

# HPM 通訊

發行人：洪萬生 (台灣師大數學系教授)  
 主編：蘇惠玉 (西松高中) 助理編輯：楊瓊茹 (台師大數學系研究生)  
 編輯小組：蘇意雯 (成功高中) 邱靜如 (實踐國中) 唐書志 (百齡中學)  
 蘇俊鴻 (新店高中) 洪秀敏 (新竹高中) 洪誌陽 (新竹高中)  
 陳鳳珠 (中和中學) 謝佳勸 (台師大數學系)  
 林倉億 (台師大數學系研究生) 黃清揚 (台師大數學系研究生)  
 葉吉海 (台師大數學系研究生) 黃哲男 (台師大數學系研究生)

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 再論《算數書》
- 『中日韓數學史料典籍研讀會』計畫簡介
- 《算數書》部份題名的再校勘
- 《算數書》『少廣』一問的反思
- 《張家山漢簡《算數書》註釋》讀後有感
- 《算數書》研究論文目錄
- 《算數書》趣題舉隅
- 問卷

## 再論《算數書》

台灣師大數學系 洪萬生教授

本刊第三卷第十一期 (2000年11日) 曾以《算數書》為主題，刊登了我們研究群對這一本珍貴的漢簡數學書籍所作的第一次校勘。現在，利用『中日韓數學史料典籍研讀會』的機會，我們再做一次校勘。其中相關論述的主體部份，都是林倉億的貢獻，他針對我所選擇的術文，綜合多篇研究報告完成初稿，再經過我們共同的討論而成。這一次的討論成員包括了蘇意雯，蘇惠玉，蘇俊鴻，黃清陽，葉吉海，楊瓊茹，陳彥宏，林旻志，陳啓文，王文珮，謝佩珍與葉和文。此外，為了讓讀者對此一文本有『更貼近』的感覺，我們特別請蘇惠玉臨摹其中的『約分術』，希望大家喜歡。

右圖為《算數書》中期中四條簡文 (17-20) 的臨摹，對照如下，解讀請看《《算數書》研讀內容摘要》及《《算數書》部份題名的再校勘》第17至第20條簡文「約分」處。

約分 約分術曰以子除母，亦除子，母數交等者即約之矣。有曰約分未曰可半，之可令若，干，一，其，一，木曰以分子除母少以母除子，母等以為法子母各如法而成。

不足除者可半，母亦半子  
 二千一十六分之百六十二，約之百一十二分之九

約分約分術曰以子除母，亦除子，母數交等者即約之矣。有曰約分未曰可半，之可令若，干，一，其，一，木曰以分子除母少以母除子，母等以為法子母各如法而成。

不足除者可半，母亦半子  
 二千一十六分之百六十二，約之百一十二分之九

## 「中日韓數學史料典籍研讀會」計畫簡介

台灣師大數學系 洪萬生教授

### 一、計畫目的

本計畫承教育部『人文社會科學史料典籍研讀會計畫』贊助，謹此致謝。此一研讀會，目的在於提升中（小）學數學教師的古代數學文本解讀能力。在具體策略上，我們則希望延續『古代數學文本在課堂上的使用』（NSC 89-2511-S-003031-；NSC 89-2511-S-003-121-）在數學教育界所引發的部分效應，亦即：盡可能地將參與人員所完成的報告，與中學教師分享，推廣到數學課堂之中。

在那個國科會所贊助的特別研究計畫中，我們發現：在課堂中適當地引進古代數學文本，的確對於數學教學產生一些相當正面的效應。由於參與人員都（曾）任教於中學或職校，因此，他（她）們的報告總是洋溢著濃厚的教學關懷。更值得欣慰的，是他（她）們已經深刻地體會了『貼近』古典文本的意義。一方面，這些文本在課堂上的恰當使用，讓他（她）們的學生充分暴露在數學的人文趣味之前，為數學教育的價值打開了一個嶄新的面向。另一方面，也由於他（她）們深入探索這些文本中的『數學知識』之『在脈絡意義』，因此，也有機會見證人類『認知』與歷史文化之不可須臾離。他（她）們的報告（共二十九篇）完成之後，我們經由學術研討會與教師研習場合，進行了推廣與說明，結果所有教師都希望能分享這些成果。

此外，為了承辦『HPM 2000 Taipei』（「數學千禧年：歷史、文化與教育」國際研討會，2000年八月九日至十四日，台灣師大數學系），我們也從一九九八年十月開始發行了《HPM 通訊》，每年發行十期，每期以 A4 開式紙張印行，頁數在 8-20 之間。除了以平面印刷形式（非賣品）流傳外，我們也佈置下列網址：<http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng> 開放免費閱覽、列印使用。至於其內容大都著眼於『數學史與數學教學的關連』（Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM），促進中學數學教師在 HPM 方面的專業成長。本刊物之發行迄今已超過三十期，涵蓋了一百五十多篇文章，在世界華人的數學教育社群中，已經樹立了指標性的聲望。

不過，我們也注意到這種 HPM 的熱潮與動量之維持（譬如：《HPM 通訊》發行之延續），勢必需要參與人員的『數學史』素養的不斷提升，尤其在古代數學文本（中外）的細緻研讀，更是第一優先的任務。同時，這種歷史經驗的『貼近』，也應該隨時呼應實際的教學關懷。再有，這種文本研讀所帶來的博雅品味，我們也希望通過網路的流通惠及一般社會大眾。最後，主持此一研讀計畫的學者專家、甚至於其他受過數學史專業訓練的中學教師（含教學碩士班研究生），也可以利用此一機會尋找論文題目，開拓（中外）數學史學或 HPM 研究。

基於我們的研究經驗與成果，本研讀會所選擇的數學典籍，一方面包括了明清時期中國數學家會通西算所做的轉化，另一方面，也納入韓國與日本的數學文本，其中尤其側重這兩個傳統的數學家，對於十七世紀之後從中國傳入的類似上述數學知識之雙重適應（double adaptations）。所有這些，相信都會促進研讀者對這些文本進行『翻譯』時，反思在脈絡中的認知衝突，從而提醒自己在教學過程中，千萬不要忽略應有的情境考量。

### 二、選讀典籍

漢簡《算數書》(公元前一八六年)。2. 徐光啓譯作與著作：《幾何原本》前六卷、《測量全義》、《測量法義》、《測量異同》與《勾股義》。3. 梅文鼎著作：《勾股學隅》、《幾何通解》、《平三角學要》、《方圓冪積》與《幾何補編》(並含梅 成著作：《赤水遺珍》)。4. 《數理精蘊》。5. 李潢著作：《九章算術細草圖說》。6. 韓國南秉吉著作：《勾股述要圖解》、《無異解》、《九章術解》與《算學正義》。7. 日本吉田光由：《塵劫記》(日文版、英文版)。

### 三、研讀進度規劃

上列典籍共有十九種，預定每種之研讀以一次集會為原則，篇幅較多者如《幾何原本》、《數理精蘊》、《九章算術細草圖說》、《九章術解》與《算學正義》等書，則最多兩次。主讀者除了儘可能引述史家論述，介紹作者生平、全書內容及相關的歷史脈絡之外，還必須精選(由學者專家建議)全書最精采的部分，負責帶領參與者『逐字逐句點讀』，並賦予初步的歷史解釋或提出 HPM 的反思。

### 四、預定集會時間與地點

- (一) 集會地點：台北市汀州路四段 88 號 台灣師範大學數學系 M417。
- (二) 時間從 2002 年 2 月到 12 月，共 20 次。

### 五、活動參與人員

- (一) 學者專家：洪萬生(台灣師範大學數學系，兼本計畫主持人)；左台益(台灣師範大學數學系)；林炎全(台中師範學院數學教育系)；張英傑(國立台北師範學院數學教育系)；城地 茂(Shigeru Jochi)(高雄第一科技大學應用日文系)；洪碧芳(台中僑光技術學院)；潘玉樹(台東大學數學教育系)
- (二) 研究生 / 中小學數學教師約三十人。

### 六、預期成果

由於我們的研究生(含教學碩士班)多半以數學史或 HPM 為主題，撰寫他(她)們的碩士論文(將近二十位)，因此，此一研讀計劃與她(他)們的論文寫作可以相輔相成。另一方面，跨校的學者如林炎全、城地 茂教授，在數學史的研究方面都很有經驗，所以，校際教學與研究資源之整合，也可以利用此一計劃發揮效果。

其次，我們也希望利用此一計劃，鼓勵參與者就有趣之論題進行深入探索，撰成學術論文，提交學術研討會報告或投稿學術期刊發表，壯大台灣的數學史或 HPM 研究團隊。

最後，希望能以中文編寫類似 John Fauvel and Jeremy Gray 所編著的 *History of Mathematics: A Reader* (1987) 之類的書籍(英國 Open University 教學用書)，供大學生、中小學(數學)教師以及一般社會大眾參考閱讀。

## 《算數書》研讀內容摘要

台師大數學系 洪萬生教授

台師大數學研究所碩士班研究生 林倉億

日期：1 / 19 / 2002

地點：台灣師範大學數學系 M417 教室（台北市汀州路四段八十八號）

主讀者：洪萬生

相關論文摘要報告者：蘇意雯，蘇惠玉，蘇俊鴻，黃清揚，楊瓊茹

### 一、前言

《算數書》出土於公元一九八四年初中國湖北省張家山漢墓。根據陪葬的一份曆譜記載，它是不晚於西漢呂后二年（公元前 186 年）寫成的一部竹簡著作。由於它是目前僅知的第一部最古老的中國算學文本，因此，有機會『貼近』它分享古人的數學智慧，實在是很令人期待的體驗。

我們選擇彭浩的《張家山漢簡《算數書》注釋》(2001a)（底下簡稱《算數書註釋》），作為研讀的文本。彭浩目前擔任中國湖北省荊州博物館館長兼研究員，是主持《算數書》及同墓文物挖掘的考古學家。正因為如此，他的真正『第一手貼近』經驗，最值得我們分享。他曾告知筆者，這一批竹簡出土時都呈黑炭狀，緊接的是小心除掉炭渣與其他雜質，才還原成現在面貌。聽他敘述當時『發現』的喜悅，真是令人動容與嚮往。

彭浩的《算數書註釋》，根據了〈江陵張家山漢簡《算數書》釋文〉(2000)。由於他本人就是作者之一，所以，我們決定以全書作為研讀《算數書》的參考。此一選擇當然十分正確，而且成效相當顯著。譬如，林倉億就馬上可以利用《算數書註釋》一書中對體例的說明，而印證先前校勘時的一些猜測。事實上，在研讀前，我們複印了彭浩的《張家山漢簡《算數書》注釋》贈送參與者使用。此外，我們還整理了截至目前為止的相關研究論著目錄，為參與研讀者提供一個起碼的背景說明。另一方面，為了鼓勵對話，筆者也事先請求五位研究生（或中學教師）分別研讀下列論文：鄒大海 (2001a, 2001b)、郭世榮 (2001) 與郭書春 (2001a, 2001b)。

### 二、研讀方法

關於筆者帶領參與者主讀所採行的策略，也必須先作個交代。在《算數書註釋》的〈緒論〉（第一章）章第二節中，彭浩說明了『《算數書》竹簡編次的復原與書寫格式』，對於有意貼近此一文本者，實在關係重大。如前所述，林倉億得以確認他對錯簡的一些猜測，全都是因為『編次復原』與『書寫格式』的事實，得以印證的結果。在這一方面，考古學家的專家技藝，當然必須高度推崇。

接著，筆者開始介紹《算數書註釋》中的算題及彭浩的註釋，其中我們仔細地研讀了「相乘」、「分乘」、「乘」、「增減分」、「分當半者」、「約分」、「合分」、「徑分」、「狐出關」、「粟求米」、「米求粟」、「分錢」、「除」、「鄆都」、「芻」、「旋粟」、「困蓋」、「貉亭」、「井材」、「以貉材方」、「以方材貉」、「少廣」與「方田」共 23 題。在引述題文並作解讀之前，筆者先對引述題文的體例作一說明：

題文前的編號為《算數書》竹簡的出土號。彭浩在《算數書註釋》中將竹簡的出土號置於簡文之後，筆者將之挪到簡文之前。

“=” 為重文號，表示重複的文字。

“┘” 為勾識號，用作斷句。

“·” 為墨點，多用於表示另一段文字的開始，兼有與上文相隔斷。

“（）” 括弧中字皆非原竹簡中之文字，而是彭浩所加，用以表示原竹簡文字的本字、正字，或用以表示重文號所省略之文字。

“□” 表竹簡文字不能辨識者，一格代表一字。

簡文中的「楊」字，可能是《算數書》校對者的省稱。筆者在解讀中將不再解釋與寫出。

筆者在引述完每一題的題文後，會針對該題文作一簡單的解讀。為文簡起見，筆者在解讀中將直接給一個經過校勘後的完整題文，而不再一一說明筆者針對簡文作了哪些修改。筆者所給之校勘基本上是綜合了彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人的校勘，然而各家說法之間，難免有不同之處，對於這些不同之處，筆者將在註腳中一一指出。不過，建議初入門者在作第一次閱讀時，不妨先省略這些註腳，以免模糊了閱讀的焦點。

### 三、研讀內容

我們選擇了『相乘』、『分乘』、『乘』、『增減分』、『分當半者』、『約分』、『合分』、『徑分』、『狐出關』、『粟求米』、『米求粟』、『分錢』、『除』、『貉都』、『芻』、『旋粟』、『困蓋』、『貉亭』、『井材』、『以貉材方』、『以方材貉』、『少廣』與『方田』等二十二題。至於研讀內容摘要，請參閱〈《算數書》部份題名的再校勘〉一文。

### 四、結論

以上便是當日我們仔細研讀《算數書》中的 23 題。在研讀會結束之後，本所研究生林倉億、吳任哲提出他的心得報告，茲分別引述於下文附錄一、二，請讀者參考指教。今後，我們也將陸續刊載來自參與者或其他讀者的回應。再有，城地茂教授也惠寄他的〈《算數書》的日本語譯〉(*Journal of Wasan Institute* no. 4) 之定稿版，有興趣的讀者請洽筆者。

## 《算數書》部份題名的再校勘

台師大數學系 洪萬生教授

台師大數學研究所碩士班研究生 林倉億

### 「相乘」

- 1: 相乘 寸而乘寸<sub>二</sub>，(寸)也」；乘尺，十分尺一也」；乘十尺，一尺也」；乘百尺，十尺也；乘千尺，百尺也」。半□□乘尺，廿(二十)分尺一也； 楊
- 2: 「三分寸乘尺，卅(三十)分尺一也」；八分寸乘尺，八十分尺一也。
- 3: 一半乘一，半也」；乘半，四分一也」。三分而乘一」，三分一也」；乘半，六分一也」；乘三分，九分一也」。四分而乘一也， 楊
- 4: 四分一也；乘半，卅(三十)分尺一也」。四分寸乘尺，眈(四十)分尺一也」；五分寸乘尺，五十分尺一也；六分寸乘尺，六十分尺
- 5: 一也」；七分寸乘尺，祆(七十)八分一也」。乘三分，十二分一也」；乘四分，十六分一也」。五分而乘一，五分一也」；乘半，十分一也；
- 6: 乘三分，十五分一也」；乘四分，廿(二十)分一也」；乘五分，廿(二十)五分一也」。乘分之鯁(術)曰：母乘母為法，子相乘為實。

### 解讀

此題的內容是關於分數的乘法，題中先給許多的實例，最後再給作分數乘法的術文：「母乘母為法，子相乘為實。」不過，此題的內容中，抄寫錯亂之處頗多，今校勘、重排如下：

相乘 寸而乘寸，寸也；乘尺，十分尺一也；乘十尺，一尺也；乘百尺，十尺也；乘千尺，百尺也。半分寸乘尺，<sup>1</sup>廿分尺一也；<sup>2</sup>三分寸乘尺，卅分尺一也；四分寸乘尺，眈分尺一也；五分寸乘尺，五十分尺一也；六分寸乘尺，六十分尺一也；七分寸乘尺，祆(七十)分尺一也；八分寸乘尺，八十分尺一也。一半乘一，半也；乘半，四分一也。三分而乘一，三分一也；乘半，六分一也；乘三分，九分一也。四分而乘一也，四分一也；乘半，八分一也；乘三分，十二分一也；乘四分，十六分一也。五分而乘一，五分一也；乘半，十分一也；乘三分，十五分一也；乘四分，廿分一也；乘五分，廿五分一也。乘分之鯁曰：母乘母為法，<sup>3</sup>子相乘為實。

### 「分乘」

- 7: 分乘 分乘分鯁(術)皆曰：母相乘為法，子相乘為實。

### 解讀

此題的內容亦是關於分數的乘法，然而此題只給術文，未給例子。此題無論是題意或文

<sup>1</sup> 此句郭世榮及蘇意雯等人校為「半寸乘尺」。

<sup>2</sup> 簡文在此句之後尚有一「楊」字，筆者予以省略，以下的「楊」字，亦同。

<sup>3</sup> 彭浩在其重排之中，將此句誤寫為「母相乘為法」。

字皆已十分清楚，毋須校勘。

### 「乘」

- 8：乘 少半乘少半，九分一也」；半步乘半步，四分一」；半步乘少半步，六分一也」；少半乘大半，九分二也」；五分乘五分，廿（二十）
- 9：五分一」；四分乘四分，十六分一」；四乘五分，廿（二十）分一」；五分乘六分，卅（三十）分一也」；七分乘七分，眡（四十）九分一也」；六分乘六分，卅（三十）六分一也」；六
- 10：分乘七，眡（四十）二分一」；七分乘八分，五十六分一也。
- 11：一乘十<sub>二</sub>，（十）也」；十乘萬，十萬也」；千乘萬，千萬。一乘十<sub>二</sub>萬<sub>二</sub>，（十萬）也」；十乘十萬，百萬」。半乘千，五百」。一乘百<sub>二</sub>
- 12：萬<sub>二</sub>」，（百萬）」；十乘百萬，千萬」。半乘萬，五千」；十乘千，萬也」；百乘萬，百萬」；半乘百，五十。

### 解讀

此題的內容亦是關於分數的乘法，其中「少半」一詞，意即 $\frac{1}{3}$ 。不過，此題只給實例，並未給術文。針對此題的內容，彭浩、郭書春與郭世榮皆認為此題之內容應該重排，但三人重排之方式並不相同，在此略去不引。筆者認為此題就算不重排，亦不會影響對題意的了解，因此，以下之校勘乃是按照竹簡上的順序。

乘 少半乘少半，九分一也；半步乘半步，<sup>4</sup>四分一；<sup>5</sup>半步乘少半步，<sup>6</sup>六分一也；少半乘大半，九分二也；五分乘五分，廿五分一；四分乘四分，十六分一；四分乘五分，廿分一；五分乘六分，卅分一也；七分乘七分，眡十九分一也；六分乘六分，卅六分一也；六分乘七分，眡二分一也；七分乘八分，五十六分一也。一乘十，十也；十乘萬，十萬也；千乘萬，千萬。一乘十萬，十萬也；十乘十萬，百萬。半乘千，五百。一乘百萬，百萬；十乘百萬，千萬。半乘萬，五千；十乘千，萬也；百乘萬，百萬；半乘百，五十。

### 「增減分」

- 13：增（增）減分 增分者，增其子」；減分者，增其母。

### 解讀

此題說明若欲增大一個分數之值，則增加該分數之分子；反之則增加該分數之分母。此題與「分乘」一題相同，只給術文，未給例子，而且題意與文字皆已十分清楚，毋須修改或增補。

### 「分當半者」

<sup>4</sup> 彭浩及郭世榮認為此句中的兩個「步」字皆為衍文。

<sup>5</sup> 此句蘇意雯等人校為「四分一也」。

14：分當半者 諸分之當半者，倍其母」；當少半者，三其母」；當四分者，四其母」；當五分者，五其母；當十、百分者，輒十、

15：百其母，如所欲分。

### 解 讀

此題說明若要將一個分數變為原來的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{100}$ ，則分別將分母變為原來的2倍、3倍、4倍、5倍、10倍或100倍。此題之文字毋須修改或增補。

### 「約分」

17：約分 約分術曰：以子除母，(母)亦除子，(子)母數交等者，即約之矣。有(又)

曰，約分術(術)曰：可半，(半)之，可令若干一，(若干一)。

18：以分子除母，少(小)以母除子，(子)母等以為法，子母各如法而成一。

19：不足除者可半，(半)母亦半子。

20：二千一十六分之百六十二，約之百一十二分之九。

### 解 讀

此題文字校勘如下：

約分 約分術曰：以子除母，母亦除子，子、母數交等者，即約之矣。有曰，約分術曰：可半，半之，可令若干一，若干一。其一術曰：以分子除母，少，以母除子，子、母等，以為法，子、母各如法而成一。不足除者，可半，半母亦半子。<sup>7</sup>二千一十六分之百六十二，約之百一十二分之九。<sup>8</sup>

此題說明作分數約分的方法，可大略分為四種方法：

法一：「以子除母，母亦除子，子、母數交等者，即約之矣。」

法二：「可半，半之，可令若干一，若干一。」

法三：「以分子除母，少，以母除子，子、母等，以為法，子、母各如法而成一。」

法四：「不足除者，可半，半母亦半子。」

我們可以看出這四種方法並不一貫，有可能是編者從不同的來源採集而來。法一與法三基本上是一樣的，就是先求出今日所謂的分母與分子的最大公因數，然後，再以所求出之數去約分母與分子，所得之分數即為所求。至於此一方法，則與『輾轉相除法』十分相似，也就是：分母先一再地減去分子，直到分母小於分子後，再反過來用分子一再地減去後來的分母。反覆進行這種步驟，直至子、母二數相等(『交相等』)為止，此一相等之數即為所求。法二則與法四也相似，以今日的術語來說，或許就是：當分母與分子皆為2的倍數時，則分

<sup>6</sup> 彭浩及郭世榮認為此句中的兩個「步」字皆為衍文。

<sup>7</sup> 郭世榮認為「不足除者，可半，半母亦半子」一句為多餘，應刪去。

<sup>8</sup> 此句彭浩錯校為「約之百二十六分之九」。

母與分子就先約去 2。然而，『若干一』與『不足除者』之意義仍有待澄清。

在這四個方法之後，附有一題例題，是將  $\frac{162}{2016}$  約成  $\frac{9}{112}$ ，不過，此例題並未記載約分的過程。

## 「合分」

- 21：合分 合分術曰：母相類，子相從。母不相類，可倍<sub>=</sub>、(倍)，可三<sub>=</sub>、(三)，可四<sub>=</sub>、(四)，可五<sub>=</sub>、(五)，可六<sub>=</sub>、(六)，七亦輒倍<sub>=</sub>、(倍)，及三、四、五之如母<sub>=</sub>，(母)相類
- 22：者，子相從。其不相類者，母相乘為法，子互乘母并以為實<sub>」</sub>，如法成一。今有五分二<sub>」</sub>、六分三、
- 23：十一分八<sub>」</sub>、十二分七<sub>」</sub>、三分二為幾何？曰：二錢六十分錢五十七<sub>」</sub>，其術如右方。五人分七錢、少半<sub>=</sub>、(半)錢，人得一錢卅(三十)
- 24：分錢十七。鮫(術)曰：下三分，以一為六，即因而六人以為法，亦六錢以為實<sub>」</sub>。有(又)曰：母乘母為法，子羨乘母
- 25：為實<sub>=</sub>，(實)如法而一<sub>」</sub>。其一曰：可十<sub>=</sub>、(十)，可九<sub>=</sub>、(九)，可八<sub>=</sub>、(八)，可七<sub>=</sub>、(七)，可六<sub>=</sub>、(六)，可五<sub>=</sub>、(五)，可四<sub>=</sub>、(四)，可三<sub>=</sub>、(三)，可倍<sub>=</sub>、(倍)，母相類止<sub>」</sub>。母相類，子相從。

## 解讀

此題文字之校勘如下：

合分 合分術曰：母相類，子相從；母不相類，可倍、倍，可三、三，可四、四，可五、五，可六、六，子亦輒倍，<sup>9</sup>倍及三、四、五之如母，<sup>10</sup>母相類者，子相從。其不相類者，母相乘為法，子互乘母并以為實，如法成一。今有五分錢二、<sup>11</sup>六分錢三、十分錢八、<sup>12</sup>十二分錢七、<sup>13</sup>三分錢二為幾何？曰：二錢六十分錢五十七，<sup>14</sup>其術如右方。五人分七錢、少半、半錢，人得一錢卅分錢十七。 曰：下有三分，<sup>15</sup>以一為六，即因而六人以為法，<sup>16</sup>亦六錢以為實。<sup>17</sup>有曰：母乘母為法，子羨乘母為實，<sup>18</sup>實如法而一。其一曰：可十、十，可九、九，可八、八，可七、七，可六、六，可五、五，可四、四，可三、三，可倍、倍，母相類止。母相類，子相從。

<sup>9</sup> 「子亦輒倍」原簡文為「七亦輒倍」，彭浩認為原簡文中的「七」字為「子」字之誤，今從彭浩之說。郭書春、郭世榮與蘇意雯等人此處仍依原簡文。

<sup>10</sup> 彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人對「子亦輒倍，倍及三、四、五之如母」此句之斷句有不同的看法。彭浩為「子亦輒倍、倍，及三、四、五之如母」；郭書春為「七亦輒倍。倍、倍，及三、四、五之如母」；郭世榮為「七亦輒倍。倍及三、四、五之如母」；蘇意雯等人為「七亦輒倍、倍及三、四、五之如母」。

<sup>11</sup> 「五分錢二」中的「錢」字，郭書春、郭世榮與蘇意雯等人皆未補，接下來的四個分數亦同。

<sup>12</sup> 「十分錢八」此句，郭世榮與蘇意雯等人校為「十一分八」。

<sup>13</sup> 「十二分錢七」此句，郭世榮與蘇意雯等人校為「十二分七」。

<sup>14</sup> 由於郭世榮與蘇意雯等人對此題的分數較法不同，因此對答案的校法自然不同，筆者在此略去不引。

<sup>15</sup> 「下有三分」一句，蘇意雯等人校為「下三分」。

<sup>16</sup> 彭浩在「人」字後補一「數」字。

<sup>17</sup> 彭浩在「錢」字後補一「數」字。此外，郭書春的校勘之中並無「五人分七錢……，亦六錢以為實。」這段文字，他認為此段文字為錯簡，並將之挪到「徑分」一題之中。

<sup>18</sup> 蘇意雯等人將「羨」字改為「互」字。

按合分，即分數的相加。此題與「約分」一題一樣，皆提供了四種作『合分』的方法：

法一：母相類，子相從；母不相類，可倍、倍，可三、三，可四、四，可五、五，可六、六，子亦輒倍，<sup>19</sup>倍及三、四、五之如母，<sup>20</sup>母相類者，子相從。

法二：其不相類者，母相乘爲法，子互乘母并以爲實，如法成一。

法三：母乘母爲法，子羨乘母爲實，實如法而一。

法四：可十、十，可九、九，可八、八，可七、七，可六、六，可五、五，可四、四，可三、三，可倍、倍，母相類止。母相類，子相從。

同樣地，這四種方法並不一貫，其中法一與法四較爲相似，法二與法三較爲相似，所以亦有可能是此題的編者從不同的地方抄來的。在法二與法三之間有兩個例題，其中值得注意的是第二個例題：「五人分七錢、少半、半錢，人得一錢卅分錢十七。鯨曰：下有三分，以一爲六，即因而六人以爲法，亦六錢以爲實。」這個例題無論是在題目的類型或是解法上，都屬「徑分」的內容，特別是解法，與合分的作法並不一致（徑分的作法見下文），彭浩與郭書春皆認爲此題應併入「徑分」一題才是。

### 「徑分」

26：徑分 徑分以一人命其實，故曰：五人分三有（又）半、少半，各受卅（三十）分之廿（二十）三。其鯨（術）曰：下有少半，以一爲六，以半爲一，以少半爲二，

27：并之爲廿（二十）三，即值（置）一數，因而六之以命其實」。有（又）曰，鯨（術）曰：下有半，因而倍之；下有三分，因而三之；下有四分，因而四之。

### 解讀

此題文字之校勘如下：

徑分 徑分以一人命其實，故曰：<sup>21</sup>五人分三有半、少半，各受卅分之廿三。其鯨曰：下有少半，以一爲六，以半爲三，以少半爲二，并之爲廿三，即值人數，<sup>22</sup>因而六之以命其實。<sup>23</sup>有曰，術曰：下有半，因而倍之；下有三分，因而三之；下有四分，因而四之。

按『徑分』在《九章算術》中作『經分』，意指『分數除法』。此處或指『均分』，即求每個人平均分得的數量。現以其例題「五人分三有半、少半，各受卅分之廿三」，說明『徑分』的作法：

<sup>19</sup> 「子亦輒倍」原簡文爲「七亦輒倍」，彭浩認爲原簡文中的「七」字爲「子」字之誤，今從之。郭書春、郭世榮與蘇意雯等人此處仍依原簡文。

<sup>20</sup> 彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人對「子亦輒倍，倍及三、四、五之如母」此句之斷句有不同的看法。彭浩爲「子亦輒倍、倍，及三、四、五之如母」；郭書春爲「七亦輒倍。倍、倍，及三、四、五之如母」；郭世榮爲「七亦輒倍。倍及三、四、五之如母」；蘇意雯等人爲「七亦輒倍、倍及三、四、五之如母」。

<sup>21</sup> 「故曰：」郭書春校爲「故名。」

<sup>22</sup> 「即值人數」原簡文爲「即值一數」，郭書春認爲「一」字應改爲「人」字，今從之。彭浩、郭世榮與蘇意雯等人此處仍依原簡文。

<sup>23</sup> 郭書春在此句之後補上「合分」一題中的「五人分七錢少半、半錢，人得一錢卅分錢十七。 曰：下三分，以一爲六，即因而六人以爲法，亦六錢以爲實。」

竹簡上的文字	現在的符號
五人分三有半、少半	$(3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \div 5$
下有少半，以一爲六，以半爲三，以少半爲二	$1 \rightarrow 6 (3 \rightarrow 18), \frac{1}{2} \rightarrow 3, \frac{1}{3} \rightarrow 2$
并之爲廿三	$18 + 3 + 2 = 23$
即值人數，因而六之	$5 \times 6 = 30$
以命其實	$23 \div 30 = \frac{23}{30}$

### 「狐出關」

- 34：狐出關 狐、狸、犬出關，租百一十一錢。犬謂狸、(狸)謂狐：而(爾)皮倍我，出租當倍螻(哉)。問出各幾何。得曰：犬出十五錢七分六，
- 35：狸出卅(三十)一錢分五，狐出六十三錢分三。鮫(術)曰：令各相倍也，并之七爲法，以租各乘之爲實，(實)如法得一。

#### 解讀

此題文字之校勘如下：

狐出關 狐、狸、犬出關，租百一十一錢。犬謂狸、狸謂狐：而皮倍我，出租當倍哉。<sup>24</sup>問出各幾何。<sup>25</sup>得曰：犬出十五錢七分六，狸出卅一錢分五，狐出六十三錢分三。<sup>26</sup>鮫曰：令各相倍也，并之七爲法，以租各乘之爲實，實如法得一。

此題題意爲：狐、狸、犬出關的稅金共 111 錢，其中狐的稅金是狸的 2 倍，狸的稅金是犬的 2 倍，求狐、狸、犬的稅金各爲多少。其作法就是以犬爲 1，狸爲 2，狐爲 4，和爲 7，則犬之稅金爲  $111 \times 1 \div 7 = 15\frac{6}{7}$ ，狸之稅金爲  $111 \times 2 \div 7 = 31\frac{5}{7}$ ，狐之稅金爲  $111 \times 4 \div 7 = 63\frac{3}{7}$ 。

### 「粟求米」

- 113：粟求米 粟求米因而三之，五而成一。•今有粟一升七分三，當爲米幾何」？曰：爲米七分升六。術曰：母相乘爲法，以三
- 114：乘十爲實。

#### 解讀

此題文字之校勘如下：

<sup>24</sup> 此句郭書春校爲「出租當倍我」。

<sup>25</sup> 彭浩認爲此句中的「出各」應改爲「各出」。

<sup>26</sup> 「十五錢七分六」、「卅一錢分五」、「六十三錢分三」彭浩與郭世榮依序校爲「十五錢七分錢六」、「卅一錢七分錢五」、「六十三錢七分錢三」；蘇意雯等人依序校爲「十五錢七分六」、「卅一錢七分五」、「六十三錢七分三」。

粟求米 粟求米因而三之，五而成一。今有粟一升七分三，<sup>27</sup>當為米幾何？曰：為米七分升六。術曰：母相乘為法，以三乘十為實。

「粟求米因而三之，五而成一」指的是粟與米的換算關係，即米的升數 = 粟的升數  $\times \frac{3}{5}$ 。

今有粟一升七分三，則可換得米  $\frac{10}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{10 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{7}$  (升)。

### 「米求粟」

115：米求粟 以米求粟因而五之，三成一。今有米七臍升六，當為粟幾何？曰：為粟一升七分升三。術曰：母相

116：乘為法，以五□□□。

### 解讀

此題恰為上一題「粟求米」的逆問題，在此不作說明，只列出文字之校勘：

米求粟 以米求粟因而五之，三而成一。今有米七臍(分)升六，<sup>28</sup>當為粟幾何？曰：為粟一升七分升三。術曰：母相乘為法，以五乘六為實。

### 「分錢」

133：分錢 分錢人二而多三，人三而少二。問幾何人、錢幾何。得曰：五人，錢十三。贏(盈)、不足互乘母為實，子相從為法。皆贏(盈)若

114：不足，子互乘母而各異直(置)之，以子少者除子多者，餘為法，以不足為實。

### 解讀

此題文字之校勘如下：

分錢 分錢人二而多三，人三而少二。問幾何人、錢幾何？得曰：五人，錢十三。贏、不足互乘母，并以為實，<sup>29</sup>子相從為法。<sup>30</sup>皆贏若不足，子互乘母而各異直之，以少減多，餘為實；以子少者除子多者，餘為法。<sup>31</sup>

此題題意為：現有人數及錢數各若干，若每人分得二錢，那麼還剩下三錢未分；若每人分得三錢，則原錢數不足二錢，求原來的人數與錢數。此題為典型的贏不足術問題，其解法「贏、不足互乘母，并以為實，子相從為法」之意為：

<sup>27</sup> 彭浩與郭世榮皆認為「分」字後脫一「升」字。

<sup>28</sup> 郭書春將「臍」字改為「分」。

<sup>29</sup> 「贏、不足互乘母，并以為實」一句，郭書春與郭世榮校為「贏、不足互乘母，并之為實」；蘇意雯等人校為「贏、不足互乘母為實」。

<sup>30</sup> 按前術文只能算出各人所分錢數，並不能求出總人數與總錢數，因此彭浩與郭書春皆認為在「子相從為法」後有脫文，郭書春認為似脫「母以少減多，餘，以約法、實，法為人，實為錢」。

<sup>31</sup> 原簡文：「皆贏若不足……以不足為實。」此段並不合算理，今依彭浩之校勘改之。郭書春、郭世榮與蘇意

贏母：每人分得 2 錢，贏子：多 3 錢，不足母：每人分得 3 錢，不足子：少 2 錢

$$\text{則每人分得的錢數} = \frac{\text{贏子} \times \text{不足母} + \text{不足子} \times \text{贏母}}{\text{贏子} + \text{不足子}} = \frac{3 \times 3 + 2 \times 2}{3 + 2} = \frac{13}{5} \text{ (錢)}。$$

依原簡文的敘述，只能求得每人分得的錢數，未能求出原人數與原錢數，可見在「子相從爲法」之後應有脫文。今將其完整解法補充於下：

$$\text{原人數} = \frac{\text{贏子} + \text{不足子}}{\text{贏母與不足母相減}} = 5 \text{ (人)}, \text{原錢數} = \frac{\text{贏子} \times \text{不足母} + \text{不足子} \times \text{贏母}}{\text{贏母與不足母相減}} = 13 \text{ (錢)}$$

上述即『贏不足術』中的一贏一不足的情形，至於「分錢」一題的最後一段「皆贏若不足，子互乘母而各異直之，以少減多，餘爲實；以子少者除子多者，餘爲法。」則是敘述贏不足術中的兩贏或兩不足的解法，筆者留給讀者自行解讀。

### 「除」

141：除 羨除，其定（頂）方丈，高丈二尺，其除廣丈、袤三丈九尺，其一旁毋高，積三千三百六十尺。鯁（術）曰：廣積卅（三十）尺除高，以其

142：廣、袤乘之即定。

### 解讀

此題彭浩、郭書春與郭世榮的校勘，出入頗大，筆者將在附錄一作詳細的說明。

### 「鄆都」

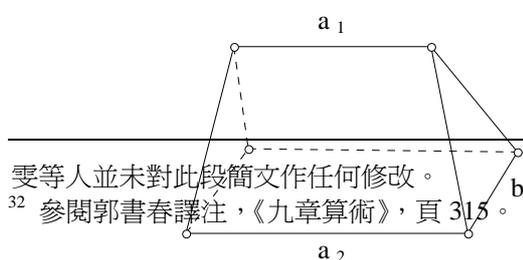
143：鄆都 鄆都下厚四尺，上厚二尺，高五尺，袤二丈，責（積）百卅（三十）三尺少半尺，鯁（術）曰：倍上厚，以下厚增之，以高及袤乘之，六成一。

### 解讀

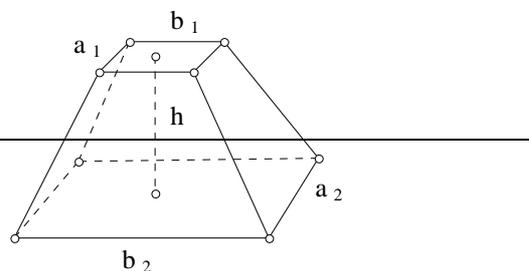
此題文字之校勘如下：

鄆都 鄆都下厚四尺，上厚二尺，高五尺，袤二丈，積百卅三尺少半尺。鯁曰：倍上厚，以下厚增之，以高及袤乘之，六成一。

此題即求鄆都的體積。鄆都即《九章算術》中的芻蕘。芻，草也；蕘，屋脊也；芻蕘本義即爲屋脊形的草垛，<sup>32</sup>形狀見圖一。設芻蕘的底面爲一矩形，其中上厚爲 $a_1$ ，下厚爲 $a_2$ ，高爲 $h$ ，袤爲 $b$ ，則其體積爲  $(2a_1 + a_2) \times h \times b \div 6$ 。



圖一 鄆都



圖二 芻童

雯等人並未對此段簡文作任何修改。  
<sup>32</sup> 參閱郭書春譯注，《九章算術》，頁 315。

## 「芻」

144：芻 芻童及方闕下廣丈五尺、袤三丈，上廣二丈、袤四丈，高丈五尺，積九千二百五十尺。鯨（術）曰：上廣袤、下廣袤各自乘，又上

145：袤從下袤以乘上廣，下袤從上袤以乘下廣，皆并，乘之，六成一。

### 解讀

此題文字之校勘如下：

芻 芻童及方闕下廣丈五尺、袤三丈，上廣二丈、袤四丈，高丈五尺，積九千二百五十尺。<sup>33</sup>鯨曰：上廣袤、下廣袤各自乘，又上袤從下袤以乘上廣，下袤從上袤以乘下廣，皆并，以高乘之，<sup>34</sup>六成一。

此題即求芻童的體積。芻童為上、下底皆為矩形的長方臺體草垛，<sup>35</sup>形狀見圖二。設芻童上廣為 $a_1$ ，上袤為 $b_1$ ，下廣為 $a_2$ ，下袤為 $b_2$ ，高為 $h$ ，則其體積為

$$[a_1 b_1 + a_2 b_2 + (b_1 + b_2) a_1 + (b_2 + b_1) a_2] \times h \div 6。$$

## 「旋粟」

146：旋粟 旋粟高五尺，下周三丈，積百廿（二十）五尺。• 二尺七寸而一石，為粟畎（四十）六石廿（二十）七分石之八。其術（術）曰：下周自乘，以高

147：乘之，卅（三十）六成一。• 大積四千五百尺

### 解讀

此題文字之校勘如下：

旋粟 旋粟高五尺，下周三丈，積百廿五尺。二尺七寸而一石，為粟畎六石廿七分石之八。其術曰：下周自乘，以高乘之，卅六成一。大積四千五百尺

『旋粟』指的是粟米（旋轉傾注地面）堆積而狀如直圓錐形，此題即求直圓錐之體積。設圓錐底圓周長為 $s$ ，高為 $h$ ，則其體積為  $s \times s \times h \div 36$ 。本題之體積即為  $30 \times 30 \times 5 \div 36 = 125$ （立方尺），而體積二尺七寸（意指 2.7 立方尺）之粟米，其重為一石，因此 125 立方尺之粟米，共重

<sup>33</sup> 彭浩將「積九千二百五十尺」誤校為「九千八百尺」。

<sup>34</sup> 「以高乘之」一句，彭浩校為「乘高」。

<sup>35</sup> 參閱彭浩，《張家山漢簡《算數書》註釋》，頁 104。

$$125 \div 2.7 = 46 \frac{8}{27} \text{ (石)}。$$

至於最後一句，「大積四千五百尺」，蘇意雯等人認為可能是錯簡，彭浩則認「大積」指的是長方體的體積，其中該長方體之底面為邊長是圓錐底圓周長的正方形，長方體之高則與圓錐之高相等。<sup>36</sup>

### 「困蓋」

148： 困蓋 困蓋下周六丈，高二丈，為積尺二千尺。乘之=（之）述（術）曰：直（置）如其周令相乘也，有（又）以高乘之，卅（三十）六成一。

#### 解讀

此題文字之校勘如下：

困蓋 困蓋下周六丈，高二丈，為積尺二千尺。乘之之鮫曰：<sup>37</sup>直如其周令相乘也，有以高乘之，卅六成一。

困蓋即圓柱形糧倉之蓋，依簡文之算法可知為圓錐形，因此其算法同「旋粟」一題。

### 「貉亭」

149： 貉（圜）亭 圜亭上周三丈，大周四丈，高二丈，積二千五十五尺卅（三十）六分尺廿（二十）。術曰：下周乘上周=，（周）自乘，皆并，以高

150： 乘之，卅（三十）六成。今二千五十五尺分廿（二十）。

#### 解讀

此題文字之校勘如下：

貉亭<sup>38</sup> 圜亭上周三丈，下周四丈，<sup>39</sup>高二丈，積二千五十五尺卅六分尺廿。術曰：下周乘上周，周自乘，皆并，以高乘之，卅六成一。<sup>40</sup>今二千五十五尺分廿。

圜亭即為上、下底均為圓形之圓臺，此題即求圜亭之體積。設圜亭上底周長為 $s_1$ ，下底為 $s_2$ ，高為 $h$ ，則其體積為 $(s_1 \times s_2 + s_1^2 + s_2^2) \times h \div 36$ 。本題之體積即為

$$(30 \times 40 + 30^2 + 40^2) \times 20 \div 36 = 2055 \frac{20}{36} \text{ (立方尺)}。$$

至於最後一句「今二千五十五尺分廿」，各家見解並不相同。彭浩認為應改為「今二千五十五三十六分尺廿」，即表示本題之答案；郭書春則認為「似係本條上一問題的逆問題的殘文」；郭世榮則認為此句應與前句「卅六成」合為一句，並改為「卅六成今二千五十五卅六分尺廿」，

<sup>36</sup> 參閱同上，頁 106~107。

<sup>37</sup> 郭書春認為此句中之「乘之之」為衍文，應刪去。

<sup>38</sup> 郭書春認為應將「貉」字改為「圜」，郭世榮亦改之。

<sup>39</sup> 此句中之「下周」，郭書春、郭世榮與蘇意雯等人皆校為「大周」，今依彭浩之校改之。

<sup>40</sup> 此句原簡文為「卅六成」，彭浩、郭書春與蘇意雯等人皆認為「成」字後脫「一」字，然郭世榮持不同之見解，他認為「卅六成」與下一句之間不應斷句，詳見下文。

意思為「用卅六除得現在的二千五十五卅六分尺廿」；蘇意雯等人則認為此句可能是錯簡。

### 「井材」

151：井材 圓材井竅若它物，周二丈四尺，深丈五尺，積七百廿（二十）尺。術曰：藉（藉）周自乘，以深乘之，十二成一。一曰以

152：□乘徑，四成一。•一百半問（？）徑□□

#### 解讀

此題文字之校勘如下：

井材 圓材井竅若它物，周二丈四尺，深丈五尺，積七百廿尺。術曰：藉周自乘，以深乘之，十二成一。一曰以周乘徑，<sup>41</sup>以深乘之，<sup>42</sup>四成一。一百半問（？）徑□□<sup>43</sup>

此題給出兩個求圓柱體體積的公式。設圓柱體底面周長為s，底面圓徑為d，深為h，則其體積為  $s^2 \times h \div 12$  或  $s \times d \times h \div 4$ 。本題之體積即為  $24^2 \times 15 \div 12 = 720$ （立方尺）或  $24 \times (24 \div 3) \times 15 \div 4 = 720$ （立方尺）。

### 「以辨材方」

153：以辨（圓）材（裁）方 以圓材為方材，曰：大四韋（圍）二寸廿（二十）五分寸十四，為方材幾何？曰：方七寸五分寸三。術曰：因而五之為實，令七而一四。

#### 解讀

此題彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人的校勘，出入頗大，筆者將在附錄二作詳細的說明。

### 「以方材辨」

154：以方材（裁）辨（圓） 以方為圓，曰：材方七寸五分寸三，為圓材幾何？曰：四韋（圍）二寸廿（二十）五分十四。•術曰：方材之一面即

155：圓材之徑也，因而四之以為實，令五而成一。

#### 解讀

此題彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人的校勘，出入頗大，筆者將在附錄二作詳細的說明。

### 「少廣」

164：少廣 救（求）少廣之術曰：先直（置）廣，即曰：下有若干步，以一為若干，以半

<sup>41</sup> 此句原簡文中空一字，彭浩與郭書春皆補「周」字，郭世榮補「冪」字，蘇意雯等認為有可能是脫「周、深」二字。

<sup>42</sup> 「以深乘之」此句，彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人皆未補之，今依算理補之。

<sup>43</sup> 「一百半問（？）徑□□」一句，郭書春校為「積一百半，問徑幾何？」。

爲若干」，以三分爲若干，積分以盡所救（求）分同

- 165：之，以爲法，即藉（藉）直（置）田二百畝（四十）步，亦以一爲若干，以爲積步，除積步，如法得從（縱）一步。不盈步者，以法命其分」。有（又）曰：復
- 166：之，即以廣乘從（縱），令復爲二百畝（四十）步田一畝。其從（縱）有不分者，直（置）如法增（增）不分，復乘之以爲小十。<sup>44</sup>
- 167：少廣<sub>二</sub>：（廣）一步、半步，以一爲二<sub>二</sub>，半爲一，同之三，以爲法。即直（置）二百畝（四十）步，亦以一爲二，除，如法得從（縱）一步。」爲從（縱）百六十步。因以一步、半步乘。
- 168：下有三分，以一爲六，半爲三<sub>二</sub>，（三）分爲二，同之十一。得從（縱）百卅（三十）步有（又）十一分步之十，乘之田一畝。
- 169：下有四分，以一爲十二，半爲六，三分爲四<sub>二</sub>，（四）分爲三，同之廿（二十）五。得從（縱）百一十五步有（又）廿（二十）五分步之五，乘之田一畝。
- 170：下有五分，以一爲六十<sub>二</sub>，半爲卅（三十）<sub>二</sub>，三分爲廿（二十）<sub>二</sub>，四分爲十五<sub>二</sub>，（五）分爲十二，同之百卅（三十）七。得從（縱）百五步有（又）百卅（三十）七分步之十五，乘之田一畝。
- 171：下有六分，以一爲六十<sub>二</sub>，半爲卅（三十）<sub>二</sub>，三分爲廿（二十）<sub>二</sub>，四分爲十五<sub>二</sub>，（五）分爲十二<sub>二</sub>，六分爲十，同之百畝（四十）七。得從（縱）九十七步有（又）百畝（四十）七分。
- 172：下有七分，以一爲四百廿（二十），半爲二百一十<sub>二</sub>，三分爲百畝（四十），四分爲百五<sub>二</sub>，（五）分爲八十四<sub>二</sub>，六分爲祆（七十），七分爲六十，同之千八十九。得從（縱）九十二
- 173：步五百畝（四十）一。乘之田一畝。
- 174：下有八分，以一爲八百畝（四十），半爲四百廿（二十），三分爲二百八十<sub>二</sub>，四分爲二百一十<sub>二</sub>，五分爲百六十八<sub>二</sub>，六分爲百畝（四十）<sub>二</sub>，七分爲百廿（二十）<sub>二</sub>，八分爲百五，同之于
- 175：二百□十三，以爲法。得從（縱）八十八步有（又）二千二百八十三分步之六百九十六，乘之田一畝。
- 176：下有九分，以一爲二千五百廿（二十）<sub>二</sub>，半爲千二百六十<sub>二</sub>，三分爲八百卅（三十）<sub>二</sub>，四分爲六百卅（三十）<sub>二</sub>，五分爲五百四<sub>二</sub>，六分爲四百廿（二十）<sub>二</sub>，七分爲三百六十<sub>二</sub>，八分爲三百一十五，
- 177：<sub>二</sub>九分爲二百八十，同之七千一百廿（二十）九，以爲法。得從（縱）八十四步有（又）七千一百廿（二十）九分步之
- 178：五千七百六十四，乘之成田一畝。
- 179：下有十分，以一爲二千五百廿（二十）<sub>二</sub>，半爲千二百六十<sub>二</sub>，三分爲八百畝（四十）<sub>二</sub>，四分爲六百卅（三十）<sub>二</sub>，五分爲五百四<sub>二</sub>，六分爲四百廿（二十）<sub>二</sub>，七分爲三百六十<sub>二</sub>，八分
- 180：爲三百一十五<sub>二</sub>，九分爲二百八十<sub>二</sub>，十分爲二百五十二，同之七千三百八十一，以爲法。得從（縱）八十一步有（又）七千三百八十一分步

<sup>44</sup> 在〈江陵張家山漢簡《算數書》釋文〉中，此句之後尚有「有分步者，以廣乘分子，如廣步數得一步。」依文意看來，應補上這幾句才完整。

181： 之六千八百□□□，乘之成田一畝。

182： 步有〔(又)〕千八十九分步之六百一十二，乘之 田一畝。

### 解 讀

由於此題篇幅甚長，為方便閱讀起見，筆者將分兩個部分作解讀。第一個部分是竹簡編號 164~166 的內容，此段內容主要是敘述少廣術；第二個部分是竹簡編號 167~182 的內容，此段內容則全為少廣術的應用實例。首先是第一個部分的文字校勘與解說：

少廣 求少廣之術曰：先直廣，即曰：下有若干步，以一為若干，以半為若干，以三分為若干，積分以盡所求分同之，以為法。即藉直田二百畝步，亦以一為若干，以為積步，除積步，如法得從一步。不盈步者，以法命其分。有曰：復之，即以廣乘從，令復為二百步田一畝。其從有不分者，直如法增不分，復乘之以為小十；有分步者，以廣乘分子，如廣步數，得一步。

『少廣術』是已知長方形田地的廣（寬）及面積，求其從（長），特別的是，此題中的面積皆固定為一畝（即二百四十步）。此段文字分成兩個部分，前段「先直廣，……不盈步者，以法命其分。」主要在說明如何求得從的步數，其作法筆者將透過稍後的實例一併說明。後半段文字「有曰：復之，……如廣步數，得一步。」則可視為作驗算的方法，也就是將所求得之從，乘以題目所給之廣，確定是否恰為二百四十步。不過此段文字可能在抄寫上有所舛誤，加上在稍後的實例中，簡文皆以「乘之田一畝」或「乘之成田一畝」一語帶過，因此，筆者尚無法完全解讀此段文字內容。

其次，是本題第二個部分的文字校勘與解讀。筆者特將其分段，希望能幫助讀者迅速地掌握整段文字的結構。

少廣：廣一步、半步，<sup>45</sup>以一為二，半為一，同之三以為法，即值二百畝步，亦以一為二，<sup>46</sup>除，如法得從一步，為從百六十步。因以一步、半步乘。<sup>47</sup>

下有三分，<sup>48</sup>以一為六，半為三，三分為二，<sup>49</sup>同之十一，<sup>50</sup>得從百卅步有十一分步之十，<sup>51</sup>乘之田一畝。

下有四分，<sup>52</sup>以一為十二，半為六，三分為四，<sup>53</sup>四分為三，<sup>54</sup>同之廿五，<sup>55</sup>得從百一十五

<sup>45</sup> 彭浩在此句之後補「求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>46</sup> 彭浩在此句之後補「乘之為實」。

<sup>47</sup> 彭浩在「乘」字之後補「之田一畝」。

<sup>48</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>49</sup> 彭浩在「三分」之後補「一」字。

<sup>50</sup> 彭浩在此句之後補「為法。置田二百四十步，亦以一為六乘之為實，除，如法」。

<sup>51</sup> 彭浩在此句之後補「因以一步、半步、三分步一」。

<sup>52</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>53</sup> 彭浩在「三分」之後補「一」字。

<sup>54</sup> 彭浩在「四分」之後補「一」字。

<sup>55</sup> 彭浩在此句之後補「為法。置田二百四十步，亦以一為十二乘之為實，除，如法」。蘇意雯等人在「同之」之後多一「得」字。

步有廿五分步之五，<sup>56</sup>乘之田一畝。

下有五分，<sup>57</sup>以一為六十，半為卅，三分為廿，四分為十五，五分為十二，<sup>58</sup>同之百卅七，<sup>59</sup>得從百五步有百卅七分步之十五，<sup>60</sup>乘之田一畝。

下有六分，<sup>61</sup>以一為六十，半為卅，三分為廿，四分為十五，五分為十二，六分為十，<sup>62</sup>同之百畝七，<sup>63</sup>得從九十七步有百畝七分步之百畝一，<sup>64</sup>乘之田一畝。<sup>65</sup>

下有七分，<sup>66</sup>以一為四百廿，半為二百一十，三分為百畝，四分為百五，五分為八十四，六分為祆（七十），七分為臠（六十），<sup>67</sup>同之千八十九。<sup>68</sup>得從九十二步有千八十九分步之六百一十二，乘之田一畝。<sup>69</sup>

下有八分，<sup>70</sup>以一為八百畝，半為四百廿，三分為二百八十，四分為二百一十，五分為百六十八，六分為百畝，七分為百廿，八分為百五，<sup>71</sup>同之二千二百八十三以為法，<sup>72</sup>得從八十八步有二千二百八十三分步之六百九十六，<sup>73</sup>乘之田一畝。

下有九分，<sup>74</sup>以一為二千五百廿，半為千二百六十，三分為八百畝，四分為六百卅，五分為五百四，六分為四百廿，七分為三百六十，八分為三百一十五，九分為二百八十，<sup>75</sup>同之七千一百廿九以為法，<sup>76</sup>得從八十四步有七千一百廿九分步之五千九百六十四，<sup>77</sup>乘之成田一畝。

<sup>56</sup> 彭浩在此句之後補「因以一步、半步、三分步一、四分步一」。

<sup>57</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>58</sup> 彭浩在「三分為廿，四分為十五，五分為十二」中的每個「分」之後，各補一「一」字。

<sup>59</sup> 彭浩在此句之後補「為法。置田二百四十步，亦以一為六十乘之為實，除，如法」。

<sup>60</sup> 彭浩在此句之後補「因以一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一」。

<sup>61</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>62</sup> 彭浩在「三分為廿，四分為十五，五分為十二，六分為十」中的每個「分」之後，各補一「一」字。

<sup>63</sup> 彭浩在此句之後補「為法。置田二百四十步，亦以一為六十乘之為實，除，如法」。

<sup>64</sup> 郭世榮將「之」字校為「一」字。

<sup>65</sup> 「得從九十二步有千八十九分步之六百一十二，乘之田一畝。」彭浩校為「得從九十二步一百二十一分步之六十八。因以一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一乘之田一畝。」

<sup>66</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>67</sup> 彭浩在「三分為百畝，四分為百五，五分為八十四，六分為祆（七十），七分為臠（六十）」中的每個「分」之後，各補一「一」字。

<sup>68</sup> 彭浩在此句之後補「為法。置田二百四十步，亦以一為四百二十乘之為實，除，如法」。

<sup>69</sup> 「得從九十七步有百四十七分步之百四十一，乘之田一畝。」彭浩校為「得從九十七步有百四十七分步之百四十一。因以一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一乘之田一畝。」

<sup>70</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一、八分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>71</sup> 彭浩在「三分為二百八十，四分為二百一十，五分為百六十八，六分為百，七分為百廿，八分為百五」中的每個「分」之後，各補一「一」字。

<sup>72</sup> 蘇意雯等人之校勘，在「同之」二字後有一「于」字。彭浩在此句之後補「置田二百四十步，亦以一為八百四十乘之為實，除，如法」。

<sup>73</sup> 彭浩在此句之後補「因以一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一、八分步一」。蘇意雯等人在「二百八十三」後少一「分」字。

<sup>74</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一、八分步一、九分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>75</sup> 彭浩在「三分為八百，四分為六百卅，五分為五百四，六分為四百廿，七分為三百六十，八分為三百一十五，九分為二百八十」中的每個「分」之後，各補一「一」字。

<sup>76</sup> 彭浩在此句之後補「置田二百四十步，亦以一為二千五百二十乘之為實，除，如法」。

<sup>77</sup> 彭浩在此句之後補「因以一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一、八分步一、九分步一」。

下有十分，<sup>78</sup>以一為二千五百廿，半為千二百六十，三分為八百廿，四分為六百卅，五分為五百四，六分為四百廿，七分為三百六十，八分為三百一十五，九分為二百八十，十分為二百五十二，<sup>79</sup>同之七千三百八十一以為法，<sup>80</sup>得從八十一步有七千三百八十一分步之六千九百三十九，<sup>81</sup>乘之成田一畝。<sup>82</sup>

此段文字由九個例題所組成，內容是：在田地面積固定為一畝（即 240 平方步）的情形之下，當廣（寬）從  $1 + \frac{1}{2}$  步、 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  步、 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  步，逐漸增加到  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}$  步時，其所對應的從（長）各為多少？現以「下有三分，以一為六，半為三，三分為二，同之十一，得從百卅步有十一分步之十，乘之田一畝。」為例，說明『少廣術』的作法。

竹簡上的文字	現在的符號
下有三分	廣為 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 步
以一為六，半為三，三分為二	$1 \rightarrow 6, \frac{1}{2} \rightarrow 3, \frac{1}{3} \rightarrow 2$
同之十一	$6 + 3 + 2 = 11$
得從百卅步有十一分步之十	得從為 $240 \div 11 = 130 \frac{10}{11}$ (步)
乘之田一畝	$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \times 130 \frac{10}{11} = 240$ (平方步)

由上可看出『少廣術』作法中的「以一為六，半為三，三分為二」，類似今日的通分過程，只不過『少廣術』中並非以分數的形式來呈現。值得注意的是，在這九個例題中的「以一為 n」，每一個例題中 n 恰好皆是該題所有分母的最小公倍數，由此可知「少廣」這一題的作者在編寫此題時，是有意識地使用到最小公倍數這個概念。不過，從「少廣」一題或是整個【算數書】中，我們仍無從得知當時是如何求得最小公倍數的。

### 「方田」

- 185：方田 田一畝方幾何步」？曰：方十五步卅（三十）一分步十五。鯨（術）曰：方十五步不足十五步，方十六步有徐（餘）十六步。曰：并贏（盈）、不足以為法」，不足
- 186：子乘贏（盈）母，贏（盈）子乘不足母，并以為實。復之，如啓廣之鯨（術）。

<sup>78</sup> 彭浩在此句之前補「廣一步、半步、三分步一、四分步一、五分步一、六分步一、七分步一、八分步一、九分步一、十分步一。求田一畝，問縱幾何。術曰」。

<sup>79</sup> 彭浩在「三分為八百，四分為六百卅，五分為五百四，六分為四百廿，七分為三百六十，八分為三百一十五，九分為二百八十，十分為二百五十二」中的每個「分」之後，各補一「一」字。

<sup>80</sup> 彭浩在此句之後補「置田二百四十步，亦以一為二千五百二十乘之為實，除，如法」。

<sup>81</sup> 「三十九」郭書春校為「卅九」。

<sup>82</sup> 彭浩之校勘，在此句之後尚有「步有千八十九分步之六百一十二，乘之 田一畝。」

**解 讀**

本題文字之校勘如下：

方田 田一畝，方幾何步？曰：方十五步卅一分步十五。術曰：方十五步不足十五步，方十六步有餘十六步。曰：并贏、不足以為法，不足子乘贏母，贏子乘不足母，并以為實。復之，如啟廣之術。

本題在求面積為一畝的正方形田地之邊長。當正方形邊長為 15 步時，其面積比一畝（240 步）少 15 平方步；當正方形邊長為 16 步時，其面積比一畝多 16 平方步，因此，由『贏不足術』可得：

不足母：邊長 15 步      不足子：少 15 平方步  
贏 母：邊長 16 步      贏 子：多 16 平方步

則正方形的邊長 =  $\frac{\text{不足子} \times \text{贏母} + \text{贏子} \times \text{不足母}}{\text{贏子} + \text{不足子}} = \frac{15 \times 16 + 16 \times 15}{16 + 15} = 15 \frac{15}{31}$  (步)。

面積為 240 平方步的正方形，其邊長應是  $\sqrt{240}$  步，依『贏不足術』所求得之  $15 \frac{15}{31}$  步，則是

$\sqrt{240}$  步的近似值。至於「方田」簡文的倒數第二句，「復之」，意指將所求得的邊長  $15 \frac{15}{31}$  步自乘，求其面積。而簡文的最後一句「如啟廣之術」則似有舛誤。

**附錄一：「除」一題的校勘與解讀**

「除」

141：除 羨除，其定（頂）方丈，高丈二尺，其除廣丈、袤三丈九尺，其一旁毋高，積三千三百六十尺。鯁（術）曰：廣積卅（三十）尺除高，以其

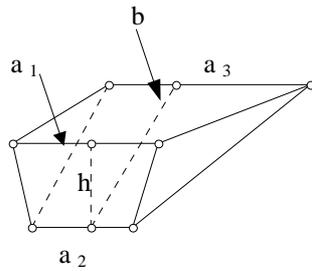
142：廣、袤乘之即定。

**解 讀**

此題的內容是求「除」的體積，不過，彭浩、郭書春與郭世榮之校勘與解讀，差異頗大，現一一引述他們的校勘，並作說明。至於蘇意雯等人雖有提出他們對此題的猜測，但以部份簡文無法解讀為由，並未對此題進行校勘。

首先，是彭浩的校勘：

除 羨除，其定（頂）方丈，高丈二尺，其除廣丈、袤三丈九尺，其一旁毋高，積二千三百四十尺。鯁曰：廣積三十尺乘高，以其袤乘之，六而一即定。



圖三  
羨除

彭浩認為「除」指的是羨除（形狀如圖三），設羨除的上廣為 $a_1$ ，下廣為 $a_2$ ，末廣為 $a_3$ ，袤為 $b$ ，高為 $h$ ，則羨除的體積為： $(a_1 + a_2 + a_3) \times h \times b \div 6$ ，因此，彭浩將「其定方丈」解讀為上廣與下廣皆為一丈，「除廣丈」解讀為末廣為一丈，所以，此題的體積即為

$$(10 + 10 + 10) \times 12 \times 39 \div 6 = 2340 \text{ (立方尺)}。$$

其次，是郭世榮的校勘。郭世榮給了兩個校勘版本，斜體字的部分即為這兩個版本的相異之處：

除 羨除，其定方丈，高丈二尺，其除廣丈、*袤三丈九尺*，其一旁母高，*積二千三百四十尺*。鮫曰：廣積三十尺，以其高、*袤乘之*，六而一，即定。

除 羨除，其定方丈，高丈二尺，其除廣丈、*袤五丈六尺*，其一旁母高，*積三千三百六十尺*。鮫曰：廣積三十尺，以其高、*袤乘之*，六而一，即定。

郭世榮亦認為「除」指的是羨除，因此其解讀方式與彭浩相同，筆者在此略去不述。

第三，是郭書春的校勘：

除 羨除，其定二丈，高丈二尺，其除廣丈、*袤三丈九尺*，其一旁母高，*積三千一百廿尺*。鮫曰：廣積三尺，以除高、*袤乘之*，六成一，即定。

基本上郭書春與彭浩、郭世榮的看法相同，亦認為「除」指的是羨除，不同之處，在於郭書春認為羨除之上廣為二丈，並非一丈，所以，他所求得的羨除體積也就與彭浩、郭世榮不同。

## 附錄二：「以(𠄎)材方」與「以方材(𠄎)」二題的校勘與解讀

### 「以𠄎材方」

153：以𠄎（圓）材（裁）方 以圓材為方材，曰：大四韋（圍）二寸廿（二十）五分寸十四，為方材幾何？曰：方七寸五分寸三。術曰：因而五之為實，令七而一四。

### 「以方材𠄎」

154：以方材（裁）𠄎（圓） 以方為圓，曰：材方七寸五分寸三，為圓材幾何？曰：四韋（圍）二寸廿（二十）五分十四。•術曰：方材之一面即

155：圓材之徑也，因而四之以為實，令五而成一。

## 解 讀

由於這兩題的簡文有不少脫文及舛錯，因此造成了彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人在校勘和解讀上的嚴重分歧，其中最為關鍵的地方，就是他們對這兩題簡文中的「大四韋二寸廿五分寸十四」與「四韋二寸廿五分寸十四」的解釋，筆者在下文中將一一引述他們的校勘，並加以說明。

首先是彭浩的校勘：

以𠄎（圓）材方 以圓材爲方材，曰：大四韋二寸二十五分寸十四，爲方材幾何？曰：方十寸一百五分寸十四。術曰：因而五之爲實，令七而一，三爲法。

以方材𠄎（圓） 以方爲圓，曰：材方七寸五分寸三，爲圓材幾何？曰：四韋三寸二十五分寸八。術曰：方材之一面即圓材之徑也，徑自相乘，因而三之以爲實，令四而成一。

彭浩認爲「𠄎（圓）材方」一題中的「大四韋二寸廿五分寸十四」，指的是圓周長，其中 1 韋 = 10 寸，因此，他將「以𠄎（圓）材方」一題解讀爲：已知圓周長爲  $42\frac{14}{25}$  寸，求其內接正方形之邊長。所以，此題之解法爲  $42\frac{14}{25} \times 5 \div 7 \div 3 = 10\frac{14}{105}$ （寸），其中的 5、7 來自正方形的邊長與對角線比爲 5 比 7，而 3 則是代表圓周率。至於「以方材𠄎」一題，彭浩則認爲「四韋二寸廿五分寸八」指的是圓面積爲  $42\frac{8}{25}$  平方寸，因此他將「以方材𠄎」一題解讀成：已知正方形邊長爲  $7\frac{3}{5}$  寸，求其內切圓之面積。所以，此題的解法爲： $7\frac{3}{5} \times 7\frac{3}{5} \times 3 \div 4 = 42\frac{8}{25}$ （平方寸），其中用到的圓面積公式爲  $\frac{3}{4}d^2$ ，d 爲圓之直徑。

其次，是郭書春的校勘：

以圓材方 以圓材爲方材，曰大四韋二寸廿五分寸十四，爲方材幾何？曰：方六寸五分寸二。術曰：直大四韋，因而五之爲實，令七而一四。

以方材圓 以方爲圓曰材，方六寸五分寸二，爲圓材幾何？曰：四韋二寸廿五分寸十四。術曰：方材之一面即圓材之徑也，因而二之以爲實，令五而成一。

郭書春認爲這兩題中的「四韋」指的是正方形之邊，而「以圓材方」一題中的「大四圍二寸廿五分寸十四」，其意思則爲圓之直徑比正方形之邊長多  $2\frac{14}{25}$  寸。因此，郭書春將「以圓材方」一題解讀成：已知圓之直徑比其內接正方形之邊長多  $2\frac{14}{25}$  寸，求正方形之邊長。現依郭

書春之解讀來求正方形之邊長：設正方形邊長為  $X$ ，則圓之直徑為  $X + 2\frac{14}{25}$ ，因為圓之直徑亦恰為正方形之對角線，所以，由正方形邊長與對角線比為 5 比 7，

$$X = (X + 2\frac{14}{25}) \times \frac{5}{7} \Rightarrow X = 2\frac{14}{25} \times \frac{5}{7} \times \frac{7}{2} = 6\frac{2}{5} \text{ (寸)}。$$

由上可知，郭書春將「術曰」校為「直大四韋，因而五之為實，令七而一四。」，指的就是  $2\frac{14}{25} \times \frac{5 \times 7}{14}$ 。至於「以方材圓」一題，郭書春則將之解讀為：已知正方形之邊長，求正方形內切圓直徑與正方形對角線之差。此題之解法筆者在此略去不述，留給讀者自行解讀。

第三，是郭世榮的校勘：

以圓材方 以圓材為方材，曰大四韋二寸廿五分寸廿四，為方材幾何？曰：方七寸五分寸二。術曰：因而五之為實，令七乘，而十四成一。

以方材圓 以方材為圓材，曰方七寸五分寸二為圓材幾何？曰：四韋二寸廿五分寸廿四。術曰：方材之一面即圓材之徑也，因而二之以為實，令五而成一。

郭世榮對這兩題的解讀，基本上與郭書春的解讀相同，只是改法稍異，今亦留給讀者自行解讀。

第四，是蘇意雯等人的校勘：

以獬材方 以圓材為方材，曰大四韋二寸廿五分寸十四，為方材幾何？曰：方七寸五分寸三。術曰：因而五之為實，令七而一、四而一。

以方材獬 以方為圓曰材，方七寸五分寸三為圓材幾何？曰：四韋二寸廿五分十四。術曰：方材之一面即圓材之徑也，因而四之以為實，令五而成一。

蘇意雯等人認為「大四韋二寸廿五分寸十四」與「四韋二寸廿五分十四」皆意指圓周長為  $42\frac{14}{25}$  寸，因此他們將「以獬材方」一題解讀成：已知圓周長為  $42\frac{14}{25}$  寸，求其內接正方形之邊長。不僅如此，他（她）還認為此題之編者誤將正方形對角線與邊長比為 7 比 5 的關係，應用到圓周長與內接正方形周長的比，所以，此題編者提供的解法才會是：

$$\text{內接正方形邊長} = 42\frac{14}{25} \times 5 \div 7 \div 4 = 7\frac{3}{5} \text{ (寸)}。$$

至於「以方材獬」一題，蘇意雯等人將之解讀為：已知正方形邊長  $7\frac{3}{5}$  寸，求其內切圓之周長。而且他們還認為此題之作者或抄書者並未能理解題意，所以供的算法似是將「以獬材方」一題的算法逆回去，即

$$\text{內切圓之周長} = 7\frac{3}{5} \times 4 \div 5 \times 7 = 42\frac{14}{25} \text{ (寸)}。$$

以上便是彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人對「以材方」與「以方材」的校勘與解讀。如筆者一開始所言，彭浩、郭書春、郭世榮與蘇意雯等人最大的歧見點，在於對「大四韋二寸廿五分寸十四」與「四韋二寸廿五分十四」的解釋。特別值得注意的，是彭浩、郭書春與郭世榮對這兩題術文的校勘，皆是將它們校成符合算理的術文，因此，他們對原術文作了較大的修改，而蘇意雯等人卻採取了另一種策略，他們認為這兩題的作者或抄寫者，原本就提供了不合算理的解法，所以，他們的校勘對原術文的更動就較少。不同的校勘策略，產生了不同的風貌，至於孰是孰非、孰優孰劣，目前尚無定論。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 [suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至[suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

## 《算數書》「少廣」一問的反思

台灣師大數學研究所研究生 林倉億

關於此問中的四根竹簡（彭浩《張家山漢簡《算數書》註釋》，頁 117-118, 123，編號 (No. 171 ~ 173, 182)：

171. 『下有六分，……。得從（縱）九十七步有（又）百畝（四十）七分。』
172. 『下有七分，……。得從（縱）九十二』
173. 『步五百畝（四十）一，乘之田一畝。』
182. 『步有（又）千八十九分步之六百一十二，乘之田一畝。』

當初我們在補校「少廣」一問時，<sup>1</sup>並未看到竹簡的編號，因此，我是在猜測的情況之下，對上述的內容作了挪移。<sup>2</sup>而今看到竹簡的編號之後，心中暗自竊喜，因為被我「矇」對了。我當初所作的挪移，相當於先把No. 173 中的「五」字改成「之」字，然後將No. 173 接到No. 171 之後、No. 182 接到No.172 之後，如此一來題意完整無缺。請參考我所作之校勘與彭浩、郭書春所校的比較：

1. 彭浩教授基本上是在 No. 171 之後補上 No. 173 的文句（其中的「五」字要改成「之」字），再把 No. 173 改成 No. 182 的文句，所以，他就不知道 No. 182 要作如何修改，只好說「本簡缺上接簡，……故置於此。」
2. 郭書春老師作校勘時與我們一樣，未能見到竹簡的編號。不過，他基本上同意我的校勘，只不過路徑不同。郭老師的作法是在 No. 171 之後補上「步之百畝（四十）一」，然後再將刪去「步五百畝（四十）一」No. 173 接到 No. 171 之後，最後再將 No. 182 接到 No. 172 之後。簡言之，我與郭老師的作法相同，只是郭老師多作了補「步之百畝（四十）一」、刪「步五百畝（四十）一」兩個動作。郭老師當初並未見到竹簡的編號，我想他在見到竹簡的完整編號之後，應該會同意我的作法。

二月十九日我與蘇惠玉討論時，她也認為我的說法合理，但若能再確定這四根竹簡出土時的相對位置就更好了，所以，我們就進行這個工作。可惜的是，彭浩教授所附之「張家山《算數書》竹簡出土側視圖」中，並未繪出編號 181 以後的竹簡之出土位置，因此，我們目前尚欠缺相對位置此一佐證。另外有三點在此順便向老師報告：（一）彭浩教授在「約分」一問中的第九個註顯然有錯。《算數書》約分後所得之答案是正確的，他在計算上不知道犯了什麼錯誤，才誤以為《算數書》錯了。（二）當初我們所作之校勘，共印了兩個版本。第二個版本對第一個版本中的許多錯誤作了修正，所以請老師轉告大家，若要參考我們所校的，請參考第二個版本。<sup>3</sup>（三）在第二版的第 191 個註腳中，「……請參考註 178」，其中「註 178」應改為「註 186」才對。

註解：

1. 此問原本由蘇俊鴻學長所校，但學長那段時間無法與我們一起討論，而我又對學長所校持不同的看法，在大家討論後，由我進行補校。

2. 參考網路版的〈《算數書》特刊〉(《HPM通訊》第三卷第十一期(2000年11月), <http://math.ntnu.edu.tw/~horng>。
3. 蘇惠玉說老師網頁上的版本是第二版,但我無法進入老師的網頁,因此無法確定。

## 《張家山漢簡《算數書》註釋》讀後有感

台師大數學研究所教學碩士班研究生 宜蘭國華國中 吳任哲老師

### 一、前言

根據彭浩的報告,《算數書》竹簡於一九八四年初出土於湖北省江陵縣(今荆州市荊州區)張家山二四七號墓中,同出的竹簡共有一千二百餘枚,而《算數書》位於這些竹簡的下部,計有一百九十枚,簡長 29.6—30.4 公分,寬 0.6—0.7 公分。編線有三條,上、中、下各一,全書編成一卷。文字皆書於竹黃一面。書名《算數書》題於全書首題的一枚竹簡背面,簡的頭端塗有黑色方塊,以為標誌。再從與《算數書》共存的一份曆譜,所記最後一年是西漢呂后二年(公元前 186 年)來看,它應該是公元前第二世紀早期的數學著作。

對於《算數書》的圖版與彭浩的註釋,讓我們對於此一文本中能有更深一刻的認識,但於少部份的註釋,個人卻有不同的看法與質疑,分別於下節討論之。

### 二、幾題註釋的質疑

舂粟 粟一石舂之為八斗八升。當益耗(耗)粟幾何?曰:二斗三升十一分升八。術曰:直(置)所得米升數以為法,有(又)值(置)一石米粟升數而以耗(耗)米升數乘之,如法得一升。(《張家山漢簡《算數書》註釋》p. 61)

由本題後面的『術曰』,筆者認為題意應為『粟一石舂之為八斗八升。欲舂得一石,當益耗(耗)粟幾何?』按照『術曰』算之,得 $\frac{12 \times 100}{88} = 13\frac{56}{88} = 13\frac{7}{11}$ (升),故解答應改為『一斗三升十一分升七』。

婦織 有婦三人,長者一日織五十尺,中者二日織五十尺,少者三日織五十尺。今織有攻(功)五十尺,問各受幾何尺。其得曰:長者受廿五尺,中者受十六尺有(又)十八分尺之十二,少者受八尺有(又)十八分尺之六。其術曰:直(置)一、直(置)二、直(置)三,而各幾以為法,有(又)十而五之以為實,如法而一尺。不盈尺者,以法命分。三為長者實,二為中者,一為少者。(《張家山漢簡《算數書》註釋》p. 64)

彭浩的註釋①、②請參閱 p. 64,但註釋③、④筆者認為有誤,由『有婦三人,長者一日織五

十尺，中者二日織五十尺，少者三日織五十尺』這一句，其分配方式應為 $\frac{50}{1}:\frac{50}{2}:\frac{50}{3}=6:3:2$ ，故長者應受 $\frac{300}{11}$ 尺，中者應受 $\frac{150}{11}$ 尺，少者應 $\frac{100}{11}$ 尺，而原題之『術曰』的解法是錯誤的。

盧唐 程曰：一日伐竹六十箇，一日為盧唐十五，一竹為三盧唐。欲令一人自伐竹因為盧唐，一日為幾何？曰：為十三盧唐四分之三。術曰：以六十為法，以五十五乘十五為實。（《張家山漢簡《算數書》註釋》p. 94）

由『一日伐竹六十箇，一日為盧唐十五，一竹為三盧唐。欲令一人自伐竹因為盧唐，一日為幾何？』得知，因為『一竹為三盧唐』，所以 $1/3$ 個竹，即可做一個盧唐，故此題算法應為：

伐一個竹需 $1/60$ 日，即伐 $1/3$ 個竹需 $\frac{1}{60 \times 3}$ 日；而由 $1/3$ 個竹做一個盧唐需 $1/15$ 日。若自伐

竹為盧唐則可為 $\frac{1}{\frac{1}{60 \times 3} + \frac{1}{15}} = \frac{180 \times 15}{180 + 15} = \frac{180}{13} = 13\frac{11}{13}$ 個，而原題之術曰的解法是錯誤的。

### 三、一些回響

洪萬生教授在〈《算數書》初探〉一文的結論中，探討《算數書》與《九章算術》的定位問題，內容非常的精彩，請讀書自行參閱。但令更感興趣的問題是：「《算數書》與《九章算術》的關係何在？」對於此一問題，底下筆者提出一些個人淺顯的看法，尚請不吝賜教。對於《算數書》的整體水準都不如《九章算術》來講，大多數的人都不排除《九章算術》是以《算數書》為摹本的，但是就如洪萬生教授所指出的：「何以《九章算術》不納入《算數書》題名（『增減分』）、（『息錢』）、（『以方材圓』）這幾個算法？」「方田題提供了平方根近似值的另類解法，但《九章算術》中卻以「開方術」求解。」和彭浩所指出的：「《算數書》里田術中除與《九章算術》里田術相同外，還有多位數相乘的簡便算法，但《九章算術》中卻沒有。」（《張家山漢簡《算數書》註釋》p. 29），這三個大問題讓『摹本』之說，有著極大的爭議。

一個自圓其說的方法如下：「第一個問題是個人編寫時，刪減的問題」「第二、三個問題是既已有較好的數學方法求解，不一定要每個方法都寫出，再加上編寫者的喜好而言，亦有可能只選擇自己所喜好的數學方法寫下。」但細審題名『少廣』，《算數書》中的公倍數都取最小公倍數求解，但《九章算術》中卻有第5、11問不是用最小公倍數來求解。對於此一問題，以一個編寫《九章算術》的編者來說，若其真有用《算數書》為“摹本”，應不會發生此一數學算法上的“大退步”，而這也是一個數學家不太可能會犯的錯誤，儘管作者在《九章算術》中提出了完整的術文。

由此一細審，再回顧上述的三個大問題，我們可以合理懷疑《九章算術》是以《算數書》為『摹本』的說法，畢竟是存在著許多的不合理，尤其是最小公倍數的求法，故個人較贊同

《九章算術》是以『相同算數文化的文本』為『摹本』，而不是用《算數書》為『摹本』的。《算數書》某些算題的精采解法，實是令我們讚賞，不僅是我們了解戰國、秦漢時期的數學發展水平的第一手資料，並提供了數學史家對其它文本重新檢視的契端。回顧《九章算術》少廣章內容，個人提出另一個問題：「劉徽對於此章前 11 問，為何只註術文，而未註各問題？是否也是如此，而未發現第 5、11 問並未用最小公倍數呢？或有註，但被後人刪除呢？」

## 參考文獻

- 洪萬生 (2000). 〈《算數書》初探〉,《師大學報：科學教育類》45(2): 77-91。
- 洪萬生 (2000). 〈《算數書》的幾則論證〉,《台灣歷史學會通訊》第十一期：44-52。
- 洪萬生 (待定稿). 〈關於《算數書》體例的一個備註〉。
- 彭浩 (2001). 《張家山漢簡《算數書》註釋》，北京：科學出版社。
- 南宋刻本影印 (1980). 《九章算經》，文物出版社。
- 郭書春 (1995). 《古代世界數學泰斗劉徽》，明文出版社。
- 蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚、與葉吉海 (2000). 〈《算數書》校勘〉,《HPM 通訊》第三卷第十一期：1-20。

## 《算數書》研究論文目錄

台灣師大數學系 洪萬生教授 輯

- 江陵張家山漢簡整理小組 (2000). 〈江陵張家山漢簡《算數書》釋文〉,《文物》2000年第九期:78-84。
- 李迪 (2000). 〈關於竹簡《算數書》的若干問題〉,收入《橫地 清先生七十大壽紀念誌》,頁21-24。
- 洪萬生 (2000a). 〈《算數書》初探〉,《師大學報:科學教育類》45(2):77-91。
- 洪萬生 (2000b). 〈《算數書》的幾則論證〉,《台灣歷史學會通訊》第十一期:44-52。
- 洪萬生 (待定稿). 〈關於《算數書》論證的一個備註〉。
- 城地 茂 (2001). 〈算數書的編纂年代〉,《世界華人科技史研討會論文集》(台北:淡江大學化學系、歷史系),頁129-138。
- 城地 茂 (2001). 〈《算數書》的日文翻譯〉, *Journal of Wasan Institute* no. 4 (即將出版)。
- 彭浩 (2000). 〈中國最早的數學著作《算數書》〉,《文物》2000年第九期:85-90。
- 彭浩 (2001a). 《張家山漢簡《算數書》注釋》,北京:科學出版社。
- 彭浩 (2001b). 〈張家山漢簡《算數書》中『分錢』題的校讀〉,提交第九屆國際中國科技史研討會,10月9日~12日,香港城市大學。
- 鄒大海 (2001a). 〈出土《算數書》初探〉,《自然科學史研究》第20卷第3期:193-205。
- 鄒大海 (2001b). 〈睡虎地秦簡與先秦數學〉,提交第九屆國際中國科技史研討會,10月9日~12日,香港城市大學。
- 郭世榮 (2001). 〈《算數書》勘誤〉,《內蒙古師大學報·自然科學(漢文)版》第30卷第3期,頁276-285。
- 郭書春 (2001a). 〈算數書校勘〉,《中國科技史料》第22卷第三期,頁202-219。
- 郭書春 (2001b). 〈試論《算數書》的理論貢獻與編纂〉,提交第九屆國際中國科技史研討會,10月9日~12日,香港城市大學。
- 蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚、與葉吉海 (2000). 〈《算數書》校勘〉,《HPM 通訊》第三卷第十一期:1-20。

## 《算數書》趣題舉隅

台師大數學系 洪萬生教授 編

『約分』(第七題):

約分術曰:以子除母,母亦除子,子母數交等者,即約之矣」。有(又)曰,約分術曰:可半,半之,可令若干一,若干一。•其一術曰:以分子除母,少(小)以母除子,子母等以為法,子母各如法而成一。不足除者可半,半母亦半子。•二千一十六分之百六十二,•約之百一十二分之九。

※ 請利用現代算式,將上述問題及其解法,翻譯成白話文。並比較它與輾轉相除法之異同。

狐出關(第十二題):

狐、狸、犬出關,租百一十一錢。犬謂狸、狸謂狐:而(爾)皮倍我,出租當倍哉。問出各幾何。得曰:犬出十五錢七分六,狸出卅十一錢七分五,狐出六十三錢七分三。術曰:令各相倍也,并之七為法,以租各乘之為實,實如法得一。

※請利用現代算式,將上述問題及其解法,翻譯成白話文。並請問此一問題可以歸類為小學數學中的哪一部份的課程?

分錢(第五十二題):

分錢人二而多三,人三而少二。問幾何人、錢幾何?得曰:五人,錢十三。贏(盈)、不足互乘母為實,子相從為法。皆贏(盈)若不足,子互乘母而各異直(置)之,以子少者除子多者,餘為法,以不足為實。

※ 請利用現代算式,將上述問題及其解法,翻譯成白話文。並請問此一問題可以歸類為小學數學中的哪一部份的課程?又請問小學數學方法可以提供更有趣的解法嗎?

方田(第六十八題):

田一畝方以幾何步?曰:方十五步卅一分步十五。術曰:方十五步不足十五步,方十六步有徐(餘)十六步。曰:并贏(盈)、不足以為法,不足子乘贏(盈)母,贏(盈)子乘不足母,并以為實。復之,如啟廣之術。

※ 請利用現代算式,將上述問題及其解法,翻譯成白話文。並請推廣此一方法來找某些開方不盡根數之近似值。又請問此一方法與牛頓法有關嗎?

## Reader's Feedback

非常感謝這五年來，各位讀者對本刊的愛護。《HPM 通訊》在少數人的支援下，也已經發行五年了。不管您是舊雨還是新知，都請您撥個空回答下面的問卷，更請您務必花少少的時間及郵票錢，將下列問卷回答後影印回寄給我們。我們非常地感激您的共襄盛舉！或是您可在我們的網站上，下載問卷的 word 檔，填完後，以附屬檔案的形式 Email 給我們！

郵寄地址：台北市松山區健康路 325 巷西松高中 蘇惠玉

網站：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/hpmlletter.htm>

Email：[suhui\\_yu@yahoo.com.tw](mailto:suhui_yu@yahoo.com.tw)

### 《HPM 通訊》讀者回饋問卷

2002. 3.

1. 請問您的職業為：  
\_\_\_\_\_
2. 請問您是本刊的經常性訂戶（每一期定期收到）嗎？  
 是  不是（從何處看到本刊？\_\_\_\_\_）
3. 請問您閱讀本刊的頻率為：  
 每期必看  偶而才看  有需要找資料時才看  其他：\_\_\_\_\_
4. 請問您對於本刊中哪一類的文章較感興趣：  
 數學史研究  數學教學相關研究  科普新書介紹  
 網站及新資訊介紹  其他：\_\_\_\_\_
5. 您覺得在閱讀本刊的過程中，哪一類的文章較難閱讀：  
 數學史研究  數學教學相關研究  科普新書介紹  
 網站及新資訊介紹  其他：\_\_\_\_\_
6. 請問您覺得閱讀本刊收穫最大的是哪一類的文章：  
 數學史研究  數學教學相關研究  科普新書介紹  
 網站及新資訊介紹  其他：\_\_\_\_\_
7. 請問在閱讀本刊後，對您的哪一方面較有幫助？  
 教學  研究  修身養性  無多大幫助  其他：\_\_\_\_\_
- 舉例說明：\_\_\_\_\_
8. 您覺得本刊可以再增加哪一類的文章：  
 數學史研究  數學教學相關研究  科普新書介紹  
 網站及新資訊介紹  其他：\_\_\_\_\_
9. 您對本刊的建議：  
\_\_\_\_\_