD}\Rightarrow 1775:(20+x+14)=\frac{1}{2}x:20$$

$$\Rightarrow x^2+34x=71000 \text{---}(1)$$



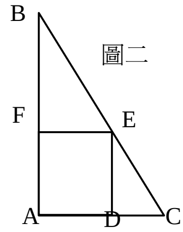
圖一

由上可知，主要的關鍵在於這個關係式 $\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{FD}:\overline{BD}$。這個關係的成立，眼明的讀者或許會猜測：它是奠基在直角三角形 ΔABC 與直角三角形 ΔFBD 的相似。然而，筆者在此必須重申：**當時的中算家是沒有一般角度的概念，也就沒有平行線性質的探討，因此，也就沒有相似形的理論的建立。**那麼劉徽是如何找到這個關係式呢？要回答這個問題，我們就必須談到劉徽在第 14 問「勾中容方」的注解。

第 14 問是這樣的問題「今有勾五步，股一十二步。問勾中容方幾何？」[6]劉徽在注解中提出：

冪圖：方在勾中，則方之兩廉各自成小勾股，而其相與之勢不失本率也。[7]

此段文意以圖二說明：在ΔBFE與ΔEDC中，邊長成比例，即是

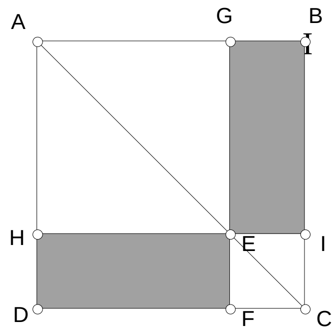


圖二

$\overline{BF}:\overline{FE}:\overline{BE}=\overline{ED}:\overline{DC}:\overline{EC}$。劉徽利用這個性質証明「勾中容方」及「勾中容圓」的公式，也証明測望問題的術文的正確性。但可惜的是，由於劉徽注解的原始圖形佚失，也無進一步的文字說明，因此，無法得知劉徽的最初想法。所幸數學史家們在楊輝所著的《續古摘奇算法》卷下，[8]看見後世中算家對劉徽可能的想法的最完整的還原：[9]

直田之長名股，其闊名勾，於兩隅角斜界一線，其名弦。弦之內、外分二勾股，其一勾中容橫，其一股中容直，二積二數皆同。[10]

由圖三，可以清楚地看到長方形 ABCD 由對角線平分成兩個直角三角形。由於正方形 AGEH 及正方形 EICF 也被平分成兩個直角三角形。所以



長方形 HEFD 面積 $=\Delta ACD-\Delta AEH-\Delta ECF=\Delta ACB-\Delta AEG-\Delta ECI$
=長方形 GBIE 面積

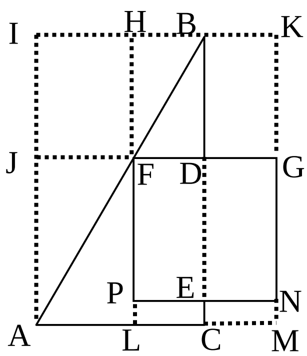
所以

$$a_1b_2=a_2b_1\Rightarrow a_1:b_1=a_2:b_2$$

這個「勾中容橫，其一股中容直，二積二數皆同。」的性質在中算的勾股問題中，有著重要的作用。筆者認爲這個利用面積關係來尋求兩個勾股形比例關係，是一個很有趣並且值得在課堂演示的作法。除了讓學生有機會體會即使省略了相似形理論，比例關係仍可作出的機巧外；也讓學生了解在不同的時空文化限制背景下，知識的成長是可能擁有不同的風貌。

再回到劉徽的注解上，第二個「可能」利用「出入相補」的作法：

此術之冪，東西如邑方，南北自木盡邑方十四步之冪。各南、北方為廣，邑方為袤，故連兩廣為從法，並以為隅外之冪也。[11]沿用上文符號說明，見圖四所示，設邑方$\overline{DE}=x$，因此「東西如邑方，南北自木盡邑方十四步之冪。」亦即爲長方形HKML的面積$x(20+x+14)=x^2+(20+4)x$，由列式來看「各南、北方爲廣，邑方爲袤，故連兩廣爲從法，並以爲隅外之冪也。」接下來，劉徽就沒有注釋說明。這樣一來，只完成(1)式的左半。右半則必須利用到長方形IBDJ面積與長方形HBCH面積相等，而長方形HKML的面積=2 倍長方形HBCL面積

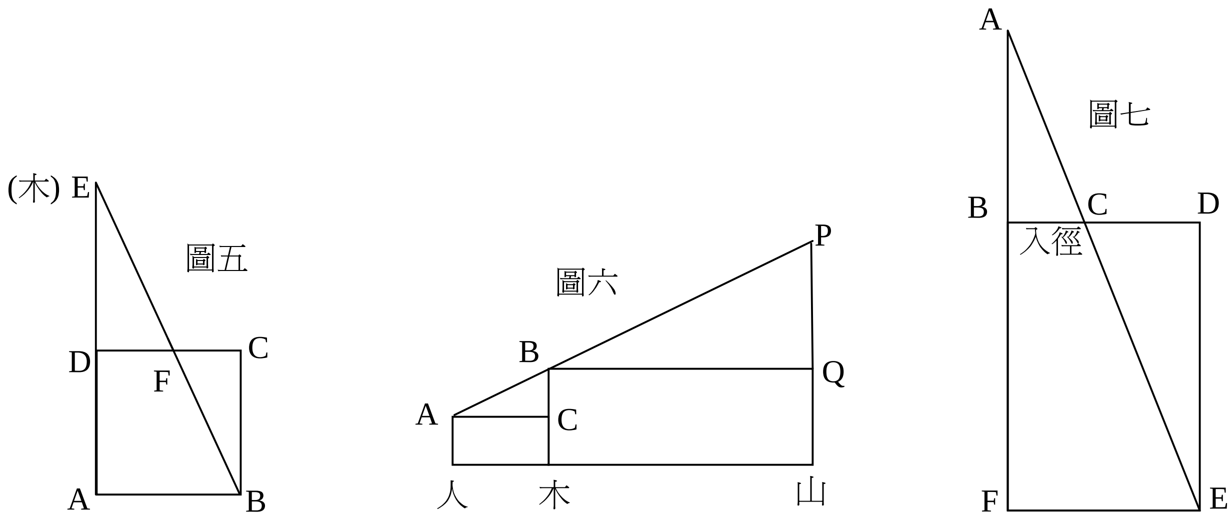


圖四

因此，

$$x^2+(20+4)x=2\times20\times1775\Rightarrow x^2+(20+4)x=71000$$

右半的說明是史家們添加上去的。這也是爲何筆者在本段開頭使用「可能」這個字眼的原因。[12]但是，我們若考慮劉徽在「勾中容方」所提出的性質，加上楊輝的還原，應該可以相信劉



徽及當時的算家，對於「出入相補原理」是熟悉且掌握的。而「出入相補原理」更成爲後世史家解讀重差法的重要依據。

至於第 21-23 問，讀者是否發現這與我們課堂所見的三角測量問題頗爲相似？各題題意見圖五-七，由圖形看來，不難發現都是屬於相同類型的問題。劉徽的注釋也都採用率的觀念：考慮兩個勾股形，利用彼此的比例關係。這裏需提醒讀者的是，第 21 問立四表望木的用意，只是爲了標定出地面的四點。由上述幾個例題的說明可知，常見的測量問題，其實不全然需使用三角測量的作法，只要構造出適當的直角三角形，測量長度，就可以間接量出我們要的目標，省卻角度的度量，反而可以提高測量的準確性。

除了上述與生活有關的測量問題外，在天文觀測上，古代算家也是利用勾股測量的方法來測量太陽的高度及太陽的大小。更進一步地，改良勾股測量的方法，這就是接下來筆者所要談的「重差法」。

重差法與《海島算經》

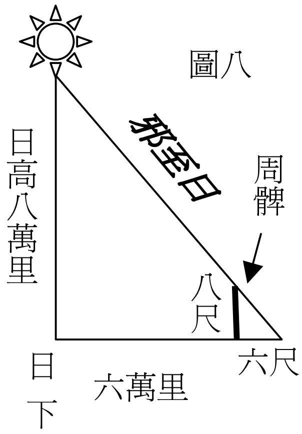
什麼是重差法？由上述例題，讀者不難發現都只用到一個「表」(垂直的量桿)或相當於「表」的作用的替代物來當做測量的基準。而重差法，簡單地說，就是利用兩個或兩個以上的表當做測量基準的測量方法。爲什麼必須改良呢？這有著其不得不然的原因，且容筆者道來。

首先從《周髀算經》談起，這本目前是中國最古老的天文學著作，成書時間比《九章算術》更早，主要內容是闡明「蓋天說」—西漢時期所流行的一種宇宙結構學說。[13]一開頭便是量測太陽高度及距離的問題，

> ……周髀長八尺，……髀者，股也。正晷者，勾也。……日益表南，晷日益長，侯勾六尺。……從髀至日下六萬里而髀無影，從此以上至日。則八萬里。若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，并而開方除之，得邪至日，從髀所旁至日所十萬里。[14]

此段文意如圖八所示。可見當時量天度日的測量方法與工具，以及對勾股定理的運用已經相當的純熟。但讀者或許心中會疑惑古人如何測量「從髀至日下六萬里」呢？其實在原文中，

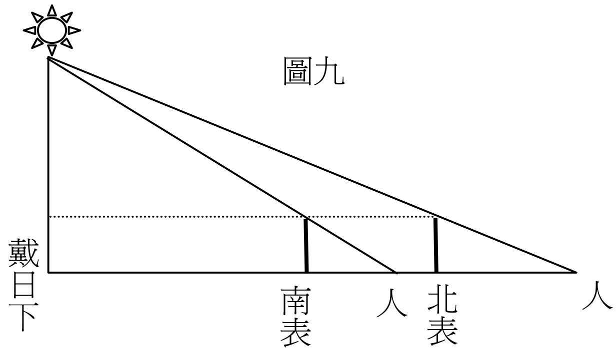
是依靠一條經驗上的假設「表影一千里差一寸」推論而得。這個假設應該是來自觀察所得的規律，出錯的機會相對地會增多。因而引發算家對此測量方法的改進，導致重差法的產生。[15]根據史家吳文俊對《周髀算經》趙君卿注中日高圖的還原，以及利用出入相補原理重新詮釋後，確信趙君卿已經掌握重差法：利用兩個等高的表，分別量得該表的影長，從而得到影差，便能利用其計算日高及日遠。而劉徽則在重差法的基礎上，將它的應用加以推廣。



圖八

劉徽在〈《九章算術》注序〉先談到重差法的用處：「凡望極高，測絕深而兼知其遠者必用重差、勾股，則必以重差爲率，故曰重差。」更舉洛陽測日爲例，逐錄如下以爲說明：

> 立兩表於洛陽之城，令高八尺，南北各盡平地。同日度其正中之影，以影差為法，表高乘表間為實，實如法而一。所得加表高，即日去地也。以南表之影乘表間為實，實如法而一，即南表至南戴日下也。以南戴日下及日去地為勾、股，為之求弦，即日去人也。[16]



圖九

此題文意如圖九，文句中劉徽告訴我們表高八尺，但沒有其他實測的數字，這裏純梓是方法的展示。劉徽給出兩個重差法的基本公式

$$日去地=\frac{表間\times表高}{影差}+表高$$

$$南表至日下=\frac{表間\times南表影}{影差}$$

由此看出：藉助兩表的測量，便可省略考慮表到日下的距離，除去依賴經驗性假設。此外，這兩個公式與劉徽《海島算經》第一問望海島公式形式一致，因此公式的推導說明，筆者稍後再行說明。

劉徽在洛陽測日的例子後，接著寫道：

> 雖夫圓穹之象猶曰可度，又況泰山之高與江海之廣哉。徽以為今之史籍且略舉天地之物，考論厥數，載之於志。以闡世術之美，輒造《重差》，並為注解，以究古人之意，綴於勾股之下。度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望。觸類而長之，則雖幽遐詭伏，靡所不入。[17]

劉徽在量天測日後，將重差法推廣到大地測量之上。[18]並寫成《重差》一章，置於《九章算術》勾股章之後，並提出「度高者重表，測深者累矩，孤離者三望，離而又旁求者四望。」等法則。在唐朝初年，選定十部算經時，將其由《九章算術》中分出，並另命名爲《海島算經》，宋刻本的《海島算經》已經失佚，現有的傳本係由戴震從《永樂大典》中輯錄而得，是否與原書相同，已不可考。

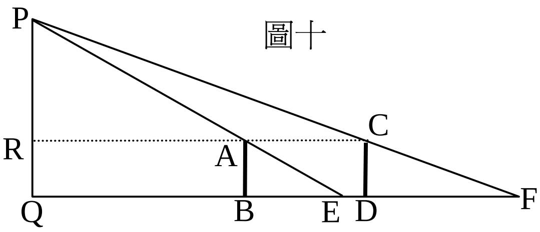
現在流傳的《海島算經》共九問，由於劉徽的原圖與注釋均失，僅留下唐李淳風的注釋，但是李注將實際數字代入，演算每一條術文的步驟，並未將設題造術的原由寫出。清李潢(?~1812)撰有《海島算經細草圖說》一卷，利用相似形的對應邊成比例來說明術文的正確性。史家普遍認爲李潢的圖畫的輔助線過多，恐怕不合乎劉徽的原意。根據當時的數學水平及《九章算術》所呈現的方法，可能性不外乎兩種：一是利用勾股形的「其相與之勢不失本率」；

另一是利用出入相補原理。這兩種方法劉徽都曾在勾股章使用過，但根據筆者目前所見的資料，覺得利用後者的還原的作法比較沒有疑義，[19]以下便利用出入相補原理，說明《海島算經》第一問的題目與術文。

《海島算經》第一問爲測海島問，此書因而得名。題目如下：

今有望海島，立兩表，齊高三丈，前後相去千步，令後表與前表參相直。從前表卻行一百二十三步，人目著地，取望島峰，與表末參合。從後表卻行一百二十七步，人目著地，取望島峰，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？

術曰：以表高乘表間為實，相多為法除之，所得加表高，即得島高。求前表去島遠近者，以前表卻行乘表間為實，相多為法除之，得島去表數。



圖十

此望海島問的題意如圖十，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$爲兩表，$\overline{PQ}$爲島高，也許讀者已經發現圖十與圖九完全相同，術文的公式當然也相同(只要替換對應的名稱即可)：

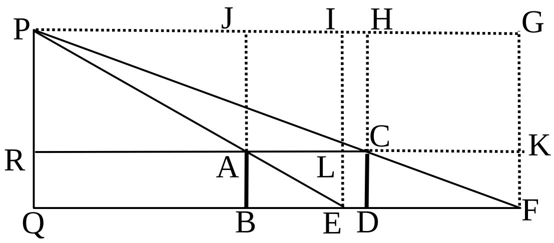
$$\text{島高}=\frac{\text{表間}\times\text{表高}}{\text{相多}}+\text{表高}\ (\text{也就是}\ \overline{PQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{(\overline{DF}-\overline{BE})}+\overline{AB})$$

$$\text{前表去島}=\frac{\text{表間}\times\text{前表卻行}}{\text{相多}}\ 。(\text{也就是}\ \overline{BQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{BE}}{\overline{DF}-\overline{BE}})$$

其中表間爲$\overline{BD}$；相多爲$\overline{DF}-\overline{BE}$(就是影差)；前表卻行爲$\overline{BE}$ 。

以下是吳文俊先生利用「出入相補」原理所提出的證明，說明這個公式的推導，如圖十一，在長方形$PGFQ$中，

圖十一



長方形$CHGK$的面積=長方形$CDQR$的面積

在長方形$PIEQ$中，

長方形$AJIL$的面積=長方形$ABQR$的面積

然後兩式相減，

長方形$CHGK$的面積−長方形$AJIL$的面積

=方形$CDQR$的面積−長方形$ABQR$的面積

所以，

$$\overline{PR}\times(\overline{CK}-\overline{AL})=\overline{BD}\times\overline{AB}\Rightarrow(\overline{PQ}-\overline{AB})\times(\overline{DF}-\overline{BE})=\overline{BD}\times\overline{AB}\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{(\overline{DF}-\overline{BE})}+\overline{AB}$$ 又長方形$AJIL$的面積=長方形$ABQR$的面積，

所以，

$$\overline{BQ}\times\overline{AB}=\overline{BE}\times\overline{PR}\Rightarrow\overline{BQ}\times\overline{AB}=\overline{BE}\times(\overline{PQ}-\overline{AB})$$ 再將上述 $\overline{PQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{AB}}{(\overline{DF}-\overline{BE})}+\overline{AB}$ 代入，即可得 $\overline{BQ}=\frac{\overline{BD}\times\overline{BE}}{\overline{DF}-\overline{BE}}$ 。

由此可知「出入相補原理」所扮演的重要角色。除了第一問之外，吳文俊先生也認爲再加上《海島算經》的第二問、第四問等二題提出的結果，代表全書的三個基本公式，書中其他的各問均可由這三個公式推得。請有興趣的讀者自行閱讀。事實上，筆者目前所見的資料

顯示，對於《海島算經》的解讀仍未完全有定論，例如，有史家便認為《海島算經》只有第一問是最基本的，其餘的各問，是利用第一問的公式，加上比例性質的應用得到的。[20]

結語

《海島算經》以降，中國在測量技術與方法上達到完善與巔峰，這也可在魏晉時期地圖繪製的技術與理論的建立上，可知重差法在當時是被廣為運用的。[21]後世的算書多有重差法的題設的紀錄，如南宋秦九韶的《數書九章》、南宋楊輝的《續古摘奇算法》，元朝李冶的《四元玉鑑》，[22]明朝程大位的《算法統宗》等書。[23]在題目列式的方法，均採用《海島算經》的方法，並沒有改進。

直到明末清初，三角學的知識隨著傳教士進入中國，中算家才開始了解有關角的度量及相關內容。此時，勾股測量就感受到衝擊。以康熙命令編纂的《數理精蘊》來說，雖然《數理精蘊》下編卷十八〈測量〉將勾股測量與三角測量分開編寫，對編纂者來說，這兩者的異同是清楚的：「勾股必為直角，而三角形則惟變所適，而無定形，要以角度為準。而用割圓八線，以為比例。凡求角求邊，皆以三角形之法為本。……不特凡物之高深廣遠可得而推，即七政之躔度，天地之形體，俱可得而測也。」

如果由教學的角度來看待勾股測量的方法，這其實是個知識門檻較低的作法，學生只能了解相似形比例，就能輕易推求答案。更何況老師也能趁此機會讓學生見識，不用相似形理論便可推求出相似勾股形的比例關係。(一定會驚豔之感！)在實際操作上，如同文本所見的例題，只要把握勾股形的建立，測量長度即可完成測量，相當易於操作，也能避免角度量測容易造成誤差的弊病。還有，由外在文化環境對知識發展造成的影響來看，除了大家熟知希臘人的例子：對於「無限」的恐懼，導致對間接証法的使用。這個勾股測量的例子，也可以提供我們另一個觀照：在缺乏角（度）概念的限制下，中國人卻建立起相當傑出的測量技術。

註釋

1. 至於為何古代中國沒有發展一般角的概念及度量？仍未有定論，有此一說是與天文學淵源有關，見李繼閔，《《九章算術》及其劉徽注研究》，頁 394-396。但中算家仍然了解並充份掌握特殊角的三角形概念(如直角三角形)，或是鉛直、水平等概念。尤其是直角三角形性質的推求(中算上稱為勾股術)，更是中國古代幾何學發展的核心，但仍是討論邊長之間的關係，與角度無關。
2. 引自郭書春譯注 (1998)，頁 475。
3. 第 21 問到第 23 問引自郭書春譯注 (1998)，頁 479-481。
4. 術文如下：以出北門步數乘西行步數，倍之，為實。并出南、北門步數，為從法。開方除之，即邑方。列出方程式後，中算家是利用開帶從平方法來解此一問題，這也是有趣的題材，有興趣的讀者請自行找相關資料。
5. 引自郭書春譯注 (1998)，頁 475-476。
6. 這是已知直角三角形中勾長 a，股長 b，求內接正方形的邊長 d 的問題。術文的公式為 $d=\dfrac{ab}{a+b}$ 。
7. 引自郭書春譯注 (1998)，頁 466。
8. 楊輝，南宋錢塘人，曾擔任地方官員，生卒年不知。重要的著作有《詳解九章算法》(1261)、《楊輝算法》(1274-1275)。
9. 事實上，在楊輝的《詳解九章算法》第 58 頁也有此一想法的說明：『直田斜解勾股二段，其一容直；其一容方，二積相等。』 收入郭書春主編 (1993)。值得一提的是，史家郭書

春認爲此段文字是出自北宋賈憲。
10. 引自《楊輝算法》的《續古摘奇算法》。收入郭書春主編 (1993)，頁 1114。
11. 引自郭書春譯注 (1998)，頁 476。
12. 此處筆者有個大膽的猜測，文中筆者對劉徽此題注解的分段，乃沿用多數史家的看法，但總覺得『故以出北門乘折西行股，以股率乘勾之冪。然此冪居半以西，故又倍之，合東，盡之也。』此段文字應放在出入相補原理的注釋中較佳，似乎就能補上缺少的等式右半。
13. 《周髀算經》原名《周髀》，不知道撰者名氏。因爲書中包含相當繁複的數字運算及勾股定理(即畢氏定理)，唐代在規定國子監算學課程時，便將它列入十部算經之一，並改名爲《周髀算經》。現流傳的《周髀算經》爲趙君卿注解的版本。
14. 引自《周髀算經》，頁 6-8。收入郭書春主編 (1993)。
15. 在李國偉 (1984) 一文中，對於重差術與「寸影差千里」可能的關係，有著精彩的敘述。此外，吳文俊 (1982) 還原傳本中錯誤的日高圖，並對趙君卿的注解重新詮釋。也對劉徽的《海島算經》的術文，給予新的証明。是篇重要的經典論文，值得一讀。
16. 引自郭書春譯注 (1998)，頁 198。
17. 同注 16。
18. 傅大爲認爲劉徽海島重差術的高度，似乎是從周髀以後的研究傳統『以重差勾股量天度日」的更進一步發展得來的。』因此，勾股發展到重差的脈絡應是：勾股→周髀天文宇論研究傳統→重差→海島測望數學。見傅大爲 (1988)，頁 8-12。
19. 贊成前者的是錢寶琮爲主；力主後者的是吳文俊。目前筆者所見利用相似形來証明《海島算經》第一問的術文時，會使用非勾股形的三角形成比例的情況，這是很值得商榷的。當時算家所運用應限於勾股形才是。有與趣者可見錢寶琮 (1981)，頁 72-75。或是郭書春 (1995)，頁 175-180；198-205。
20. 見劉鈍 (1993)，頁 413-418。
21. 裴秀提出『製圖六體』，確立地圖繪製的理論。見郭書春 (1995)，，頁 180-182。
22. 必須說明的，李冶在書中列式的方法與《海島算經》第一問是相同的，但解方程式的方法採用天元術。
23. 値得一提的是程大位在《算法統宗》編有窺望海島歌，抄錄如下：『望島知高法術奇　立來二表並高低　表問尺數乘高數　以作實情更不容　二表退行相 減較　減餘爲法以除之　更將一表相加併　海島巔高盡可知　另置表間之尺數　以乘前表退行宜　前法除之知隔水　水程遠近不差池』。由此歌訣，可知此時的測量方法與使用公式與《海島算經》第一問是相同的。見《算法統宗》卷十二，19-20，收入郭書春主編 (1993)。

參考文獻

李國偉 (1984)，〈初探「重差」的內在理路〉，《科學史通訊》第三期。
吳文俊 (1982).〈我國古代測望之學重差理論評介兼評數學史研究中某些方法問題〉，收入《科技史文集》第八輯。
郭書春主編 (1993).《中國科學技術典籍通彙・數學卷一》，鄭州市：河南教育出版社。
郭書春譯注 (1998).《九章算術》，瀋陽：遼寧出版社。
郭書春 (1995).《古代世界數學泰斗--劉徽》，台北：明文出版社。
傅大爲 (1988)，〈論《周髀》研究傳統的歷史發展與轉折〉，《清華學報》新十八卷第一期
劉鈍 (1993).《大哉言數》，瀋陽：遼寧出版社。
錢寶琮 (1981).《中國數學史》，北京：科學出版社。

《幾何原本》(一) 文本研讀內容摘要

台灣師範大學數學系 洪萬生教授

日期：2002 年 2 月 2 日
地點：台灣師範大學數學系 M417
主讀：洪萬生
贊助：教育部『人文社會科學史料典籍研讀會』計畫

一、版本

明代初刻本 (1607 年) 之 1611 年『再校本』，現藏上海博物館與上海圖書館。上海文物管理委員會於 1983 年依據上述『再校本』，影印發行。

至於 1607 年之初刻本，是徐光啓與利瑪竇根據丁先生 (Christophorum Clavius) 所編的 *Euclidis Elementorum Libri XV* (1574) 譯成。原書共有十五卷，他們兩人只翻譯了前六卷。此一拉丁文版本，原與 Thomas L. Heath 所勘定之權威英文版 *Euclid: Thirteen Books of The Elements* (1956) 稍有出入，徐、利兩人在十六世紀末翻譯時，更進行了『在脈絡』(in context) 的斟酌，因此，選擇一些片段來仔細研讀並作比較，預料在認知學習方面，相當可以開展社會文化面向之意義。而這，也正是我們研讀此一文本的主要用意。

二、研讀文本

1. 徐光啓的〈幾何原本雜議〉共八則
2. 《幾何原本》第一卷之首：界說三十六，求作四，公論十九
3. 《幾何原本》第一卷：第一 ～ 十二題；第四十三 ～ 四十八題。

三、研讀內容摘要

首先，在進入文本之前，我簡單對比了柏拉圖 (Plato) 與亞里斯多德 (Aristotle) 的數學哲學主張，以及它們在哪些面向（譬如『認識論』或『方法論』）影響了歐幾里得 (Euclid) 的《幾何原本》。我所依據的數（科）學史家論述，包括了 Carl Boyer (1968)，Morris Kline (1972)，G. E. R. Lloyd (1983)，以及 Victor Katz (1993)。此外，由於利瑪竇、徐光啓之譯本根據了 Clavius (1574)，所以，有關丁先生 (Clavius) 的學術背景，我們也參考了 Englefriet (1998)。在這一個關聯中，我也著重說明 Heath (1956) 中的 “postulate”（設準，共五個）與 “common notion”（公論，共五個）在亞里斯多德的『演繹科學』(ductivie science) 結構中之區別。然後，對照 Clavius (1574, 1591) 中的重新安排（求作四則，公論十九則）。最後，再引出現代數學中的『公設』或『公理』(axiom) 之意義。

在研讀策略方面，我們則通過比較（史學）方法，考察利、徐兩人中譯時如何處理中西算的會通與其相關的認知困擾。為此，我們選擇 Heath (1956) 作為一個標準的文本，同時，也對照了 Clavius (1591)，亦即 Clavius (1574) 的修訂版。後者是中譯的母本，照理應該參考才是，可惜，我們無從得閱，只好日後再想辦法補充。

在本書的合譯工作中，徐光啓所扮演的角色是『筆受』，至於來自義大利的耶穌會士利瑪竇 (Matteo Ricci) 則是『口譯』。因此，如果說利瑪竇在羅馬學院 (Collegio Romano) 接受

丁先生的指導，受過很好的數學訓練，那麼，徐光啓是否擁有相稱的算學能力呢？而且，他是否理解西方（論理）幾何學呢？事實上，前者可以徵之於徐光啓自己的算學著述，至於他的〈幾何原本雜議〉，則可以佐證他對本書嚴密邏輯結構之心領神會。其中有多條常被數學史著述所引述，我在講解時一筆帶過。另外，我則是特別說明底下二則論述之意義： (1) 本書『能令學理者祛其浮氣，練其精心』（第一則）；(2)讀者初覽此書，「疑奧深難通，仍謂余當顯其文句」，於是徐光啓勉勵他們「請假旬日之功，一究其旨，即知諸篇，自首迄尾，悉皆顯明文句。」（第八則）前者似乎意在突顯幾何學訓練的『修心養性』功能，這當然有賴於後者所強調的《幾何原本》知識結構中的『首尾一貫』與『顯明文句』。針對後者，徐光啓還指出：「凡人學問，有解得一半者，有解得十九或十一者。獨幾何之學，通即全通，蔽即全蔽，更無高下分數可論。」（第三則）

（一）界說

在〈界說三十六則〉中，我首先說明『界說』與『幾何府屬』二個名詞之意義。其中『界說』之爲用 —「凡造論，先當分別解說論中所用名目，故曰界說」，是否也呼應了中國明代晚期算學著述體例，還有待深入研究。此外，『府屬』應是 “category” 之中譯，如此一來，『幾何』當是 “magnitude” 之意譯，而非 “geo” 之音譯，因爲「凡曆法、地理、樂律、算章、技藝工巧諸事，有度有事者，皆依賴十府中，幾何府屬。」

現在，針對幾個『界說』作一點說明。第一界：「點者，無分。」它準確地對應了 Heath (1956) 版的『定義 I.1』: “The point is that which has not part.” 不過，後者卻沒有前者的『備註』:「無長短廣狹厚薄。」第二界：「線，有長無廣。」也『忠實地』呈現了 Heath (1956) 版的『定義 I.2』。所不同的，還是前者的『備註』:「試如一平面，光照之，有光無光之間，不容一物，是線也。真平真圜相遇，其遇處止有一點，行則止有一線。」儘管我們目前無法核對此這些備註的中譯忠實性（相較於 Clavius (1574, 1591) 版），然而，它們出自丁先生的教學考量，當無疑問。第四界：「凡直線止有兩端，兩端之間，上下更無一點。」其備註如下：「兩點之間，至徑者，直線也，稍曲則繞有長矣。直線之中點能遮兩界。凡量遠近，皆用直線。」這似乎也頗能呼應 Heath (1956) 中的『定義 I.4』: “A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.” 第五界：「面者，止有長有廣。」其備註如下：「一體所見爲面。凡體之影，極似於面。想一線橫行，所留之迹，即成面也。」其中徐、利兩人還以「無厚之極」來補充說明『極似於面』之比喻。

按『無厚』一詞出自先秦墨、名二家，公孫龍有所謂「無厚不可積也，其大千里」之命題。這種借用中國古代數學名詞的手法，也見諸於『第四求』:「設一度於此，求作比度，較此度或大或小。」（所謂度者，或線或面或體皆是）在其『備註』中，丁先生比較了『度』（按即 magnitudes）與『數』（按即 numbers）的不同，從而將『度者，可以長亦可以短』中的『短者減之，亦復無盡』之命題，關聯到「莊子稱一尺之棰，日取其半，萬世不竭」。爲甚麼呢？「自有而分，不免爲有，若減之可盡，是有化爲無也，猶可言也。令已分者，更復合之，合之又合，仍爲尺棰，是始合之初，兩無能并爲一有也。兩無能并爲一有，不可言也。」徐利兩人未進一步說明最後一句，可見它的確是『不可言也』。

回到第七界：「平面，一面平，在界之內。」其『備註』說：「平面中間線，能遮兩界。平面者，諸方皆作直線。試如一方面，用一直繩施於一角，繞面運轉，不礙不空，是平面也。若曲面者，則中間線不遮兩界。」這兩者的結合，也可以呼應 Heath (1956)『定義 I.7』: “A plane surface is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.” 第八界是關於平面

的角 (plane angle) 的定義(「平角者，兩直線於平面縱橫相遇交接處。」)，其中一個備註指出:「如上(附圖)甲乙、乙丙二線，平行相遇，不能作角。」亦即：今日所謂的『平角』(度量爲 180 度)對於本書而言，並非一角。可見，今日國中數學教科書中的『平角』，應該是十九世紀中葉之後歐洲中小學數學教育逐漸普之後，所引入的一個新的概念。至於何以有此必要，似乎值得大家一起來省思。

有關圓形及其相關幾何量之定義，則出現在第十五－十八界。其中在第十五界圓(圜)的定義之備註中，丁先生也提供了『操作定義』(operational definition):「一說圜是一形，乃一線屈轉一周復於元處所作。」顯然這是爲了教學的考量。

這種風格在中譯名詞方面有時難以維持。第二十界:「在三直線界中之形，爲三邊形。」據此，第二十三、二十四、二十五、二十六、二十七、二十八界分別提供了平邊三角形(即：正三角形或等邊三角形)、兩邊等三角形(即：等腰三角形)、三不等三角形(即：三邊不等三角形)、三邊直角形(即：直角三角形)、三邊鈍角形(即：鈍角三角形)、三邊各銳角形(即：銳角三角形)。從定義的表面形式來看，後五者不能說是第二十界的衍生物，這對於學習者，尤其是初學者來說，一定帶來不小的困擾才是。至於第二十九、三十、三十一、三十二界，分別提出正方形(直角方形)、長方形(未敲定名詞，Clavius (1591) 亦然)、菱形(同前)、平行四邊形(同前)。然後，在第三十三界中，將以上四種方形稱爲『有法四邊形』，其他則皆謂之『無法四邊形』。最後這則中譯從何而來，還有待研究。

『第三十四界』是有關平行線的定義:「兩直線於同面行至無窮，不相離亦不相遠，而不得相遇，爲平行線。」若將此一定義對照『第十一論』:「有二橫線，或正或偏，任加一縱線。若三線之間同方兩角，小於兩直角，則此二橫直線，愈長愈相近，必至相遇。」其中有關『無限』之翻譯，顯然並不一致！請徵之於 Heath (1956)『定義 I.23』: “Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.” 並對照 Heath (1956)『設準 5』: “(Let the following be postulated:) That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.” 就這兩個述句中同樣語意的 “indefinitely produced”來說，歐幾里得對於『無限』的迴避態度，可以說是始終如一了。在此，讓我們再引述丁先生的拉丁文原文如下：

Definitione XXXIV: Parallelae recte linea sunt, que cum in doem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producentur, in neutram sibi mutuo incidunt.

Communes notione XIII: Et si in duas rectes lineas recta incidens, internos ad easdem que partes angulos duobus rectis minores faciat, dueille recte in infinitum producte sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

讓有興趣的貼近文本的讀者，可以通過查閱字典作一個對比。此外，在本論之後的備註，也很值得引述:「欲明此裡，宜察平行線不得相遇者(界說卅四)。加一垂線，即三線之間，定爲直角，便知此論。兩角小於直角者，其行不得不相遇矣。」

(二)〈求作〉與〈公論〉

由上一節的討論，可知《幾何原本》與其 Clavius (1574) 拉丁文母本中的第一冊之界說、求作與公論，都與 Heath (1956) 不同。就『界說』的數目而言，前二者共有三十六則，而 Heath

(1956) 則有二十三則。差異之處在於：前二者的第十九～二十二則，在後者中併爲第十九則；前二者的第二十三～二十五則，在後者中併爲第二十則；前二者的第二十六～二十八則，在後者中併爲第二十一則；前二者的第二十九～三十三則，在後者中併爲第二十二則。前二者的第三十四則（即平行線之定義），爲後者之第二十三則（亦即：第一冊之最後一則）。至於第三十五、三十六兩則，是丁先生所額外添加的內容。根據荷蘭漢學家安國風的研究 (Engelfriet, 1998, pp. 168-169)，這兩則定義完全是爲了幫助讀者理解『定理 I.43』而設。

在〈求作〉方面，相較於 Heath (1956) 的五則，《幾何原本》與其 Clavius (1574) 拉丁文母本共有四則，而且只有第一、二、三求相同。Heath 版的的第四則『設準』，在後兩書中被安排成爲〈公論〉中的「第十論」:「直角俱相等」，至於前述平行設準，即 Heath 版中的『設準五』，在後兩書中則被移到〈公論〉『第十一論』之中。至於〈求作〉中的『第四求』（已見前引述），則是丁先生所添加。至於上引徐、利二人之註解，反映了他們對於『無限（小）』的看法，還有待史家深入探索。另一方面，有關《幾何原本》中對〈求作四則〉的說明 —『求作者，不得言，不可作』，安國風接受法國漢學家兼數學史家馬若安 (Jean-Claude Martzloff) 的建議：針對『所求作的圖形』，我們不可能說它不能作得出來 (It is impossible to say that it cannot be done.)。這種理解在徐光啓自己的數學著述中，當然也得到呼應，我們以後再談。

在〈公論〉方面，第一、二、三、八、九論分別與 Heath (1956) 的五個 “Common Notions” 相同。第十一、十二論如前所述，原是設準四、五所移置的結果。其他如第四～八論，都可以說是前三論的衍生物，第十四～十九論的情況也類似，至於第十二、十三論分別涉及直線的性質，譬如「兩直線，不能爲有界之形」，「兩直線，止能於一點相遇」，也有一些相關的歷史演化，由於相當複雜，需要專文才能說個明白！總之，在解說本節題旨時，《幾何原本》強調了『公論』的特性：「公論者，不可疑」。在此，著者、譯者至少都指出了『公論』與『求作』的不同，值得數學教育工作者注意。

（三）《幾何原本》第一卷：第一 ～ 十二題

本卷之題數一如 Heath (1956) Book I。茲就體例之差異，提供一點起碼的說明。針對『求作』(即：幾合作圖題）的命題（如：第一、二、三題）而言，《幾何原本》的體例一定列出『法曰』一項，以便說明作圖過程，此外，再繼以『論曰』，亦即『證明』。最後，再額外提供一個『(其)(又）用法』，有時是比較簡便的幾何作圖，不過，有時涉及後面的命題，作者會強調『此法今未能論』。然而，在 Clavius (1591) 與 Heath (1956) 版中，『作圖』與『證明』完全連在一起，不作任何區隔，此外，後書甚至也不提供另類『作圖方法』。因此，前書中的『用法』(praxis) 應該是十六世紀的產物。

另一方面，如果是純粹的證明題，則《幾何原本》一定列出『解曰』一項，以便依據附圖（包含其記號），來解釋命題之意義。然後，再繼以『論曰』(證明)。這種體例上的分隔，在 Clavius (1591) 與 Heath (1956) 中也未出現。此外，《幾何原本》中有一些命題之後，會補上『增（題)』或『系（題)』，顯然出自 Clavius (1591) 中的 “Corollarium”，可是，卻未曾在 Heath (1956) 中現身。

在有關『論證』的說明中，徐、利二人特別在『第一題』『論曰』後備註說：「凡論有二種，此已是爲論者，正論也。下倣此。」並且在『第四題』『論曰』後也加註說明：「此以非爲論者，駁論也。」這種『正論』、『駁論』的具體說明，究竟是否（或如何）影響明末清初以後的中國人的思維模式，則有待進一步探索。

在命題的內容方面，我特別著重說明第一題（『於有界直線上，求立平邊三角形』）的『求作』之開宗明義，與第五題（『三角形若兩腰等，則底線兩端之兩角等，而兩腰引出之，其底之外兩角亦等。』）在學習認知上的意義。

（四）《幾何原本》第一卷：第四十三 ～ 四十八題

在這些命題中，第四十三～四十五題論及『面積貼用』(application of area) 之概念，可能是爲了第二冊的命題之證明作準備。令人不解的是，這一方法並未應用在『畢氏定理』（即第四十七題）的證明上，儘管此一證明後世稱作『面積證法』，與另外兩個證法（即『弦圖證法』與『比例證法』）鼎足而三。在 Clavius (1591) 中有一些『增題』，顯然是他自己所添加的內容，最好的證據，莫過於第四十七題的第四增題，其內容亦即：「已知直角三角形的兩股長，求斜邊長」。值得注意的，是《幾何原本》也將此一問題之解法冠以『法曰』。此外，針對此一解法，原書也加註：『此以開方盡實者爲例。不盡實者，自具算家分法。』。

茲將本卷最後這幾個命題內容抄錄如下，以供大家參考：

第四十三題：凡方形對角線旁兩餘方形，自相等。

第四十四題：一直線上，求作平行方形，與所設三角形等，而方形角有與所設角等。

第四十五題：有多邊直線形，求作一平行方形，與之等，而方形角有與所設角等。

第四十六題：一直線上，求立直角方形。

第四十七題：凡三邊直角形，對直角邊上所作直角方形，與餘兩邊上所作兩直角方形，并等。

四增（題）：三邊直角形，以兩邊求第三邊長短之數。

四、參考文獻

Clavius, Christophorum (1591). *Euclidis Elementorum Libri XV*. (本書複本承摯友馬若安博士致贈，謹此致謝。)

Engelfriet, Peter (1998). *Euclid in China: The Genesis of the First Translation of Euclid's Elements in 1607 & its Reception up to 1723*. Leiden / Boston / Koln: Brill.

Heath, Thomas L. (1956). *Euclid: The Thirteen Books of the Elements*. New York: Dover Publications, INC.

Katz, Victor (1993). *History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Kline, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

洪萬生 (2001).〈貼近《幾何原本》與HPM的啓示：以『驢橋定理』爲例〉，刊於網頁：http://www.math.ntnu.edu.tw/~horngT.

Reader's FeedBack

《HPM 通訊》讀者回饋問卷統計

《HPM 通訊》編輯　蘇惠玉

在上一期的通訊中，我們作了一次讀者的問卷調查，以檢驗發行以來的影響，或是做爲本刊檢討及調整方向之用。共回收 100 份。以下爲回收問卷資料的統計。

1. 請問您的職業爲：
   教學碩士班學生及研究所研究生(7/100)，準教師(70/100)，
   中學數學教師(23/100)
2. 請問您是本刊的經常性訂戶（每一期定期收到）嗎？
   是：26/100　不是：74/100（從何處看到本刊：網站、學校、老師介紹）
3. 請問您閱讀本刊的頻率爲：
   每期必看：21/100　偶而才看：35/100　有需要找資料時才看：44/100
4. 請問您對於本刊中哪一類的文章較感興趣：
   數學史研究：57/100　數學教學相關研究：67/100　科普新書介紹：12/100
   網站及新資訊介紹：19/100
5. 您覺得在閱讀本刊的過程中，哪一類的文章較難閱讀：
   數學史研究：55/100　數學教學相關研究：24/100　科普新書介紹：19/100
   網站及新資訊介紹：6/100　沒有：1/100
6. 請問您覺得閱讀本刊收穫最大的是哪一類的文章：
   數學史研究：61/100　數學教學相關研究：60/100　科普新書介紹：12/100
   網站及新資訊介紹：13/100
7. 請問在閱讀本刊後，對您的哪一方面較有幫助？
   教學：62/100　研究：55/100　修身養性：23/100　無多大幫助：0/100
   其他：數學素養；挫折感
   舉例說明：
   1.對教學的態度有很大轉變（教學）
   2.可了解如何教學較易讓學生接受（教學）
   3.以別人的經驗為基礎，吸取精華（教學）
   4.有許多的數學史故事可說給學生聽（教學）
   5.有時候會刊載數學教育方面的知識（教學）
   6.知道如何將數學史與教學「盡量」結合（教學）
   7.教學中引入小故事（教學）
   8.花拉子模的配方法（教學）
   9.古巴比倫、埃及數學給學生的多元數學面貌（教學）
   10.課堂中講述，與同事討論（教學、研究）
   11.容易引發同學思考多讀書來填補知識空缺（教學、研究）
   12.學會如何去思考數學（研究）
   13.釐清數學詞彙；掌握課程脈絡；提供數學家的其他想法及研究技巧（研究）
   14.讓我見識了我所不知道的數學思考觀念（研究）
   15.了解數學的發展，使我有更親近數學的感覺（教學、修身養性）

16.了解看到更多數學的面向，例如：Zeno 悖論（修身養性）

17.陶冶性情、一窺數學偉大發展史（修身養性）

8. 您覺得本刊可以再增加哪一類的文章：

數學史研究：14/100　數學教學相關研究：55/100　科普新書介紹：14/100

網站及新資訊介紹：12/100　其他：數學天地

9. 您對本刊的建議：

1. **更普及，免費當成教學研究會資料。**
2. **與教材更貼近。**
3. **以概念的觀點切入。**
4. **柯普新書介紹（中文、英文及大陸出版）。**
5. **撐下去。**
6. **訂閱方式更容易取得。**
7. **加強目錄的建構，及排版的方式。**
8. **擴大篇幅、增加內容。**
9. **編出一本數學史的課本或讀物。**
10. **對各個數學概念的發展歷史作一系列研究，並能結合到數學課堂之中。**

由以上的資料統計不難看出，由於發行網路的緣故，中學數學教師的訂閱戶並不如我們想像的多；或者是有很多的隱性讀者，因爲只有少數的讀者有將問卷寄回。不過，在回收的問卷中，從上述資料來看，本刊在數學史研究及數學教學相關研究上，仍有相當的大的迴響及影響。由於塡寫問卷的讀者，大多有教學背景（無論是現職教師，或是正接受教育的準教師），所以，對教學相關研究方面的文章，較能感同身受或是能直接受益用在教學上。

而在數學史的研究上，因爲牽涉到較爲專業的問題，許多讀者雖然有所收穫，但是也增加了閱讀的困難性。由於本刊當初創立時的目標之一，即是提昇國內數學教師的研究能力，而我們認爲在本刊上的文章，應該會有一定的示範作用，所以增加讀者（尤其中學數學教師）閱讀時的困難，也只能期望有一天習慣了論文寫作形式，或是數學史相關背景增強後，對本刊中較爲學術性的文章在閱讀時能更駕輕就熟。

而讓本刊編輯部最覺得頭痛及憂心的，當然是稿源的問題。在上述的統計資料中，也可以看出讀者一直期望我們能多增加一些與教學有關的文章。但是，由於願意投稿的人一直沒有出現，我們只能以有限的能力，盡量將研究心得分享的讀者，但是，雖然心力無限，能力及時間卻是有限的！我們會盡量增加教學相關的文章內容，也一直以這爲本刊的主要方針在努力中，不過仍是需要讀者們的熱情贊助，投稿吧！

最後，各位讀者的寶貴建議，我們會努力改進，也希望本刊能夠在更廣爲流通之後，對更多的讀者及台灣的數學教育及數學史研究，能發揮一點點小小微薄的影響力。

1. **要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至　suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng**