HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（北市實踐國中）唐書志（北市百齡中學）蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）陳鳳珠（北縣中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（北縣福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生）陳啟文（中山女高）彭良禎（麗山高中）王文珮（桃縣青溪國中）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第五卷 第十二期 目錄(2002年12月)

中算史中的『張本例』(generic examples)

台師大數學系　洪萬生教授

最近與研究生一起研讀 Macia Pinto, David Tall 的 “Building Formal Mathematics on Visual Imagery: A case study and a theory” (2002) 與 John Mason and David Pimm 的 “Generic Examples: Seeing the general in the particular” (1984) 兩篇論文，發現其中有一些論述可以關連到 HPM 上頭來。事實上，中算史文本中也有很多『張本例』 (generic examples)，可供 HPM 研究者或使用者參考與援用。茲在此列舉一二，聊供談助可也。

何謂『張本例』？或許我們可以看看如何利用它來證明！如果有人利用下列圖示來『證明』：偶數加偶數等於偶數，那麼，我們就可以說他（她）使用了『張本例』：

●●●　加　●●●●　　等於　●●●●●●●
●●●　　　●●●●　　　　　●●●●●●●

根據英文字典的說明，“generic’ 是 “genus”（『類』或『屬』）的形容詞，意思是某『類』(class) 或『群體』(group) 所共有的（特性）。這樣說來，如果不夠明白，我們不妨『訴諸』權威。上述 Mason 與 Pimm 兩人合寫的論文中，曾引述了希爾伯特 (David Hilbert)的一段『夫子自道』，非常值得在此引述：

> 假使你想要解題，首先，剝除與此一問題本質 (essential) 無關的任何事物。簡化此一問題，並且盡可能地在不犧牲它的核心 (core) 的情況下將它特殊化 (specialize)。如此一來，它會變得簡單 (simple)，盡可能簡單，但卻不會喪失它的任何『精華』(punch)，然後，你就可以來解題了。至於所謂的延拓 (generalization)，不過是一種你毋需太過勞神的無聊之舉 (triviality)。

在這一段中譯引文中，我刻意地附上原文中（的英文）如 essential，core，specialize，simple, generalization，triviality 等等二十世紀數學家修辭用的口頭禪，忠實地保留一點『原味』，希望大家喜歡！不過，Mason 與 Pimm 引述的主要目的是指出：希爾伯特的『進路』(approach) 可以說是在於尋找一個『張本例』，它儘管特殊 (specialization) 但卻談論了一般 (generality)。因此，他們才會在上述論文中的副標題中，強調從特殊性中看到一般性 (Seeing the generality in the particular)。換句話說，對他們來說，「張本例固然是一個真實的例子，但是它卻以被刻意要求成爲『承載一般性』的角色來呈現 (A generic example is an actual example, but one presented in such a way as to bring out its intended role as the carrier of the general)。」

現在，我們就舉中算史上的兩個『張本例』，來說明它們在證明上可以發揮的積極功能。第一例出自三國時代孫吳國的趙爽，他對勾股定理提供了一個非常漂亮的『弦圖』證明，請參考下圖，其中根據三、四、五這三個特殊的數目所作的圖形，就很容易『搖身一變』，而成爲勾、股、弦分別是 a, b, c 的『弦圖』，因此，我們從趙爽的弦圖『特殊性』，很容易看出它的『一般性』來。

另一個例子，則出自南北朝時代的《孫子算經》。在本書的下卷中有一個『物不知數』題，堪稱是『中國剩餘定理』(Chinese Remainder Theorem) 的起點，玆引述內容如下：

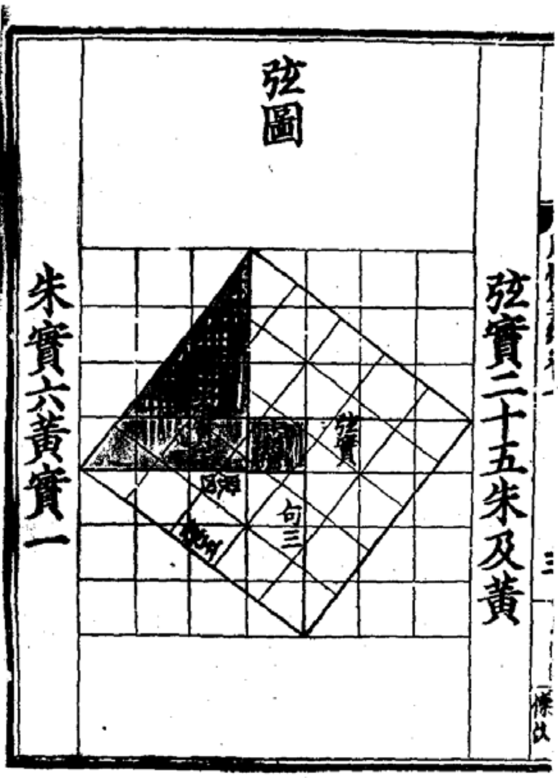
今有物，不知其數，三、三數之賸二，五、五數之賸三，七、七數之賸二，問物幾何？

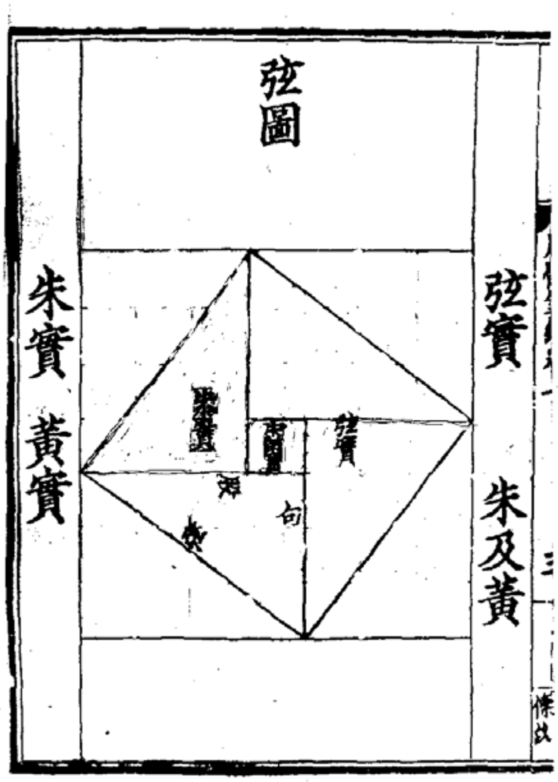
答曰：二十三。

術曰：三、三數之賸二，置一百四十；五、五數之賸三，置六十三；七、七數之賸二，置三十。併之，得二百二十三，以二百一十減之，即得。凡三、三數之賸一，則置七十；五、五數之賸一，則置二十一；七、七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

在本題中，如果我們利用任意三個兩兩互質的除數替代三、五、七，而且餘數也改成任意不相等的三個整數（但分別小於前述的三個除數），那麼，在『術曰』中的『一百四十』、『六十三』、『三十』、『七十』、『二十一』、『十五』等數，也就可以跟著『改寫』成爲對應的數，從而得證（一般性）的『中國剩餘定理』了。

最後，有關『張本例』一詞的敲定，我們必須作一點說明。它也被稱爲『啓蒙例』或『構念例』。然而，我們若將 “generic example” 中譯成『張本例』，或許更加貼切傳神，蓋取其『彰顯本質屬性』之義也！我的考慮是基於下列對比： genus vs. species，generic vs. special，generality vs. specialization，請大家批評與指教。





參考資料：

Mason, John and David Pimm (1984). "Generic Examples: Seeing the general in the particular", *Educational Studies in Mathematics* 15: 277-289.

Pinto, Marcia, David Tall (2002). "Building Formal Mathematics on Visul Imagery: A case study and a theory", *For the Learning of Mathematics* 22 (1): 2-10.

《九章術解》卷三校勘

台師大數學系博士班研究生　成功高中　蘇意雯老師

第一節　導論

用比率方法處理應用問題，在《九章算術》中佔有很大的篇幅，卷三「衰分」章也不例外。「衰」是依照一定的標準遞減之意，所謂「衰分」依劉徽注就是「差分」，其意爲「衰分」與均分相反，是有差別的分配，即現今所說的「按比例分配」。本卷的題目多爲與古代階級社會中，依爵次高低而按不同等級的分配制度有關。在本卷中，由兩個數組成的比率，拓展爲多個數的「列衰」。從正比的衰分，演化爲反比的「返衰」。劉徽在「衰分術」的注釋中提到三層意思：第一是說明衰分式中「法」與「衰」的關係。其二是說明衰分與今有兩術之關係。其三是說明衰分與均分之關係。[1]至於李朝南秉吉撰述《九章術解》在卷三中所採取的註解方式爲何？是否與劉徽相同，或是採取不同的進路？這是本文所要討論的重點。但在探討南秉吉註解的風貌之前，我們應先對南秉吉所可能採用的底本，進行研究。

第二節　底本的探討

在本節一開始，首先讓我們對於各文本做一比對工作。在題目順序排列上，文本之間並無不同，至於在各題文字差異上，則有些許不同，我們在此列表如下:

書名 題號\名	九章術解	南宋本	聚珍本	四庫本	微波榭本	李潢本
1(術曰)	得一鹿	得一鹿	得一	得一	得一鹿	得一鹿
2(術曰)	得一斗	得一斗	得一	得一	得一斗	得一斗
3(術曰)	得一錢	得一錢	得一	得一	得一錢	得一錢
4(術曰)	得一尺	得一尺	得一	得一	得一尺	得一尺
5 三鄉發傜	三鄉發傜	三鄉發傜	三鄉發傜	三鄉發徑	三鄉發傜	三鄉發傜
5(答曰)	北鄉遣一百三十五人	北鄉遣一百三十五人	北鄉遣一百三十五人	北鄉遣一百三十八人	北鄉遣一百三十五人	北鄉遣一百三十五人

5(答曰)	北鄉……三十七	北鄉……三十七	北鄉……三十七	北鄉……三十七	北鄉……二十七	北鄉……二十七
5(答曰)	南鄉……二千一百七十五分人之	南鄉……二千一百七十五分人之	南鄉……二千一百七十五分人之	南鄉……二千二一百七十五分之之	南鄉……二千一百七十五分人之	南鄉……二千一百七十五分人之
5(術曰)	得一人	得一人	得一	得一	得一人	得一人
6(術曰)	以爲列衰	以爲列衰	以爲列衰	以爲衰列	以爲列衰	以爲列衰
6(術曰)	乘未并者	乘未并者	乘未并者	乘未并者	乘未并者	乘未并者
6(術曰)	得一斗	得一斗	得一	得一	得一斗	得一斗
7(術曰)	得一斛	得一斛	得一	得一	得一斛	得一斛
返衰	返衰(7 後)	返衰(7 後)	返衰(7 後)	反衰(8 後)	返衰(7 後)	返衰(7 後)
8(術曰)	得一錢	得一錢	得一	得一	得一錢	得一錢
9(術曰)	得一升	得一升	得一	得一	得一升	得一升
10 今有絲	一斤……一千三百二十八	一斤……一千三百二十八	一斤……一千二百二十八	一斥……數爲實定二十八	一斤……一千三百二十八	一斤……一千三百二十八
12 今有縑	得錢幾何	得錢幾何	得錢幾何	得幾何	得錢幾何	得錢幾何
13 今有布	一百二十五	一百二十五	一百二十五	一百五十五	一百二十五	一百二十五
13(術曰)	布尺數乘價錢	布尺數乘價錢	布尺數乘價錢	布尺數爲乘錢	布尺數乘價錢	布尺數乘價錢
14 今有素	六百二十五	六百二十五	一百二十五	六百二十五	六百二十五	六百二十五
15 今與人絲	得縑……今與人絲四十五斤	得縑……今與人縑四十五斤	得縑……今與人絲四十五斤	淂縑……今與人絲四十斤	得縑……今與人絲四十五斤	得縑……今與人絲四十五斤
15(術曰)	以一十四斤……以一十斤……兩數爲實	以一十四斤……以一十斤……兩數爲實	以一十四斤……以一十斤……兩數爲實	一十四斤……以十一斤……兩爲數實	以一十四斤……以一十斤……兩數爲實	以一十四斤……以一十斤……兩數爲實
16 問耗幾何	耗七兩	耗七兩	耗七兩	耕七兩	耗七兩	耗七兩
16(術曰)	絲兩數	絲兩數	絲兩數	絲數	絲兩數	絲兩數
18 今有田	太半升	太半升	太半升	大半升	太半升	太半升
19(答曰)	二十三	二十三	三十三	三十二	二十三	二十三
19(術曰)	術曰以價錢	術曰以價錢	術曰以價錢	爲實實如法	術曰以價錢	術曰以價錢
20 今有貸人	今有貸人……貸人	今有貸人……貸人	今有貸人……貸人	今有貨人……貨人	今有貸人……貸人	今有貸人……貸人
20(術曰)	貸錢數……得一	貸錢數……得一	貸錢數……得一	貨錢數……得一	貸錢數……得一	貸錢數……得一

	錢	錢			錢	錢

在《武英殿聚珍版》和《文淵閣四庫全書》中，以第一題爲例，在術曰的最後「各自為實，實如法得一鹿」中的「鹿」字都予刪除。他們所持的理由是「原本作得一鹿，衍鹿字攷古算凡以法除實，得所求之數，多云實如法而一。……篇內有云：實如法得絲數及得銀數、得粟數之類是也。一乃該舉得所求之數為言，此云得一亦該舉得所求數之辭。不知者妄加鹿字，得一鹿便不足該舉與後妄加斗字、錢字、尺字、斛字、升字，作得一斗、得一錢、得一尺、得一斛、得一升者，皆不可通。」因此，此二書應不可能爲南秉吉所採之母本。

至於《微波榭本》與李潢的《九章算術細草圖說》，由於前者爲後者之母本，所以，兩者與《九章術解》的差別一致，都是在第五題「三鄉發傜」有關北鄉的答案上。《微波榭本》與《九章算術細草圖說》都把答案誤作「北鄉遣一百三十五人一萬二千一百七十五分人之一萬一千六百二十七」，但《九章術解》則是正確的「北鄉遣一百三十五人一萬二千一百七十五分人之一萬一千六百三十七」。所以，若南秉吉採《微波榭本》，應該也經過仔細地校勘才是。至於九章算術《南宋版》與《九章術解》則有一字之差，那就是如表列的「今與人縑」和「今與人絲」之別，當然正確應爲後者。由於九章算術《南宋版》後幾卷亡佚，究竟此二書有否關連，我們並無法在此置喙。

第三節　南秉吉註解的特色

在上述九章算術《南宋版》、《武英殿聚珍版》、《文淵閣四庫全書》、《微波榭本》、《九章算術細草圖說》等書的「衰分章」中，常可見「此術今有之義」的注。「衰分」本質上仍是今有之術，只不過更爲複雜。所謂的「今有術」實際上就是現今所謂的「四項比例算法」。這種算法，在古代印度稱之爲「三率法」，此法從印度傳入阿拉伯回教國家，再由阿拉伯人傳到西歐各國，仍舊保持三率法的名義。[2]因此，在《同文算指》通編卷一出現了三率準測法第一「數有顯隱必賴顯以徵隱，故列前三率求後一率。先定三率之位，大都取其相準，如貨準、貨錢、準錢之類。凡第三率必與第二率相乘，而以第一率除之，因得第四率為所求。舊名異乘同除。」[3]

《同文算指》成書於 1613 年，是明代李之藻等所編譯，爲介紹歐洲筆算的第一部著作。《同文算指》在中國數學發展史上是爲歐洲近代數學傳入我國的開始，對後來的算術有巨大的影響。[4]之後 1723 年的《數理精蘊》在解題時，更直接採用一率、二率、三率、四率的說法。對照南秉吉的註解，我們不難發現其相似性，在全章中，看不到「今有術」這個名詞，而章末「貸錢問題」中還出現了「此合率比例」的說明。至於詳細的註解，稍後第四節將再爲讀者介紹。

事實上，《同文算指》和《數理精蘊》對韓國數學家有很深遠的影響。[5]所以，簡而言之，南秉吉是以西法來註解《九章算術》。另外在「衰分章」第一題的官爵分派上，南秉吉也省略了《墨子》中出處的介紹。或許我們可以大膽假設如此的場景：受到西學薰陶的南秉吉，可能是藉由上述兩本書的影響，或是直接受到歐洲的科學技術以及基督教等西洋的衝擊，當他看到手邊的《九章算術》，不管是九章算術《南宋版》、或者是《微波榭本》，甚至爲《九章算術細草圖說》，對於其中註解所採用的中算思維模式想要有所改變，因此有了《九章術解》的產生。

第四節　南秉吉註解的評價

在第一節裡我們提到劉徽在「衰分」的注中有三層含意，現在我們將同樣以南秉吉爲「衰分」所做的解釋來作對照。「衰分」如前所述，就是以御貴賤稟稅，用於按等級分配或按不同的因素納稅問題。南秉吉在註解中直接提到「總衰數相併為一率也，總物數為二率也，各衰數為三率也，乘者二三率相乘也，各衰數各為三率與二率相乘也。以一率除二三率相乘積之謂也。一者即所求數也。」。注文中如前文所述直接出現一率、二率、三率。以下再讓我

們舉第一題爲例：

今有大夫、不更、簪裹、上造、公士凡五人，共獵得五鹿，欲以爵次分之，問各得幾何？

南秉吉的注解是這樣的：

爵數者大夫五人、不更四人、簪裹三人、上造二人、公士一人，以此數為各衰數。各衰數相併得十五為總衰，五四三二一各衰數。

十五分為一率，五鹿為二率，各衰數各為三率，得四率為各人所得數也。此法以總衰與總鹿之比，即如各衰與各人所得之比也。

以現在的數學符號解讀，就是

總衰：總鹿＝各衰：各人，各人＝（總鹿 × 各衰）÷ 總衰

在「反衰」的注釋方面，南秉吉採取了比劉徽更爲詳盡的敘述，劉徽以提綱挈領的方式帶領，但南秉吉對每一步驟都加以解說。例如在「術曰：列置衰，而令相乘動者為不動者衰」之後，南秉吉就依爵次分配，實際演算得出「大夫二十四、不更三十、簪褭四十、上造六十、公士一百二十」的結果。總體而言，到底南秉吉爲《九章算術》所作的註解之價值爲何？或許我們可藉由《九章術解》書末的跋來做檢驗：

《九章算術》數學之鼻祖也。劉徽注之，李淳風釋之，然俱多未曉處。抑或繡出鴛鴦，而藏其金針之義歟！注釋所以啟來者而終莫能端倪。故余因原術解之，發明其萬一。未敢為覺後覺而使好學者，庶其易曉云爾。

從文化脈絡來說，劉徽通過「析理以辭，解體用圖」，爲《九章算術》建構中國古代數學理論體系，展現《九章算術》不朽的風華。《九章算術》之後，中國數學著述主要採用兩種形式，一是爲《九章算術》做注，一是以《九章算術》爲楷模，編纂新的數學著作。[6]或者我們可以稱南秉吉的《九章術解》，是在學習西方數學後的一種另類的《九章算術注》。

承上所述，以《九章術解》中的「衰分章」爲例，我們看到南秉吉盡其可能地詳細解說與鋪陳，在介紹「衰分」和「返衰」的概念以及其後的解題時，就像是夫子在旁諄諄教誨，只要照其敘述，按部就班就可把題目解出。似乎，我們可以把《九章術解》當成是《九章算術》的自學指南。雖然，這與劉徽的註解風格不同，但仔細研讀，使好學者易曉的目的應不難達成。

註解：

1. 參見李繼閔，《九章算術及其劉徽注研究》（台北：九章出版社，1992），頁 164。
2. 參見李繼閔，《九章算術及其劉徽注研究》，頁 146。
3. 引自明 • 李之藻等編譯，《同文算指》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。
4. 參見趙澄秋，〈《同文算指》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993，頁四 75-76。
5. 參見金容雲，〈解題〉，《算學正義》，收入金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(8)》，漢城：驪江出版社，1985。
6. 參見郭書春，《古代世界數學泰斗－劉徽》（台北：明文出版社，1995），頁。

《九章術解》卷四校勘

西松高中 蘇惠玉老師

在「少廣」這一卷中，包含的方法，包括少廣術、開方、開圓、開立方及開立圓術。在南秉吉的注解中，我們可以瞭解到南秉吉對這些方法的瞭解，都有他自己融會貫通的見解。在其中，我們也能夠看出《數理精蘊》對他的影響。而在開方、開立方術方面，他以「增乘開方法」爲主，像是融合了幾本重要著作如《數理精蘊》、楊輝的《詳解九章算法》、朱世傑的《算學啓蒙》以及程大位的《算法統宗》中的方法，他對開方術的注解釋確實是比劉徽的注解要容易瞭解得多。

第一節 底本探討

本節同樣將南宋鮑澣之刻的《九章算術》、戴震校的武英殿聚珍版《九章算術》、《四庫全書》中的文淵閣本《九章算術》、孔繼涵刻的微波榭本《九章算術》、李潢著《九章算術細草圖說》等版本作一比較，探討《九章術解》與其之關聯與差異。首先，就卷四的題目順序比對，《九章術解》缺第 10 題，其餘部分題目順序一致。[1]

第二節 南秉吉注解的特色

在這一卷的幾個方法的注解中，南秉吉只在少廣術的注解中，以一實際例子（廣爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$）來注解。他在「少廣」這兩字之後，注解爲：

> 以御積冪方圓也，截取其從少以益其廣，故曰少廣也。

這一段話跟《九章算術》中的劉徽及李淳風注中的用字一模一樣，所以，可以猜測他應該是有看過劉徽的注解才是。

這一段之後的術曰，他一句一句的逐句解釋，讓讀者更加容易瞭解《九章算術》術文是如何運算的。但再解釋術文之後，他認爲「此法不足爲省約也」，而以 3、4、5 連乘的最小公倍數爲分母去通分。

而在「開方」這兩字的注解，他所使用的文字，跟《數理精蘊》中使用的一模一樣，所以，他一定有受過《數理精蘊》的影響是無庸置疑的。但是在開方術及開立方術的注解中，又可以清楚的看出南秉吉所用的方法爲以籌算爲主的「增乘開方法」，這又和《數理精蘊》及《同文算指》中用的筆算式的直式表示方法不同。在《數理精蘊》及《同文算指》中的定位都是如同現在方法一般，由末位起兩位一個記號；雖然南秉吉使用的籌算方法來開方，與楊輝《詳解九章算法》、朱世傑《算學啓蒙》和程大位《算法統宗》書中所引用的賈憲開方法本質上相同；但是，南秉吉的「借一算」，確是用「隅法」來解釋，這又和楊輝《詳解九章算法》、朱世傑《算學啓蒙》和程大位《算法統宗》書中所引用及解釋的賈憲方法不同。賈憲用的是「下法」，而南秉吉用的是「隅法」這個字。但在秦九韶的《數書九章》中卻也是用「隅」這個字。但是，南秉吉是否有看過《數書九章》卻也是一個謎題。我們只能就流傳到韓國的古文本推測，南秉吉應該有受到楊輝《詳解九章算法》、朱世傑《算學啓蒙》和程大位《算法統宗》等書的影響。

在開方術及開立方術的注解中，南秉吉嘗試以「幾何」的方式來解釋，但是沒有圖形，只有形容。而在《數理精蘊》及《算法統宗》中都有這樣的幾何說明，《算法統宗》中甚至

有圖示，而他所使用的術語如兩廉、隅、長廉都與這兩本書同。[2]

比較值得注意的是，當積有分數時的處理。南秉吉認爲「積分必爲邊分自乘之數」，也就是說，積的分母一定是邊的分母的平方（或立方）。他會這麼簡單的認爲，可能是從上述幾本書中的例題所得的印象，上述幾本書中的例題中，積有分數的例子中，分母都是完全平方或完全立方。南秉吉似乎沒有將其與下一句「若母不可開者」做一區分。

以下以開方術的「劉徽注」及南秉吉的注解做一比較，可以清楚的看到南秉吉在「開方術」上的融會貫通。就「開方術」的注解而言，已將「劉徽注」中較隱晦不明的部份，以他自己的方法，轉化成讓讀者容易瞭解的「開方術」了。

劉徽注：[3]

> 開方求方冪之一面也術曰：置積爲實。借一算，步之，超一等言百之面十也。言萬之面百也。議所得，以一乘所借一算爲法，而以除先得黃甲之面，上下相命，是自乘而除也。除已，倍法爲定法倍之者，豫張兩面朱冪定袤，以待復除，故曰定法。其復除，折法而下欲除朱冪者，本當副置所得成方，倍之為定法，以折、議、乘，而以除。如是當復步之而止，乃得相命。故使就上折下。復置借算，步之如初。以復議一乘之欲除朱冪之角黃乙之冪，其意如初之所得也，所得副以加定法，以除。以所得副從定法再以黃乙之面加定法者，是則張兩青冪之袤。復除，折下如前。

南秉吉注解：

> 開方
>
> 術曰：置積爲實即方冪。借一算步一即隅法，超一等方冪即每邊自乘積而邊與積同起單位邊進一位則積近二位故隅法恒超一等。議所得以一議者商也一者除也商得可除之數也乘所借一算爲法以商得數乘隅法置於實積之下隅法之上為法，而以除以商得數乘法是為自乘數故以減方冪則除得每邊也。除已倍法爲定法即廉法。其復除折法而下折者退也其復除餘積也廉法一退。復置借算步之如初即隅法再退也隅法恒為一故亦可為復置借算也。以復議一次商得可除餘積之數也乘之乘隅法，所得副以加定法以除副又也以次商乘隅法所得數又加於廉法仍與次商相乘以減方冪則除得每邊之奇零也蓋邊數有二位者初商除後必有餘積即初商積縱橫兩傍各有以初商為長次商為闊之長方冪一段是為兩廉故倍法為廉法也兩廉相湊之一隅有次商自乘之平方冪一段故以次商乘隅法以加廉法也邊數多位者皆倣此。以所得副從定法此邊數多位者之廉法也從加也以次商又加廉法則為初商次商共數之倍也。復除折下如前如除得次商之術也。

而在開圓術及開立圓術中，南秉吉所使用的圓周率一律爲三，他並沒有提到徽率或是密率，僅以 $\pi=3$ 去解釋開圓術及開立圓術中用到的圓面積及圓體積。值得注意的是，南秉吉在開立圓術中用到的圓體積是正確的，儘管《九章算術》中的公式是錯誤的。但是，在劉徽注中有解釋爲何錯誤，而南秉吉卻以直接導出正確公式的方式來說明錯誤。而在他的解釋中，也可以看出《數理精蘊》的影響，例如「球體外面積應爲球徑平圓面積四倍」、「外面積與半徑相乘得數以三歸之及球積也」，在《數理精蘊》中都有這樣的公式。但是，與《數理

精蘊》不同的是，在《數理精蘊》中，以π=3.1415926 並以方積、球積比例的四率法來算出球徑，而南秉吉簡單的以π=3 來說明「球積必居立方積之半」。

最後，與少廣術不同的是，在開方、開立方、開圓及開立圓術中，南秉吉並沒有以實際例子來解釋，或許是他認爲這些注解的過程中，有其一般性，而這樣的解釋即已足夠。

第三節 南秉吉注解的評價

在少廣術的注解中，南秉吉以實際例子來解釋，可能是意識到像這樣的問題，必須以實際分母數多少來決定，所以他實際例子來說明。但是，他也意識到「各分母徧乘諸分子」的方法不能省約，所以他在舉例的最後，以最小公倍數（在此例中爲 3×4×5）來乘諸分子，但是卻沒有寫出最小公倍數的求法；同時，在後面的例題中，《九章算術》術曰中的解法，有些並不是以最小公倍數來解的（例如分母最大到 6、12），南秉吉也並沒有指出這些不同處，及爲什麼是與少廣術不同的這樣的解法。雖然如此，因爲在劉徽的注解中，仍然是以較爲繁瑣的合分術來解，所以，可以看出他已進一步將合分術融會推廣。

我們可以在南秉吉的注解中，找到許多受《數理精蘊》影響的證據，但是，在開方、開立方術的注解中，南秉吉卻不用《數理精蘊》中所用的筆算的直式方法，反而是以擺算籌方式的「增乘開方法」來解釋。也有可能南秉吉想要以同樣是籌算的方法來解釋《九章算術》中的術文。不過，南秉吉在注解中融會貫通中算中對開方術的研究成果，這一點是無庸置疑的，他以相當清楚的方式，將「開方術」解釋的相當詳盡。

不過，在開圓術及開立圓術中，圓的面積及體積都必須要用到圓周率的值，而南秉吉一律以$\pi=3$ 來表示及計算。不管在劉徽注或是《數理精蘊》中，都有提到更精密的圓周率之值，爲什麼他沒有採用？爲了計算方便？還是因爲他對圓周率近似值求法的不了解？我們知道劉徽的割圓術求圓面積及π的近似值，是劉徽注中相當精采的一部份，南秉吉略過不提π的近似值，是因爲他不了解嗎？或是他認爲在計算過程中不需要？這就不得而知了。不過，或許他在跋中所寫的：

> 劉徽注之李淳風釋之然具多未曉處，抑或繡出鴛鴦而藏其金針之義歟。注釋所以啟來者而中莫能端倪，故余因原術解之發明其萬一，未敢為覺後覺而使好學者庶其易曉云爾。

可以爲我們提供一些答案。

註解

1. 九章術解目錄指出少廣第四凡廿十四問，但《九章術解》文本中只有廿十三問，缺第十題：「今有田廣一步半、……、十二分步之一。求田一畝，問縱幾何?」。
2. 在開方術中用的兩廉、隅和《數理精蘊》相同，而在開立方術中用的方廉、長廉，《算法統宗》中爲平廉與長廉。
3. 以下「劉徽注」引郭書春匯校 (1990)

中東古文明數學巡禮

系列之二：巴比倫文明起源、六十進位法及其影響

中原大學數研所碩士生　英家銘

一、巴比倫文明起源與進展

巴比倫所在的「肥沃月彎」孕育了數個偉大文明，而這些文明對繼之而起的希臘羅馬文明乃至於現代世界都造成很大的影響，「六十進位法」(sexagesimal system) 即爲其中之一。當筆者試圖了解六十進位法並找出它的影響時，我回憶起一個以前曾與兩位好友討論過的問題：Why Mesopotamia？以現代人的觀點來看，位處「肥沃月彎」的國家伊朗、伊拉克、敘利亞、約旦乃至以色列的土地不僅不夠肥沃，恐怕還乾旱了些，爲什麼在公元前 3000 年起這裡就出現包含數學在內的文化高度發展的社會？

第一個原因在起跑的優勢。考古學家及生物學家認爲，大麥、小麥和豌豆的野生種源出現在肥沃月彎，而且早在約一萬年前即被當地人馴化，使當地族群由狩獵—採集社會進入定居的農業社會。有了農業，才能養活大量而稠密的人口且儲存多餘的食物。此外，人類五大家畜中，狗、羊、豬和牛最晚在 8000 年前即已在肥沃月彎被馴養，源自烏克蘭的馬匹也在 6000 年前被蓄養成功。家畜可提供豐富的動物性蛋白質，禦寒衣物，以及擔任運輸和交通的工作。牛車和驢車可將農產品運送到其他地區以換取民生必需品，於是貿易的行爲漸漸開始，記帳的需要也促成最早文字的出現，此地的文明於焉誕生。有了農業與畜牧的支持，城市、國家，以及「不事生產」的「專家」，如統治階層、祭司、工程師及數學家才有可能出現。筆者猶記得剛從師大結業實習時，一位女士挖苦筆者鎮日不事生產卻能坐領乾薪。從上述觀點來看，這位女士說得不錯，現代社會的高度分工，也是農、牧業養活大量專家的結果。

第二個原因在其位置，這其實是第一個原因的延伸。肥沃月彎馴化的動、植物及科技發明如文字、輪子等，沿著相同的緯度向東西方氣候類似之地迅速傳播，幫助了四周各民族的發展。肥沃月彎西北方曾出現西臺帝國，西方有腓尼基人和以色列人，西南方有埃及人，遙遠的東方還有印度次大陸。在羅馬帝國興起之前，這裡一直是交通要衝，各地商旅馬車隊的來往，回頭刺激了肥沃月彎的經濟發展，使得商業的計算更顯重要。相對而言，埃及與中國就顯得較爲孤立。但孤立的中國仍有豐富的數學遺產，這又是另一段故事了。

第三個原因就是我們熟知的大河了。由於底格里斯河和幼發拉底河不定期的氾濫與漲落，比起我們類似的尼羅河要嚴重許多，這個情況迫使引水灌溉變得更爲一門大學問，從水利工程中自然會引發許多數學的問題，帶動數學進步，而數學再反過來推動工程的演進。

當然，實際情況要比上面三段所述複雜許多。以上只不過是筆者將許多學者研究的結果，加上自己的後見之明拼湊而成。若要把這些東西說清楚，也許就超越了我們研究數學史的範疇。筆者討論這個問題，是希望也許能幫助與筆者同樣在中學教數學的教師，甚至是歷史教師，用更宏觀的角度與學生一起思考問題。

二、六十進位法

六十進位法可能是人類最早使用「位値系統」(positional system) 的記數方法，最晚在公元前 2100 年就已出現。在了解六十進位法之前，我們先來看看何謂「位値系統」，以及有無位値系統對運算造成的差異。

我們所習慣的印度•阿拉伯數碼，就是位值系統最好的例子，這是一個以 10 爲底的計數與演算系統，當我們寫 5625 時，我們的意思是$5(10)^3+6(10)^2+2(10)^1+5(10)^0$。一般而言，若我們選定一正整數 b 爲底，則我們很容易可以證明任意正整數 N 可以被唯一地表示成下面的形式：

$$N=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_2b^2+a_1b+a_0\text{ ，}$$

其中$0\le a_i<b$ ，$i=0,1,\cdots,n$ 。接著，我們就可將 N 表爲：

$$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0\text{ 。}$$

所以，一個基本符號在不同的位置就會代表不同的值。例如，在 234 中的 2 代表 200，25 中的 2 代表 20，而 102 中的 2 就代表 2。在一個完整的位值系統中，必須要有代表「零」的符號，才能將可能缺項的位數補零。我們現在的直式加減乘除，就是建立在這樣的位值系統上。至於不使用位值的系統，大概只有羅馬數字還算爲世人所熟悉。這也是一個以 10 爲基底的系統，但它用 I、X、C 、M 表示 1、10、100 和 1000，再加上 V、L、D 代表 5、50 及 500 作輔助。舉例來說，

1762=MDCCLXII。

若要用它作加減乘除的運算，對現代人而言是十分困難的。但是，如果我們熟記一些規則，比如 5 個 I 的和爲 V，兩個 V 的和是 X 等等，再加上羅馬時代也有類似中國的算盤，其實應付 10000 以下的運算還不會太困難。事實上，古代希臘人、希伯來人及早期的阿拉伯人使用比羅馬數字更複雜的字母系統來代表數字，而且跟羅馬人一樣不使用零，但在當時已經足夠。

接著，我們回到六十進位法。巴比倫使用的這個系統是個不完整的位值系統，因爲它缺乏代表「零」的符號。但它與我們現在的系統是很接近的，它使用 59 個不同的符號代表 1 至 59，當泥板上由左至右出現 5、6、3 時（我們用 (5, 6, 3) 代表這件事），它的意思是 $5(60)^2+6(60)^1+3(60)^0$=18363，這使得一個很龐大的數字變得容易紀錄。這裡就引發了一個問題，爲什麼在四千多年前，巴比倫人就發展出這種與現代位值系統相似的六十進位法呢？筆者的猜想是因爲數字管理的需要加上書寫工具的缺乏。中國人在公元二世紀才發明造紙術，在紙張傳遍歐亞大陸之前，任何足以長期保存的書寫工具都是很昂貴的。前面一節提到，古巴比倫時代已有良好的農業發展及頻繁的商業往來，再加上早熟的天象觀察，使得記載龐大數字並長久保存有其必要。大家可以想像一下，當時捏製一塊泥板，把一些文字與數字小心地用一跟尖尖的棍子刻上去，再將之烘培定型保存起來，是十分費時的工作，可見書寫文字在當時是很「昂貴」的事。古代蘇美社會（約公元前 3200 至 2340 年）中，只有掌控社會經濟的廟宇才能使用文字紀錄，此外，目前出土的泥板中，最大超過六公斤，面積大到要助手雙手扶著供書記官書寫才行。所以，用很小的空間紀錄很大的數字就變得很重要，在一些較爲古老泥板中，1 的 60 倍被寫成一個比較大的「**1**」，但後來被簡化成原來的大小，再將數字放在不同位置代表 60 的不同倍數，帶有位值便利性的六十進位法於焉誕生。

至於爲什麼用 60 而非 10 爲底，有學者相信應該是爲了統一當時的度量衡。當時可能有兩種常用的單位（如同我們將公制和英制混合使用），這兩個單位最常用的比例都是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,10$ 等，如果我們規定，大的單位剛好是小的的 60 倍，則大單位的 10, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},$和$\frac{2}{3}$ 倍就都是小單位的整數倍，使得換算便利許多。另外，60 比 10 多了許多因數也可能是選擇 60

的原因。

巴比倫六十進位法也不是完全沒有缺點，如前所述，它一直沒有「零」的符號，也沒有小數點。因此，(5, 6, 3)也可以代表

$$5(60)^3 + 6(60)^2 + 3 = 1101603,$$

或者

$$5(60) + 6 + 3(60)^{-1} = 306\frac{1}{20},$$

或是其他的數字？雖然有時他們會將某一位空下來以代表缺項，但也因沒有統一使用，讓我們後人無法直接從數字符號上去確定它的值，此時我們只能從泥板的上下文去判斷了。這樣容易混淆的狀況，一直到約公元前 300 年波斯人「發明」了「零」的符號，才大有改善，但小數點仍一直沒有被使用。

三、六十進位法對世界的影響

六十進位法在人類歷史上留下了不可磨滅的痕跡，這部分應該是我們中學師生最感興趣的部分。我們現在將一小時劃分成 60 分鐘 (minute)，一分鐘分成 60 秒 (second)，還有我們將圓周分成 360 度之後，再將一度切成 60 分，一分再切成 60 秒以表示細微的角度，這些劃分法都可以回溯到蘇美人的時代。這種劃分法是如何進到現代世界的呢？這是一段跨越 4000 年的故事，但我們可以簡短地描述它。

古代巴比倫人很早就對觀察天象有興趣，他們也用天文觀測的結果，來幫助他們訂定每年週期的曆法，以協助農民決定播種和收割的日期。後來的希臘人，從商業來往和軍事征服中取得巴比倫人留下的資料，希臘的天文學家也得以運用它們。這群龐大的資料都是用六十進位法所記載的，希臘人就用這個系統來書寫他們在天文觀測中所紀錄到的分數，他們把六十分之一稱為「第一小單位」，六十分之一的六十分之一稱為「第二小單位」，以此類推。在希臘人的天文學著作被譯成阿拉伯文，以及後來在 12 世紀歐洲學者將阿拉伯文的文本翻成拉丁文時，上面的表示法一直都被沿用下來。六十分之一還有六十分之一的六十分之一在拉丁文中分別被寫成 *pars minuta prima* 和 *pars minuta secunda*。最後，它們進到了英語的世界，就被簡化成「minute」和「second」這兩個我們常用的詞彙了。

除了「分」、「秒」之外，一部分的讀者可能也見過其他的巴比倫度量衡單位。《聖經》中常見的重量及貨幣單位他連得（talent）、彌那（mina）還有舍克勒（shekel）都是由巴比倫傳到以色列的，其中

1 他連得 = 60 彌那，
1 彌那 = 60 舍克勒。

它們的換算也是用六十進位法。

參考資料

1. 莊新泉 (2001).《美索不達米亞與聖經》。台北縣新店市：橄欖文化基金會
2. Bunt, L.N.H., Jones, P.S., Bedient, J.D. (1988). *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Englewood, Cliffs, N.J.：Prentice-Hall.
3. Diamond, J.M. (1997). *Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies*. New

York：W.W. Norton & Co.

4. Eves, H. (1975). *An Introduction to the History of Mathematics*, 4th ed. New York：Holt, Rinehart and Winston.
5. Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York：Oxford University Press.
6. Struik, D.J. (1967). *A Concise History of Mathematics*, 3rd ed. New York：Dover Publications, Inc.

2002 年 ICTM-2 希臘紀行

國立勤益技術學院　劉柏宏教授

對數學史稍有喜好的人，一想到希臘這古老國度一定有種莫名的情感。古希臘數學的輝煌成就與嚴謹，跨過兩千多年的時空，對現今數學發展仍有著深遠的影響。希臘之於我，有如耶路撒冷之於基督徒與麥加之於回教徒。這說法或許有點誇張，但對我而言，今年暑假希臘之行的心情，確有如朝聖者一般。

第二屆國際數學教學會議 (2nd International Conference on the Teaching of Mathematics) 於今年(2002)七月一日至六日，在希臘的克里特島舉行。國際數學教學會議是一個近年新興的國際數學教育會議，每四年舉行一次（第一次會議於 1998 年在畢達哥拉斯出生地希臘的薩摩斯島舉辦）。本次會議主要針對大學階段的數學教育分爲七個主題（教育研究、科技運用、教學方法、課程改進、師資訓練、數學與其他學科之整合、遠距教學）進行研討。數學史與數學課程之整合的議題則納入『課程改進』項下，藉由論文宣讀與研討交換心得。我的博士論文旨在觀察於一歷史導向的微積分課程中，大一新生對數學思考的觀點的發展取向。在課程中透過數學歷史問題之使用，誘發學生思考解題過程的深層意義，並期許他們能超越公式運用與數學僵化過程之表面認知，進一步瞭解數學思考之精神。其中阿基米德求面積與體積的方法，在我的論文中扮演著關鍵的角色。因此，選擇他的祖國作爲我論文首次發表的所在，對我個人而言相當具有紀念性。

除論文宣讀外，大會也安排了四場專家學者的座談。其中一個主題即探討數學史在數學教育中之角色定位。這場座談的四位學者，分別爲本屆 HPM 主席 Fulvia Furinghetti，日本學者 Masami Isoda，香港大學的蕭文強教授，以及東道主希臘的 Constantinos Tzanakis。除 Fulvia Furinghetti 外，其餘三位都曾來台參加兩千年的 HPM 會議。座談會中除介紹近年 HPM 的相關專書與發展外，亦重視如何將 HPM 的想法放入教師培育的課程之中。會中提出『整合數學史與數學教學 (integration of history of mathematics in mathematics teaching)』的概念，以取代以往『運用數學史於教學之中 (using history of mathematics in teaching)』的想法。此種呼聲的主要訴求，在於以數學史爲一介質，來達成數學教育之目標；希望跳脫以往片斷地、離散地

穿插歷史素材的方式，進而將數學史融合於學校教材之中。此項任務需由教育研究者和歷史學者雙方的相互配合方能竟其功。也因此與會人士對於數學史家如何看待這個問題感到興趣。另外來自美國的數學教育學者 Annie Seldon 提出一個相當關鍵性的問題：是否有任何證據顯示數學史在數學教學中的確是有效的？(Is there any evidence showing that history of mathematics is effective in the teaching of mathematics？)。我相信這個問題也是在 HPM 這個領域的學者所關心的。在現今教育研究講究方法論的潮流之中，沒有實驗證據支持的論證總欠缺說服力。蕭文強教授也隨即坦言指出，除能夠改善學生對數學的學習態度外，目前的確無足夠的實驗證據，顯示數學史能夠增進學生在數學考試中的表現。Annie Seldon 和其先生 John Seldon 是相當活耀的數學教育研究拍檔。在我所讀過他們的文章當中，似乎不曾見到他們提過有關數學史方面的話題。因此，對於 Annie Seldon 的提問我個人有點訝異。會後的 coffee break 我進一步向蕭教授與 Masami Isoda 請教他們對此事的看法。Isoda 認爲數學史的功效宜以質的研究方式進行觀察方能顯現。蕭教授則強調數學史與數學教材的整合，對學生的影響往往是長期的，不適宜以當今的教育研究法於短時間內檢驗出來。在與他們的對話當中，引發了我更大的興趣去找尋適當研究方法，以便彰顯數學史於教育上之應用價値。

希臘之行的另一大斬獲，是終於見到了 Alan Schoenfeld。關於數學解題（problem solving）的研究，始於 George Polya，而在 Alan Schoenfeld 手中發揚光大。Schoenfeld 以其數學家的觀點，在 1980 年代對於學生的解題行爲做了仔細的觀察分析。他發現學生解題能力的貧乏，與他們所擁有的數學知識之多寡並無直接關聯。影響解題表現的兩大關鍵，是解題者的後設認知能力（metacognition）與對數學的信念（mathematical beliefs）。後設認知是一個人讀取腦中資料庫的的一種行爲表現。縱使一個人的數學知識豐富，如果不具備良好的後設認知能力，面對不熟悉的問題時，他（她）的解題行爲也是宛如生手一般，盲目嚐試、毫無章法。而數學信念是指一個人對整體數學知識的觀點，對『什麼是數學』的一種認知。根據 Schoenfeld 的觀察，這種認知與觀點對於解題者的行爲有著決定性的影響。例如，假使學生認爲數學解題只是一種套用公式的歷程，那他們的解題行爲則較僵化，傾向於回憶公式。反之，學生們如果將數學解題視爲個人創意的表現，那他們的解題表現將趨於靈活，展現彈性。Schoenfeld 的結論相當程度地影響 1990 年代對於數學解題的學習與教學的研究走向。我的博士論文一方面建築在數學史的研究上，另一方面即立基於 Schoenfeld 的論證。可是，從一些教育研究者的觀點來看，Schoenfeld 的研究缺少信度與效度。由於他的寫作風格，迴異於一般強調樣本取樣、問卷發展與研究方法的教育論文，因此也招惹來一些批評。當我提出我的論文計劃時，一位口試委員即對於 Schoenfeld 的研究內容不甚贊同，而要求我做相當程度的修改。然而對我而言，部份嚴謹的教育研究論文或許骨架紮實，然往往在做結論時僅止於表面琢磨。而 Schoenfeld 的報告卻是直扣問題核心、句句血肉。當我以『受害者』身分，向 Schoenfeld 提及部份教育學者對他研究內容的批評時，他並不以爲然。他認爲他不僅從不同角度，去觀察學生的解題行爲與觀點，而且所使用的問卷皆具有相當的信度與效度（雖然沒有將數據報告出來）。不過，他也指出：有些問卷研究縱使具有效度與信度，卻是毫無意義。我進一步向他請益：這是否由於具數學背景與具教育背景的學者心中有著不同的『研究典範』？他同意這一點並認爲這兩個領域的學者應有更多的交流。Schoenfeld 並且馬上提供了兩篇他的文章以作爲補充說明。他的平易近人與對晚輩的熱心指導確實具有大師風範。由於他女兒身染重病，Schoenfeld 平常並不常長途跋涉參與各項會議。我在美國參加了幾次會議想見他一面皆不可得，想不到首次碰頭卻是在那遙遠的克里特島。

參與這次 ICTM-2 會議，確實激發出不少研究的火花。若說有什麼遺憾的話，那就是由於時間的緊迫無法遊覽雅典市區。更由於船期與大會議程的衝突而未能搭船出海，優遊於那湛藍的愛琴海上，踏訪傳說中具有全世界最美麗日落的聖托里尼島。然而，綜觀此次希臘之行，雖少了點靈性的洗滌，卻多了點智性的豐腴。希臘！讓咱們相約下次見面的日期。

第五卷索引

HPM 相關

數學史

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail** 至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng**