HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（實踐國中）唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）
陳鳳珠（土城中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生） 陳啓文（中山女高）彭良禎（麗山高中）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第五卷 第十一期 目錄（2002年11月）

八百歲的《計算書》

台師大學數學系　洪萬生教授

初版問世於 1202 年的斐波那契 (Fibonacci) 經典作品《計算書》(*Liber Abaci*) 已經八百歲了。今年，除了義大利的數學史家爲了它舉辦一個紀念研討會之外，最有價值的慶祝方式，莫過於本書英文譯本的出版：Laurence E. Sigler 的 *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonaardo Pisano's Book of Calculation*。本書的及時現身，誠然是國際數學史界的一大盛事，因爲它讓我們得以『貼近』這一珍貴的數學典籍。L.E. Sigler 最近辭世，不及見到本書誕生，或許不無遺憾。然而，他在 1987 年也曾出版斐波那契的《論平方數之書》(The Book of Squares) 英譯，對於我們具體還原十三世紀西歐數學史，卻早已是不可或缺的憑藉了。

本書的名銜，一直都被誤解爲討論『算盤』的書籍。誠然，它直譯成英文，就是 “Book on Abacus”，從而譯成中文，就成了不折不扣的『算盤書』了。不過，由於 “abacus” 的前身 “abaci” 在十三世紀拉丁世界中『很弔詭地』是指不利用算盤的一種計算方法。這可以解釋何以當時的 “maestro d'abbaco” 是指直接利用印度數碼而非算盤來從事計算的師傅。從而，在十三世紀之後的義大利各個商港城邦內，“school of abaco” 也就專門傳授這種計算技藝了。因此，Sigler 建議本書的書名應該譯成『計算書』(Book of Calculation) 才是。其實，這是一本介紹印度 - 阿拉伯數碼及其利用筆算的演算法則 (algorithm)，其中根本看不到算盤之類的計算器。請徵之於本書第一章開宗明義的頭兩句話：

> 九個印度數字為：9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1。就像下文將要演示的，任意數目都可以利用這些，以及阿拉伯人稱作 “zephr” 的記號 0，寫出來。

還有，如果讀者有機會細按本書內容，就可以得知它是一部有關十三世紀算術、代數與解題的百科全書。它在十三世紀西歐數學史上的意義，遠遠地超過所謂『斐波那契數列』(Fibonacci sequence) 之盛名。後者在數學普及書籍中的廣爲傳頌，雖然讓斐波那契得以聲名大噪，但是，相形之下，缺乏本書的映照，十三世紀的西歐數學面貌，卻始終藏在長夜漫漫的中世紀世界之中，無法現身以便提醒我們它與近代（十六、七世紀）西方數學的連結。

有關斐波那契及其著作如《論平方數之書》(The Book of Squares) 及本書，本刊曾在第四卷第一期、第四卷第四期，總共刊載了三篇文章分別是：拙文〈當斐波那契碰到孫子〉、

蘇意雯的〈除了兔子之外－談斐波那契〉與葉吉海的〈斐波那契的數論研究〉。在第一篇中，我試圖以『一次同餘組』vs.『物不知數題』爲例，說明數學文化交流中的優先權論述之複雜性。後兩篇則是『數學史文本討論班』的具體成果，那是我們好好地讀了《論平方數之書》之後，所提供的簡短報告。至於我們對他的生平的有限資訊，就請前述蘇意雯或葉吉海的文章吧！

爲了讓大家對本書內容有一個初步的印象，我們將他的目錄轉述如下，供讀者參考。至於比較細緻的內容介紹，則只有留待他日了。

1. 這裡開始第一章 (Here Begins the First Chapter)
2. 論整數之乘法 (On the Multiplication 0f Whole Numbers)
3. 論整數之加法 (On the Addition of Whole Numbers)
4. 論從大數減去小數 (On the Subtraction of Lesser Numbers from Greater Numbers)
5. 論整數之除法 (On the Divisions of Integral Numbers)
6. 論整數與分數之乘法 (On the Multiplication of Integral Numbers with Fractions)
7. 論數目與分數加、減、除以及化簡分數成爲單位分數 (On the Addition and Subtraction and Division Of Numbers with Fractions and the Reduction of Several Parts to a Single Part)
8. 論利用主要方法（按即比例法）尋找商品的價值 (On Finding The Value of Merchandise by the Principal Method)
9. 論商品與類似物件的交換 (On the Barter of Merchandise and Similar Things)
10. 論公司及其股東 (On Companies and Their Members)
11. 論貨幣之成色 (On the Alloying of Monies)
12. 這裡開始第十二章 (Here Begins Chapter Twelve)
13. 論 Elchataym 法以及如何利用它解決幾乎所有的數學問題 (On the Method of Elchataym and How with It Nearly All Problems of Mathematics Are Solved)
14. 論平方、立方根的求法以及它們的乘、除、減，論二項式、Apotomes 及其根的處理 (On Finding Square and Cubic Roots, and on the Multiplication, Division, and Subtraction of Them, and On the Treatment of Binomials and Apotomes and their Roots)
15. 論相關的幾何法則、代數與 Almuchabala 的問題 (On Pertinent Geometrical Rules And on Problems of Algebra and Almuchabala)

參考文獻：

李文林 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。

洪萬生 (2001).〈當斐波那契碰到孫子〉，《HPM 通訊》4(4): 1-2。

葉吉海 (2001).〈斐波那契的數論研究〉，《HPM 通訊》4(4): 6-9。

蘇意雯 (2001).〈除了兔子之外－談斐波那契〉，《HPM 通訊》4(1): 4-5。

Sigler, L. E. tr. (1987). *The Book of Squares*. New York: Academic Press, Inc.

Sigler, L. E. tr. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York / Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag.

韓國數學文本《九章術解》卷一校勘

中山女中 蘇俊鴻老師

第一節 導論

綜觀韓國南秉吉 (1820-1869) 的《九章術解》全書，可以將它視爲中國《九章算術》的註解。卷一的方田章共有三十八個問題，完全依照《九章算術》原有的排列順序，而未有任何變動。按題目的內容來看，大致可分成面積問題與分數的四則運算兩大類。在面積問題方面，討論的是方田 (長方形)、圭田 (三角形)、邪田 (直角梯形)、箕田 (梯形)、圓田 (圓形)、宛田 (球冠形)、[1]弧田 (半圓形) 及 環田 (環形) 等形狀的面積計算；而分數計算的部份則有約分、合分 (加法)、減分 (減法)、平分 (分數的平均數)、經分 (除法) 及乘分 (乘法) 等。

如此一來，不免引發我們對他寫作《九章術解》動機的好奇。此外，對比《九章算術》原有的劉徽注，我們也可以進一步考察南秉吉在不同的文化脈胳下，對於《九章算術》的解讀與注釋所蘊涵的意義。以下，筆者將針對《九章術解》卷一的方田章進行分析。

第二節 底本的探討

在中國，《九章算術》曾經佚失，直到乾隆三十八年，編纂《四庫全書》時，由戴震輯錄校勘出《九章算術》等七部漢唐算經。據近代數學史家的研究，戴震在輯錄過程，有著不少的錯訛、誤校，甚至冒充原文的情形。[2]由於《九章算術》一書傳入朝鮮極早，也是算學科必讀之一，因此，南秉吉在《九章術解》所採用的《九章算術》底本，或許可能爲戴震輯錄之前的版本。

爲了解決此一關於底本的問題，我們儘可能搜羅現存《九章算術》的版本來作一比較，其中包括有：南宋鮑澣之的《九章算術》刻本、戴震校的武英殿聚珍版《九章算術》、《四庫全書》中的文淵閣本《九章算術》、孔繼涵刻的微波榭本《九章算術》以及李潢著《九章算術細草圖說》(1820) 五種。(以下各書分別簡稱爲南宋本、聚珍本、四庫本、微波謝本與李潢本)。就卷一的內容比對，僅有幾處有文字差異，表列如下：

書名 題號\名	九章術解	南宋本	聚珍本	四庫本	微波榭本	李潢本
5、6	……約之幾何	……約之得幾何	……約之得幾何	……約之得幾何	……約之得幾何	……約之得幾何
15、16	平於	平於	平于	平于	平于	平於
27	邪田	邪田	斜田	斜田	邪田	邪田
29	踵廣[3]	踵廣	踵闊	踵闊	踵廣	踵廣
33	宛田	宛田	畹田	宛田	宛田	宛田

由上表可知，並沒有出現直接性的証據，可以看出《九章術解》與哪一個版本相近。但是，筆者在術文註解比對的過程，卻發現一項間接性的可能，那就是：南秉吉在『平分術』的註解上，所使用的文句形式與戴震〈《九章算術》卷一訂訛補圖〉對平分術補充的內容雷同，而上述五個版本中，只有微波謝本收入戴震的訂訛補圖。

第三節 南秉吉註解的風格與特色

由書名《九章術解》就可以看出南秉吉寫作此書的方式。他保留了《九章算術》中各卷的問題及術文，但卻刪除劉徽及李淳風的註解，而對每條術文提出他自己的解釋。不過，在仔細察考各卷的註解後，我們發現南秉吉所使用的數學知識以《數理精蘊》爲主，劉徽與李淳風的註解爲輔。[4]以下，筆者就卷一的內容來討論南秉吉註解的風貌，如上文所述卷一概分爲面積問題與分數運算兩部份。首先由分數運算談起。

以合分術爲例，《九章算術》中李淳風對術文名稱的說明是：

> 合分臣淳風按：合分知，數非一端，分無定準，諸分子雜互，群母參差，粗細既殊，理難從一。故齊其眾分，同其群母，令可相并。[5]

南秉吉的說明顯得簡潔許多：

> 合分合分者，兩分子相加也。若有兩分母不同，則用互乘法，以所得兩分子相加也。[6]

我們不難看出南秉吉是利用當時他所掌握的西方數學知識，重新對『合分術』這個名詞予以解讀，此種對比散見於《九章術解》全書，[7]這在術文的註解上也可以看出。以『合分術』的術文爲例：

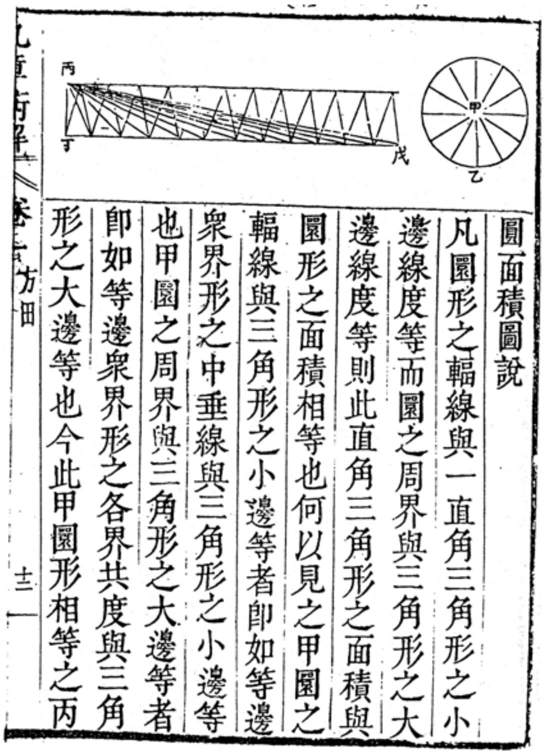
> 術曰：母互乘子，并以爲實，母相乘爲法。此法用互乘以齊其分也，兩分母相乘為共母數者。因兩分母不同，難以相加，故兩分母俱變為共母也。前分母乘後分子；後分母乘前分子，相加為共子數者。……實如法而一，不滿法者，以法命之。……其母同者，直相之。兩分母同者，即併兩分子為得數。若相加之數大於母數，則於所得數內減去母數為一整數也。或有三種者，兩分母相乘後，所得之數與所餘之分母相同，則直與相加，不必用互乘法也。[8]

如果將此段註解與《數理精蘊》下編卷二討論分數加法的敘述相比較，在文句內容上大體是一樣的。[9]不止於此，在分數運算(加、減、乘、除)上，各術文的註解幾乎是《數理精蘊》下編卷二的謄抄。[10]再推敲術文的解釋，我們也發現南秉吉著重在分數加法機械性的操作；他主要對分數的加法賦予程序性的說明，並在細節上加以提醒 (分母相同或不同)。這樣的進路，卻反而造成南秉吉忽視劉徽的註解對術文內在蘊涵的算理討論。[11]例如，劉徽在『合分術』的註解中，強調了分數在進行運算時狀態的變化之重大意義：

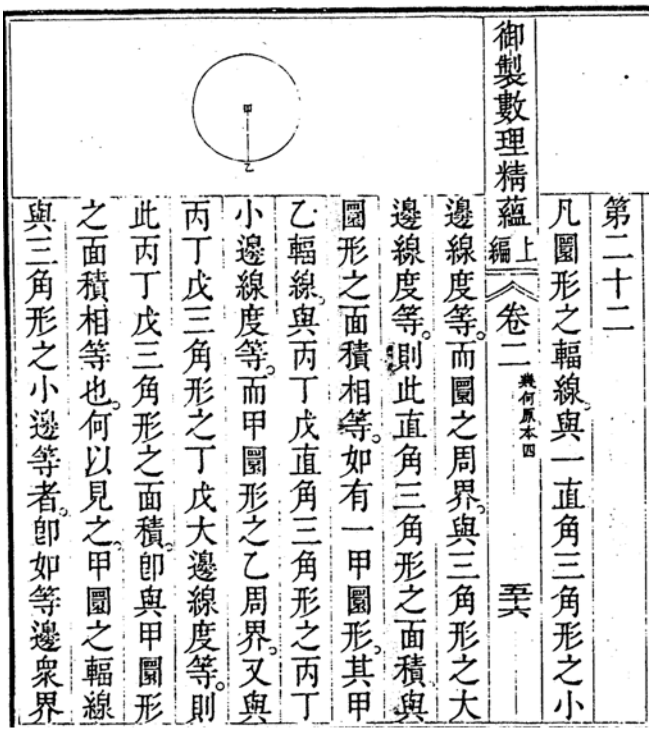
> 凡母互乘子謂之齊，群母相乘謂之同。同者，相與通同，共一母也；齊者，子與母齊，勢不失本數也。……乘以散之，約以聚之，齊同以通之，此其算之綱紀乎。[12]

這樣的差異性在分數運算的各術文上都相同，不再贅述。接著下來，讓我們來看看關於面積公式的部份。

與劉徽相同，南秉吉在圭田、邪田及箕田等圖形的註解上，也採取了『以盈補虛』的說法。但對於『圓田術』的註解，就非常引人側目。南秉吉特別在卷一的末尾，收錄〈圓面積圖說〉一文 (書影見圖一)，足見他對圓面積公式的重視。全文重


圓面積圖說
凡圓形之輻線與一直角三角形之小
邊線度等而圜之周界與三角形之大
邊線度等則此直角三角形之面積與
圜形之面積相等也何以見之甲圜之
輻線與三角形之小邊等者即如等邊
衆界形之中垂線與三角形之小邊等
也甲圜之周界與三角形之大邊等者
即如等邊衆界形之各界共度與三角
形之大邊等也今此甲圜形相等之丙

圖一


御製數理精蘊上編卷二 幾何原本四
第二十二
凡圓形之輻線與一直角三角形之小
邊線度等而圜之周界與三角形之大
邊線度等則此直角三角形之面積與
圜形之面積相等如有一甲圜形其甲
乙輻線與丙丁戊直角三角形之丙丁
小邊線度等而甲圜形之乙周界又與
丙丁戊三角形之丁戊大邊線度等則
此丙丁戊三角形之面積即與甲圜形
之面積相等也何以見之甲圜之輻線
與三角形之小邊等者即如等邊衆界

圖二

圖片說明：圖一爲《九章術解》的書影；圖二爲《數理精蘊》的書影。可以看出內容文句大致上是相同的。

點在於論証圓面積會與一個大邊爲圓的周長 (周界)，小邊爲圓的半徑 (幅線) 的直角三角形的面積相等。爲什麼呢？如圖一，將圓作幅射形切開成若干的小三角形(扇形)，作直線排列。會發現小三角形(扇形)的中垂線(即半徑)恰與直角三角形丙丁戊的小邊相等。接著，他証明直角三角形的大邊與圓的周長相等：

> 圓周界曲線也；等邊眾界形之界度直線也。……如以圓之內外，各設多邊眾界形，分為千萬邊，則逼圓界，最近將合而為一。[13]

南秉吉利用圓的內接與外切的正多邊形，若分割足夠多邊數的正多邊形時，會與圓周相當地密合，因此，直角三角形的大邊與圓的周長會相等。[14]

經過比對，筆者發現南秉吉的〈圓面積圖說〉一文，幾乎與《數理精蘊》上編卷二第二十二條圓面積公式的論述一致 (見圖二)。但與劉徽關於『圓田術』的註解相較來說，兩者是不同的。首先，劉徽是利用「圓出於方」的想法，由正方形面積來証明圓面積公式，並說明π=3 是圓內接正六邊形的近似值。再者，劉徽只利用圓的內接正多邊形來逼近圓周。此外，劉徽更利用他的論証方法，取一直徑爲 2 尺的圓，由圓內接正六邊形出發，分割成圓內接正十二邊形，求出邊長，再反覆程序，直到分割出圓內接正一百九十二邊形爲止，求出π的近似值 157/500。[15]劉徽更在圓田術後的『又術』重新利用求出π的近似值。[16]有趣的是，南秉吉雖在他的『圓田術』的註解中，說明各家所求π的近似值 (祖沖之、劉徽等)，但對在『又術』中，卻未給出更精密的近似值。

除了『圓田術』外，另一個值得注意的是『弧田術』的註解。劉徽認爲『弧田術』的公式過於粗疏，也提出了他的精密逼近值之求法。[17]南秉吉沒指出錯誤，倒給了一個挺特別的註解，請參考下文的現代符號『翻譯』:

因爲弧田是半圓形，所以，弧田面積＝1/2 圓面積。又當$\pi=3$時，

圓面積＝3/4 (圓徑)^2，(圓徑)^2＝4(半徑)^2，從而

圓面積＝3(半徑)^2。

由此，可導出：當『弧＝圓徑＝2 半徑；矢＝半徑』時

弧田面積 ＝ 3/2 (半徑)^2 ＝1/2 (弧矢＋矢^2)。

可見，南秉吉是以$\pi=3$的情形，來註解弧田面積。

第四節 南秉吉註解的評價

由上節的論述，我們可以看出南秉吉在《九章術解》卷一呈現兩個特點：(1)爲註解而註解；(2)以西方數學知識爲註解的主要工具。就第一點來說，南秉吉在《九章術解》所著重的，是將各條術文解釋清楚。以弧田術爲例，公式本身僅成立在$\pi=3$的特殊情形，並非正確的公式，南秉吉似乎未能察覺此點，給出一個能自圓其說的註解。此外，在術文的註解上，也不像劉徽會建立出一套理論架構，例如，在面積公式的註解上，劉徽對各個形狀面積公式有明顯的邏輯關係，用『以盈補虛』的概念加以貫穿。而南秉吉則是部分用劉徽的方法、部份用《數理精蘊》的方法。所以如此，當然與南秉吉註解時採取的態度有關，這正是第二點所要討論的。

南秉吉深受《數理精蘊》的影響無庸置疑，在註解每條術文時，南秉吉曾先找尋與《數理精蘊》是否互相對應的內容。若果肯定的話，他多半直接採擷相關內容，連文句用字都大同小異，圓面積圖說便是一例，也見於分數運算的術文註解上。不然，就會使用劉徽的註解，如圭田、邪田等面積公式；或是像平分術的註解，則採用戴震的說法。原本南秉吉利用《數理精蘊》的數學知識來詮釋《九章算術》的各條術文，值得史家至億。不過，由卷一的內容看來，除了將相關的題材謄抄當成註解外，卻不見南秉吉個人的創見或是心得。例如，圓田術選擇用《數理精蘊》內容來作爲註解，它與劉徽的圓田術的優劣比較付之闕如，不免讓人懷疑南秉吉的數學素養。這個懷疑也在南秉吉對某些名詞定義上，掌握得不是很好可以看出。在『經分術』的定義上，南秉吉寫道

經分者，即零分除零分也。

零分在《數理精蘊》中係指真分數而言，但此處的除法運算並不限於真分數。另一個例子，則是在『環田術』上，經比對《九章術解》有一大段的術文被刪去，據筆者的推測，可能南秉吉誤爲是劉徽的註解，而將之刪除。[18]

總括來說，南秉吉企圖利用《數理精蘊》的數學知識重新註解《九章算術》的用心，值得我們肯定，例如分數運算的註解上，筆者就認爲對初學者而言，南秉吉(或是《數理精蘊》)的說明顯得簡單，容易上手。但在消融《九章算術》本身的數學知識與《數理精蘊》的數學知識上，顯得有些力有未逮。以上是筆者針對《九章術解》卷一內容校勘、解讀所得的粗略看法，仍待其他各卷的分析後，才能有更加完整且全面呈現《九章術解》的真實風貌。

註解：

1. 宛田是什麼形狀？自清朝李潢《九章算術細草圖說》解釋成球冠形後，後繼學者多以此

爲圭臬。直到近來才有學者提出不同的看法，如李繼閔便認爲宛田是『圓田』將其它『中央隆高』而成，形狀應如土堆、丘陵或墓冢之類。因此在《九章算術》方田章中，宛田術列於圓田術之後，便是認爲此兩種形狀相近之故。請參閱李繼閔《《九章算術》及其劉徽注研究》（台北：九章出版社，1993），頁 277-285。

2. 對於《九章算術》的版本問題可參見郭書春，《九章算術譯注》（瀋陽：遼寧教育出版社，1998），頁 38-45。
3. 但此題的答案，《九章術解》不正確。
4. 朝鮮在正祖時期 (1777~1800)，李承壎曾帶回《幾何原本》與《數理精蘊》，因此，南秉吉熟知《數理精蘊》的可能性極大。見李儼〈從中國算學史上看中朝交流文化〉一文，收入《李儼、錢寶琮科學史全集》（瀋陽：遼寧教育出版社，1998）第八卷，頁 562-563。
5. 引自郭書春，《九章算術譯注》，頁 203。
6. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 263。
7. 這樣的論述態度在南秉吉其他數學著作也可以看見，如《無異解》一書。參見洪萬生(2000)〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉一文，收入《科學教育學刊》第八卷第三期 (2000)，頁 215-224。
8. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 263-264。
9. 參見清 • 康熙御制，《數理精蘊》（收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第三分冊，鄭州：河南教育出版社，1994），頁 209-212。
10. 唯一的例外是『平分術』的註解，可能是在《數理精蘊》中找不到相對應的章節。據筆者比對的結果，南秉吉可能是用了戴震〈《九章算術》卷一訂訛補圖〉的內容，收於《九章算術》，孔繼涵《微波榭叢書》的版本。
11. 關於劉徽的數學體系，可參閱郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》（台北：明文書局，1994），頁 301-322。
12. 引自郭書春，《九章算術譯注》，頁 203 頁。
13. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 282。
14. 圓面積等於一特殊直角三角形的面積的觀點，最早是阿基米德對於圓面積公式証明所採取的策略。此處論述並不夠嚴密，可參閱阿基米德在《論圓的測量》(On the Measurement of the Circle)書中對圓面積公式的証明。事實上，阿基米德也求出 π 的近似值。文本可見 Ronald Calinger (ed.), *Classics of Mathematics*（Englewood Cliffs, New Jersey, 1995）, pp.137-141.
15. 參見郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》，頁 234-242。
16. 《九章算術》在『圓田術』中，也有二個近似公式，都是 π=3 時成立。分別是『徑自相乘三之四而一』及『周自相乘十二而一』。
17. 參見郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》，頁 243-247。
18. 被刪去的術文爲：『密率術曰：置中、外周步數，分母、分子各居其下。母互乘子，通全步，內分子。以中周減外周，餘半之，以益中周。徑亦通分內子，以乘周為密實。分母相乘為法，除之為積步，餘，積步之分。以畝法除之，即畝數也。』

《九章術解》卷二校勘

土城中正國中　陳鳳珠老師

第一節　導論

《九章術解》是南秉吉針對中國重要數學著作《九章算術》所作的注解。該書內容包括《九章算術》各卷術文與南秉吉的注文。因此，在深入探討南秉吉於《九章術解》卷二〈粟米〉的注解之前，我們有必要先對《九章算術》卷二的內容有初步的了解。

該卷介紹各種比例算法，共五種，[1]有 46 個例題。正如劉徽道：「以御交質變易」，亦即是處理物價貴賤、賜予穀物及繳納稅賦等等的問題。[2]值得注意的是，該卷所提出用來解決由今有物的數量，以及今有物與所求物的比率，求所求物的數量之正比例算法—「今有術」：

所求數＝（所有數 ×所求率）/ 所有率

亦即：它等價於印度的「三率法」與《數理精蘊》中的「四率比例」。[3]南秉吉正是利用「四率比例」來注解「今有術」，並且引用部分《數理精蘊》的內容。此外，《九章術解》還介紹用來解決以固定錢數，買定量且價錢不同的物品之算法 --「其率術」與「反其率術」。不過，劉徽和李淳風的注文，卻成為南秉吉理解這兩種算法的主要依據（見第三節）。

接著，本文將根據《九章術解》的內容，分別針對南秉吉所可能參考的《九章算術》底本、南秉吉注解的特色及其評價，作深入的分析與探討。

第二節　底本的探討

既然我們要探討南秉吉對《九章算術》術文所作的注解及其特色，自然我們有必要對他所參考的《九章算術》之可能底本作進一步的分析。下表是《九章術解》卷二〈粟米〉中的術文與《九章算術》相關算書所作的比較，以釐清南秉吉所可能依據的《九章算術》底本，其中包括有南宋鮑澣之刻的《九章算術》、戴震校的武英殿聚珍版《九章算術》、《四庫全書》中的文淵閣本《九章算術》、孔繼涵刻的微波榭本《九章算術》、李潢著《九章算術細草圖說》（1820），[4]共五種（以下各書分別簡稱為南宋本、聚珍本、四庫本、微波謝本與李潢本）：

書名 題號\名	九章術解	南宋本	聚珍本	四庫本	微波榭本	李潢本
粟米之法 （列位方式）	兩列	兩列	一列	一列	兩列	兩列
22（術曰）	十二	十二	十二	十二	十三	十二
23（術曰）	二十一	二十一	二十一 加注	二十一 加注	二十一	二十一
34（術文）	五百三	五百三	五百二	五百二	五百三	五百三
37 （術文與劉徽注）	經率術 此術猶經分	無	無	無	經率術 此術猶經分	經率術 此術猶 經分

由上表可知，《九章術解》與《九章算術》各版本、相關算書的關係如下：

（一）《九章術解》中「粟米之法」的列位方式，與微波謝本、李潢本同為兩術列成一行，武英殿聚珍版與文淵閣四庫本則均將之列成一行。

（二）在《九章算術》第 23 題術曰：「以御米求粟五十之二十一而一」之後，武英殿聚珍版與文淵閣四庫本皆加注「案原本作二十二而一今改正」；《九章術解》與微波榭本、李潢本則均無。

（三）《九章術解》中的第 34 題答曰：「一斗三百四十五錢五百三分錢之一十五」，與微波榭本、李潢本相同，然而，武英殿聚珍版與文淵閣四庫本卻訛作「一斗三百四十五錢五百二分錢之一十五」。

（四）《九章術解》與微波榭本、李潢本相同，第 37 題中皆記有「經率術曰」，並且均載劉徽注「此術猶經分」。

總的來說，南秉吉著《九章術解》所根據的底本與微波榭本、李潢本最爲相近。不過，從《九章術解》的第 22 題術曰：「以糲米求粟二十五之十三而一 三當作二」，我們可以發現，南秉吉著《九章術解》所根據的底本，此題術文應爲「二十五之十三」，而上述版本中僅有孔刻本符合。因此，根據《九章術解》與上述各版本卷二內容的比較，可以得知，《九章術解》的底本與孔刻本最爲接近。

第三節　南秉吉注解的特色

南秉吉注解《九章算術》卷二〈粟米〉的特色之一，就是以「四率比例」來注解「今有術」及其相關的問題。特別的是，南秉吉《九章術解》關於「今有術」的注文與《數理精蘊》的相當接近，兩者的關聯可於見下表：

書名／說明	《九章術解》	《數理精蘊》[5]
解釋「今有術」的方式一樣	利用「異乘同除」、「四率比例」	利用「異乘同除」、「四率比例」
關於「異乘同除」的解釋完全相同	以原有之兩件相除，故為同除；以今有之一件乘之，故為異乘。	以原有之兩件相除，故為同除；以今有之一件乘之，故為異乘。
說法類似	以原有之兩件為一率、二率，以今有之一件為三率，而所求之一件為四率也。	以先有之二件為一率二率，今有之二件為三率、四率。
說法類似	一率比二率如三率比四率。	一率比二率即如三率比四率。

由此可知，南秉吉注解《九章算術》卷二「今有術」的主要參考依據應該是《數理精蘊》。同時，相較於於《九章算術》的「今有術」，他對於《數理精蘊》的「四率比例」應該是更爲熟悉才是。此外，南秉吉對於劉徽與李淳風所作「今有術」與「經率術」的相關注解，也少有著墨，僅有在注解「經率術」時，引用了劉徽注文：「此術猶經分」，所以，劉徽與李淳風兩人關於「今有術」的注解，並不是南秉吉理解的主要依據，自然也就甚少出現在《九章術解》卷二的注文中。

然而，劉徽與李淳風兩人關於《九章算術》卷二的注解，在《九章術解》中是否完全看不到？答案是否定的。其實，南秉吉在注解《九章算術》卷二中的「其率術」與「反其率術」時，反而是將劉徽與李淳風的注解作爲主要的參考，並引用了兩人部分注文。舉例來說吧，南秉吉在注解「其率術」術曰時，就引述劉徽的注文：

實餘之數，即是貴者之數，故曰實貴。[6]

此外，南秉吉注解「其率術」術曰：

以貴者減法，則其餘為賤者之數，故曰法賤。[7]

也與劉徽的注文：「今以貴者減之，則其餘悉是賤者之數，故曰法賤也」相仿；[8]還有，南秉吉關於「反其率術」的注解：

其率者，錢多物少，以物為法、錢為實；反其率者，錢少物多，以錢為法、物為實，與其率相反，故曰反其率也。[9]

其中的每一字句，也均出自李淳風的注文，並且僅是排列順序不同而已。[10]另一方面，南秉吉在注解「其率術」與「反其率術」時，分別所引述的例子：「如四十八箇、箇價七錢；三十箇、箇價八錢」與「以錢六百除羽二千一百，得三實餘二百四十，是謂三䠓復可增一䠓」，[11]也與劉徽的注文相同。由此可見，南秉吉在注解「其率術」與「反其率術」時，是相當倚重劉徽與李淳風兩人的注文，同時，兩人的注文也應該是南秉吉理解「其率術」與「反其率術」的主要依據。

總之，南秉吉注解「今有術」與「其率術」、「反其率術」的參考依據，是截然不同的。他以《數理精蘊》的「四率比例」去注解《九章算術》的「今有術」，從而，《數理精蘊》的相關論述，自然也是南秉吉的主要依據。不過，劉徽與李淳風的注文，卻是他理解「其率術」與「反其率術」的重要依據，這或許是因爲南秉吉並沒有在他所熟悉的算書（包括《數理精蘊》）中，找到與「其率術」、「反其率術」相通的數學知識吧。

總的來說，南秉吉注解《九章算術》卷二內容的特色，我們可以歸納爲以下兩點：

（一）倚重《數理精蘊》中熟悉的數學知識。譬如，他以《數理精蘊》中的「四率比例」去注解《九章算術》卷二的「今有術」與「經率術」。

（二）當他無法利用熟悉且相通的數學知識去理解《九章算術》卷二內容時，則回歸至劉徽與李淳風的注解內容。例如關於「其率術」與「反其率術」，南秉吉即是利用劉徽與李淳風的注文，作爲理解與注釋兩術的依據。

第四節　南秉吉注解的評價

如前一節所述，南秉吉利用《數理精蘊》的「四率比例」，去注解《九章算術》卷二的「今有術」與「經率術」。另外，他卻以劉徽與李淳風的注文，作爲理解「其率術」與「反其率術」的重要依據。因此，南秉吉如何去協調中西法之間的異同，自然是我們評價他注解《九章算術》卷二的重點。

大致而言，南秉吉將中法「今有術」與西法「四率比例」兩算法，作了詳盡的說明與聯結。一開始，他就十分強調兩算法之間的關聯，譬如「今有術」注：

此異乘同除亦即四率比例。[12]

以及「術曰」：

以所有數即二率乘所求率即三率為實，以所有率即一率為法，實如法而一一者即今有之四率也，以一率與二率之比，即如三率與四率之比。[13]

另外，他在第一題術曰之後，也再次說明兩算法之間的關聯：

以粟率五為所有率，即一率也；今粟一斗為所有數，即二率也；糲米率三為所求率，即三率也；糲米六升為今有數，即四率也。[14]

換言之，南秉吉的注解策略，是讓讀者透過西法的「四率比例」去理解中法的「今有術」，這同時也顯示出南秉吉自己的認知情面向

然而，因爲南秉吉在注解《九章算術》卷二的內容，所根據的數學知識體系並不相同的，難免出現前後不一致的說法。譬如，他在注解「經率術」說道：

此術猶經分。經分，即以零分乘零分者也。[15]

這句話在算理上明顯出現不一致。前一句「此術猶經分」是引用劉徽的注文，[16]意即「經率術」如同「經分術」,「經分」就是分割一個分數，被除數是分數的除法；不過，後一句「經分，即以零分乘零分者也」則是利用《數理精蘊》的「零分」來注解「經分」,「零分」意指真分數，「零分乘零分」即是真分數的乘法，[17]這顯然與「此術猶經分」矛盾。換句話說，南秉吉在注解《九章算術》卷二時，未能兼顧各卷算理間的關聯，這是十分可惜的。

總的來說，南秉吉能夠充分理解《九章算術》卷二的各個算則，同時，在個別算法與算題的注釋工作也頗爲稱職。不過，他卻忽略在各卷內容之間的一致性。若將之與劉徽的注文相較，南秉吉比較重視算法的交代與說明，主要幫助讀者學會利用算法去解題，解題方法是主要的重點，正好與書名中的「術解」作呼應，主要完成解讀術文的工作而已。相反地，劉徽則是著重於一般性原理的說明、算則應用的提示，[18]並且分析各種數學概念、方法、命題之間的關係之分析。[19]不過，我們必須指出：由於兩人的注解《九章算術》的目的不同，自然在注解策略與方法有明顯差異，因此，若要給予南秉吉《九章術解》適當的評價，那麼，他著書的目的當然是重要的參考依據。以上僅是筆者個人針對《九章術解》卷二內容分析而得的粗略看法。

註解：

1. 亦即今有術、經率二術、其率術、反其率術。
2. 參見郭書春，《九章算術譯注》（瀋陽：遼寧教育出版社，1998），頁 80。
3. 參見郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》（台北：明文出版社，1995），頁 13。
4. 各算書分別如下—

   南秉吉，《九章術解》，收入金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(6)》，漢城：驪江出版社，1985。

   南宋 • 楊輝，《詳解九章算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。

   魏 • 劉徽著、唐 • 李淳風釋，武英殿本《九章算術》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。

   魏 • 劉徽著、唐 • 李淳風釋，《九章算術》，收入文淵閣《四庫全書》（1781）。

   魏 • 劉徽著、唐 • 李淳風釋，《九章算術》，收入孔繼涵《微波榭叢書》（1773）。

   清 • 李潢，《九章算術細草圖說》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。
5. 引自清 • 康熙御制，《數理精蘊》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第三分冊，鄭州：河南教育出版社，1993。
6. 參見南秉吉，《九章術解》頁 304 與郭書春，《九章算術譯注》，頁 244。
7. 引自南秉吉，《九章術解》頁 304。
8. 引自郭書春，《九章算術譯注》，頁 244。
9. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 305。
10. 參見郭書春，《九章算術譯注》，頁 245。

11. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 304 與 306。
12. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 286。
13. 同上。
14. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 287。
15. 引自南秉吉，《九章術解》，頁 300。
16. 參見郭書春，《九章算術譯注》，頁 242。
16. 參見清‧康熙御制，《數理精蘊》（收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第三分冊，鄭州：河南教育出版社，1993），頁 216。
18. 參見郭書春，〈九章算術》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊（鄭州：河南教育出版社，1993），頁一 79-93。
19. 參見郭書春，《古代世界數學泰斗—劉徽》，頁 136。

《赤水遺珍》初探

桃園縣立青溪國中　王文珮老師

一、前言

《赤水遺珍》由清梅轂成（1681-1763）所著，收錄於《梅氏叢書輯要》第六十一卷。《梅氏叢書輯要》共有六十二卷，由梅轂成集其祖父梅文鼎（1633-1721）著作的輯錄，在 1761 年由梅氏家族成員共同編輯完成，例如梅轂成之子鈁及女婿胡驊先也都參與校錄的工作。《梅氏叢書輯要》的內容有天文、數學共二十五種，而梅文鼎的數學著作有十三種，其中最末兩卷《赤水遺珍》及《操縵卮言》則是梅轂成自己的作品。

《赤水遺珍》包含了天文及數學兩方面的知識，其中校勘了一些古籍的錯誤，也介紹西法傳入的天文、數學知識，並對「天元一即借根方解」作出重要註腳，其中策略則是選錄失傳多時的天元術所解的宋元數學問題，改以新近傳來的「借根方法」解之。

二、內容說明

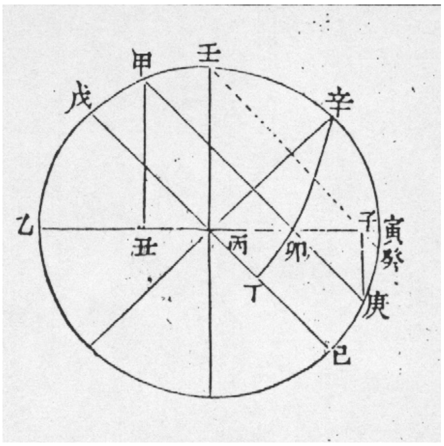
本書首先是針對「方田度里」，更正王制註疏中的錯誤。將測量單位變小時，所測之實際數值與之成反比的概念，利用三率法求出相對的面積及長度，並給出正確的數值。

而「測北極出地簡法」一題中，則利用測量某一恆星在一段時間內（三十刻）所移動的角度（七十度），以求得北極距離地平面的高度：

設至一處不知節候。惟測一恆星，自出地平至正午，歷三十刻，其高七十度。求北極高。

題目中所觀測的恆星自「卯」至「甲」共費時三十刻，所行之角度爲 70^{o}，欲求北極距

離地平面的高度（即辛寅的度數）爲何？根據以上文本中的附圖，我們將梅瑴成的作法整理如下：



1. ∠戊辛丁＝∠甲辛丁＝30 刻＝$112^{o}30'$
2. 戊丁＝大矢（∠戊辛丁）＝大矢（$112^{o}30'$）＝1＋正矢（$22^{o}30'$）＝1＋0.38268＝1.38268
3. 丁己＝大矢（∠丁辛己）＝1－正矢（$22^{o}30'$）＝0.61732
4. 甲丑＝正矢（甲乙）＝正矢（70^{o}）＝0.93969
5. ∵△甲卯丑～△子卯庚

得 $\dfrac{甲丑}{子庚}=\dfrac{甲卯}{卯庚}=\dfrac{戊丁}{丁己} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{0.93969}{子庚}=\dfrac{1.38268}{0.61732}$

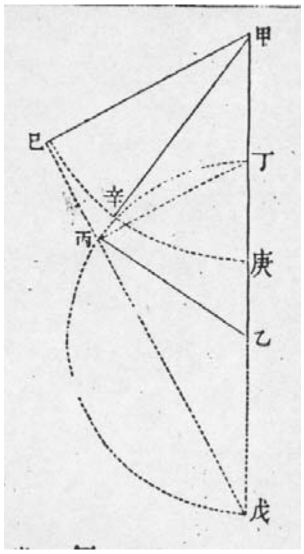
∴ 子庚＝0.41953，查表得：寅庚＝$24^{o}48'17''$

寅癸＝寅庚－癸庚＝$24^{o}48'17''$－ 20^{o}＝$4^{o}48'17''$

6. 辛壬＝$\frac{1}{2}$壬辛癸＝$\frac{1}{2}$（壬寅＋寅癸）＝$\frac{1}{2}$（$90^{o}+4^{o}48'17''$）＝$47^{o}24'8''$

∴辛寅＝90^{o} －辛壬＝$43^{o}35'52''$

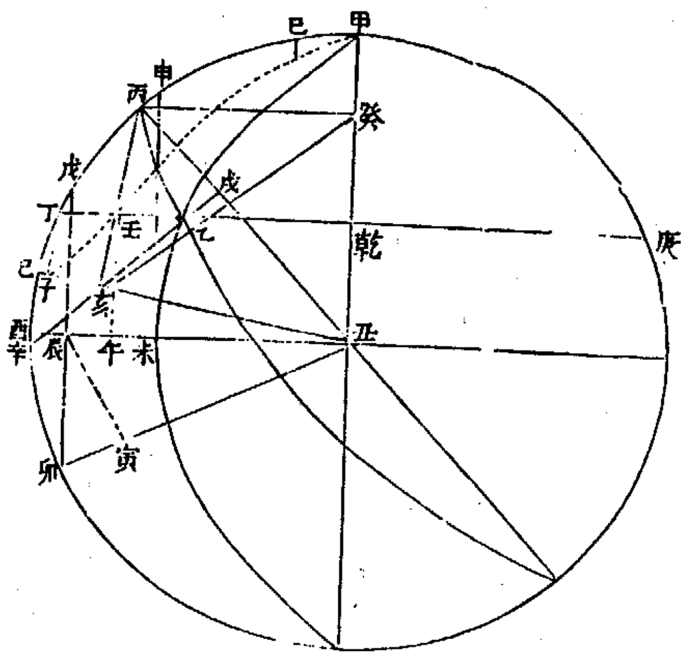
接下來談的，是「三角法用外角切線解」，已知條件爲：「如甲乙丙三角形，有甲乙邊，有乙丙邊，有乙角。」欲求甲、丙兩角的度數。作法如下：



1. 以乙爲圓心，乙丙爲半徑作半圓，得乙丙＝乙戊＝乙丁。
   故甲戊＝甲乙＋乙丙，甲丁＝甲乙－乙丙
2. 作 丙丁＝丙乙，則∠乙丁丙＝∠乙丙丁
   ＝$\frac{1}{2}$（180^{o}－∠乙）＝半外角
3. 作 甲巳 平行 丁丙，得直角△戊丁丙～直角△戊甲巳（句股形）
   且 ∠巳甲戊＝∠乙丁丙＝半外角。
   並令∠己甲丙＝∠甲丙丁＝半較角
4. 以甲爲圓心，甲巳爲半徑畫弧，得甲庚＝甲己，
   則巳戊爲∠巳甲戊之切線，巳丙爲∠巳甲丙之切線，
   ∵甲戊：甲丁＝巳戊：巳丙
   ∴甲戊：甲丁＝半外角之切線：巳丙
   得第四率巳丙，查表可得∠巳甲丙之度數。
5. 故∠甲＝∠巳甲戊－∠巳甲丙＝半外角－半較角
   ∠丙＝∠巳甲戊＋∠甲丙丁＝半外角＋半較角

本題若以現行中學數學的角度觀之，則多利用「餘弦定理」的代數方法求解，在此，則以幾何作圖的思維為主軸，亦不失為多元解題提供另一面向的思考方式。

相對於上一題平面三角的問題，接下來在「弧三角形三邊求角」題中，梅𠪢成特別註明乃因「友人見示，云西士所授而不知其用法故，特為解之。」本題已知弧三角中的兩邊及其夾角，欲求另兩角。（下圖已更正文本中代碼之誤。）



1. 令甲庚＝甲丁＝甲乙，且甲乙為甲乙丙弧三角形中最大的邊。
2. ∵正弦（甲乙）＝正弦（甲丁）＝丁乾
   正弦（甲丙）＝丙癸
   且丙辛＝丙乙，故正弦（丙乙）＝正弦（丙辛）＝辛戊
3. 令「巳」為庚甲丙辛的中點，
   則總弧＝甲乙＋乙丙＋丙甲＝庚甲丙辛，半總＝巳辛＝甲巳
4. 正弦（小邊較弧）＝正弦（甲巳－甲丙）＝正弦（丙巳）＝丙亥
   正弦（大邊較弧）＝正弦（甲巳－甲乙）＝正弦（甲巳－甲丁）
   ＝正弦（丁巳）＝丁子
5. 令申丙弧＝∠甲，故正弦（∠甲）＝正弦（申丙）＝申未
6. 取「戊」為申酉之中點，
   故正弦（$\frac{1}{2}$∠甲）＝正弦（戊酉）＝戊辰＝卯辰
7. ∵△癸丙亥～△丁子壬
   ∴（丙癸）:（丙亥）＝（丁子）:（丁壬）
   （丁乾）:（丁壬）＝（丑酉半徑）:（午酉）
8. ∵ 直角△丑辰卯～直角△辰寅卯
   ∴（丑卯）:（辰卯）＝（辰卯）:（寅卯）

   又 寅卯＝午酉，故 辰卯＝$\sqrt{丑卯\ \times 寅卯}$

9. 正弦（$\frac{1}{2}\angle$甲）＝辰卯，查表可得$\frac{1}{2}\angle$甲，即得$\angle$甲。

除本法外，梅瑴成在「又法」中提出以下另一算法：

1. （丙癸）:（丙亥）＝（丁子）:（丁壬）
正弦（甲丙）: 正弦（丙己）＝正弦（丁己）: 丁壬
正弦（甲丙）: 正弦（小邊較弧）＝正弦（小邊較弧）: 丁壬
$$\text{丁壬}=\frac{\text{正弦}(\text{丙己})\times\text{正弦}(\text{丁己})}{\text{正弦}(\text{甲丙})}$$
2. （丁乾）:（丁壬）＝（丑酉）:（午酉）
$$\text{午酉}=\frac{\text{丁壬}\times\text{丑酉}}{\text{丁乾}}=\frac{\text{正弦}(\text{丙己})\times\text{正弦}(\text{丁己})\times\text{半徑}}{\text{正弦}(\text{甲丙})\times\text{正弦}(\text{甲丙})}$$
3. （丑卯）:（辰卯）＝（辰卯）:（寅卯）
$$\text{辰卯}=\sqrt{\frac{\text{正弦}(\text{丙己})\times\text{正弦}(\text{丁己})\times\text{半徑}^{2}}{\text{正弦}(\text{甲丙})\times\text{正弦}(\text{甲丙})}}$$
$$=\frac{1}{\text{半徑}}\sqrt{\text{正弦}(\text{丙己})\times\text{正弦}(\text{丁己})\times\text{餘割}(\text{甲乙})\times\text{餘割}(\text{甲丙})}$$

但梅瑴成在「按此法」中表示，以上需要「三次疊乘，其數繁重」，反而「不如前法爲簡」，他喻其爲「欲示人以繡出之鴛鴦，而藏其金針耳。」

在本書的第二個重要內容，是梅瑴成對於「借根方」與「天元一」的對比。在「天元一即借根方解」中梅瑴成提到，他承蒙康熙皇帝授以借根方法後，對於西人稱之「阿爾熱八達」，其原名「東來法」，與「天元一」乃名異而實同，因此，乃呼應西學源自中國的主張：

> 竊疑天元一之術頗與相似，復取《授時歷草》觀之，乃渙如冰釋，殆名異而實同，非徒曰似之已也。夫元時學士著書，臺官治歷，莫非此物，不知何故，遂失其傳。猶幸遠人慕化，得得故物，東來之名，彼尚不能忘所自。

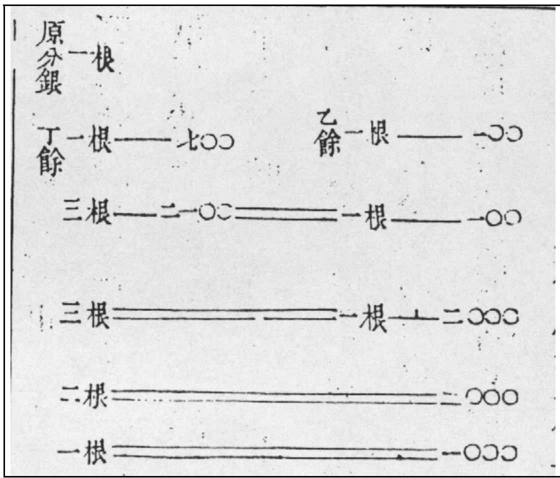
其後，在「先解借根方法」中說明「借根方」之名：

> 凡布算先借一根為所求之物，與借衰略相似。借根而并言方法，初人算雖只借根，但根乘根則成平方，根乘平方則成立方，以及屢乘至多乘方。俱所必用，故名之曰借根方法也。

並分別取一次方程及二次方程爲例，以借根方解之。在借根方中的加號以「多號」稱之，記爲「丄」；減號以「少號」稱之，記爲「一」；等號以「相等號」稱之，記爲「＝」。在「加減之，使歸於簡約」化簡等式兩邊的作法，則是相當於現今的「等量加、減法」原理。以第一題的一次方程爲例：

> 設丁乙二人出本經商，獲利均分。丁用過七百兩，乙用過一百兩，則乙之餘銀三倍於丁。問原分銀若干？

以下是借根方與現代符號翻譯的對照：



設原分銀為 X

則丁餘（X－700），乙餘（X－100）
得 3（X－700）＝（X－100）

$$3X-2100 = X-100$$

$$3X = X+2000$$

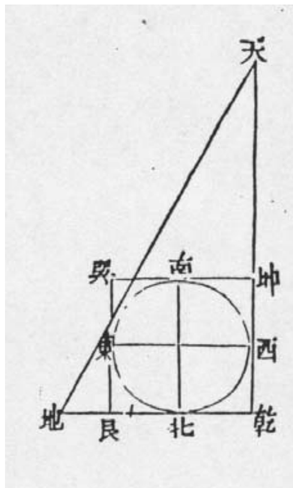
$$2X = 2000$$

$$X = 1000$$

請注意在「借根方」所使用的等號之長度特別地加長，可視其為天平的作用一般，而等號的兩邊即為天平的兩端。國中教師可引進此一文本於數學課堂上，為初學者強化學習方程式時等號兩邊相等的概念，或許亦有所助益。

接著，梅瑴成分別例舉「授時歷立天元一求矢術」、「餘句餘股求容圓徑」（引自《測圓海鏡》）、「三角形用弦較勾總求中垂線」（引自《四元玉鑑》）、「有弦與積求勾股」（引自《四元玉鑑》）、「圓田截積」（引自《算法統宗》）等題，以借根方法再為之重新解題。

試以其中的「餘句餘股求容圓徑」為例：「或問出西門，南行四百八十步有樹。出北門，東行二百步見之。問城徑幾步？答曰：城徑二百四十步。」利用天元術解之如下：（X 為城之半徑）



$(480-X)(200-X)$	$2X^2$
$X^2-680X+9600$	$2X^2$
$-X^2-680X+9600$	（與左相消）

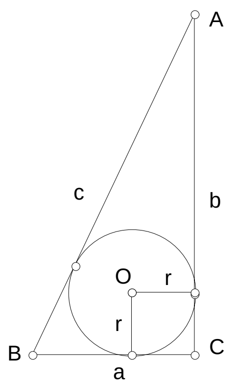
至於為何 $(480-X)(200-X)$ 會等於 $2X^2$ 呢？容筆者簡單證明之：

右圖中，圓 O 為△ABC 的內切圓，
r 為圓 O 的半徑，則：

$$r=\frac{a+b-c}{2},$$

句圓差＝a－2r＝a－（a＋b－c），

股圓差＝b－2r＝b－（a＋b－c）。



句圓差 × 股圓差

$=[a-(a+b-c)][b-(a+b-c)]$

$=ab-(a+b)(a+b-c)+(a+b-c)^2$

$=\frac{1}{2}[2ab-2(a+b)(a+b-c)+2(a+b-c)^2]$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+2ab+b^2-c^2-2(a+b)(a+b-c)+2(a+b-c)^2\right]$$

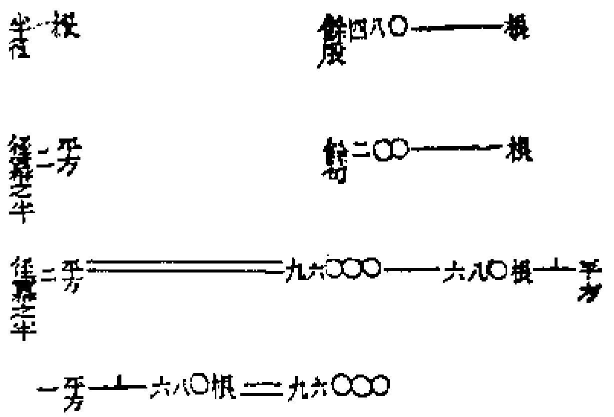
$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2-c^2-2(a+b)(a+b-c)+2(a+b-c)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)(a+b-c)-2(a+b)(a+b-c)+2(a+b-c)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a+b-c)\left[(a+b+c)-2(a+b)+2(a+b-c)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a+b-c)^2=2r^2$$

梅瑴成認爲：「其所謂減天元半徑及天元相乘皆虛數，並非先知半徑實數用以乘減，如顧箬溪之所云者。試以以借根方法求之，其理更明。」在此，他已明白道出當時之不理解天元術的情況，而必須藉由借根方法的協助加以說明。以下是梅瑴成以借根方法重解本題：



本書的第三個部分則是梅瑴成介紹傳教士杜德美的三個無窮級數展開式：

1. 「求圓徑密率捷法」：圓徑求周

   $\pi d=d\left(3+\frac{3\times1^2}{4\times3!}+\frac{3\times1^2\times3^2}{4^2\times5!}+\ldots\ldots\right)$

2. 「求弦矢捷法」之一：弧背求正弦

   $r\sin\alpha=a-\frac{a^3}{3!\times r^2}+\frac{a^5}{5!\times r^4}-\frac{a^7}{7!\times r^6}+\ldots\ldots\quad\left(\alpha=\frac{a}{r}\right)$

3. 「求弦矢捷法」之二：弧背求正矢

   $r\,\mathrm{vers}\alpha=\frac{a^2}{2!\times r}+\frac{a^4}{4!\times r^3}-\frac{a^6}{6!\times r^5}+\ldots\ldots\quad\left(\alpha=\frac{a}{r}\right)$

雖然在文中並沒有給出證明，但已能利用各級數求得圓周、弦、矢的近似值。在之後有明安圖、董祐誠、項名達和戴煦等人對此內容作更進一步的研究。

參考資料

李儼、杜石然 (1993).《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。
洪萬生 (2000).〈數學典籍的一個數學教學的讀法：以《赤水遺珍》爲例〉，收入《中國科技史同好》第一卷第二期（2000 年 7 月），頁 35-43。
劉鈍 (1997).《大哉言數》，瀋陽：遼寧教育出版社。
林倉億 (2002)《中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術》，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。

Information

「中學生做研究」研討會

台師大數學系碩士班 楊瓊茹

國立教育研究院籌備處訂於九十一年十二月二十、二十一日舉辦「中學生做研究」研討會，會中論文發表者以全國相關學科(文法、數理、藝術)的中學教師爲主，現身說法過去成功的教學經驗，評論人則以大學教授爲主。俾經由此次會議整合具體有效的教學經驗，以編製出版《中學生做研究》，提供全國學子及教育界人士參考。

「中學生做研究」研討會實施計畫的源起，乃是由於我國中學教育的內涵，在面臨教改以及社會與政治的重大變遷，科學內容與教育理念的結構重整之後，有必要作整體的重建。爲普及中學生做研究的各種要領，由各大學教授組成的學術研究團體【中華科際整合研究會】發起，協議諮請國立教育研究院籌備處結合各界資源主辦此一研討會。共同主辦單位有國立高雄師大暨附中、國立台南海事學校、國立彰化師大附工。

研討會實施計畫的方法，是由全國相關學科的中學教師擔任撰稿人，將其成功的教學經驗之精華、全國科展以及「小論文寫作比賽」的若干作品，加以匯集，筆之於書，提交研討會討論，再行修改、審查，以出版《中學生做研究》。其編製主要分爲文法、數理、藝術三大部分，各出一本書。撰稿人撰寫的主旨是「以研究來帶動學生，使更樂於學習」；呈現的形式以對話和舉列爲兩個主要原則。撰稿人於本次研討會所發表的文章，同意授權國立教育研究院籌備處，基於公共利益作爲學術研究資料及合理使用，不發稿費，惟著作權仍屬著作人所有。

研討會地點共有兩場，第一場在 12 月 20 日國立教育研究院籌備處，另一場在 12 月 21 日台灣大學法學院舉行。討論方式分爲甲、乙、丙三組三個場地討論，每個場地上、下午各二場，每場九十分鐘。論文每篇（約 8000 字）宣讀 20 分鐘，評論 10 分鐘，共同討論 30 分鐘。

2002 數學論證國際學術研討會後記

台師大數學系助理 張瓊華

2002 數學論證國際學術研討會在 11/18 下午劃下了一個完美的句點。這次的研討會在國立台灣師範大學分部的國際會議廳舉行，由數學系承辦，從 11 月 16 日早上開始至 11 月 18 日下午結束一共三天，邀請了美國、英國、義大利、法國、奧地利、荷蘭等國的學者來共襄盛舉，內容包含了八位外國學者與兩位台灣學者的演講，本土論文的發表及討論。國外學者演講的內容如下：

Celia Hoyles United Kingdom	What do students understand by the process of deduction: insights from a large-scale longitudinal survey
Richard Noss United Kingdom	Is proof invariant across representational infrastructures?
Willi Doerfler Austria	Diagrams as means and objects of mathematical reasoning.
Paolo Boero Italy	The approach to conjecturing and proving : cultural and educational choices.
Nicolas Balacheff France	The researcher epistemology : a deadlock for educational research on proof
Raymond Duval France	Proof understanding in MATHEMATICS: what ways for STUDENTS?
Guershon Harel U.S.A.	DNR-Based Instruction: Its Application In Devel Oping MATHEMATICS Teachers' Knowledge Base, Particularly Their Proof Schemes.
David Tall United Kingdom	Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics

國內在論證方面的學術研究較少，學者的演說除了提供了我們互相交流、激盪的機會，本土的論文發表，更提供了大家不少磨練的機會。可惜的是在討論的過程中，大多提供意見的皆為外國學者，本土學者的發問較少。

對我來說這次的研討會處處充滿驚喜，這是我第一次有機會與這麼多外國人面對面接觸，也是第一次見到文章上的作者，能近距離目睹大師風采。藉由與他們的談話讓我意外的發現，原來外國人是以新奇、不可思議的角度來看中國文字，每位學者都有可愛之處，但最令我印象深刻的大概非 Raymond Duval 莫屬了，我猜想他除了在做研究時專注，其他時間極像是一個需要備受呵護的小孩，這三天的研討會，我們天天上演著尋人的戲碼。而他總是無辜的表示他不小心又與大家失散了。唯一美中不足的大概是自己的英文程度太差吧！要同時聽懂外國學者的英文及他演說內容之論證意含，對於涉略較少的我來說，實在是一大障礙。不過這次的經驗也讓我深深體驗到自己的英文表達能力需要好好加強。

最後感謝數學系的伙伴們對於這次研討會的大力幫忙，也謝謝來參加的學者，使得研討會得以順利結束。目前我們正積極與 ESM 和 IJSME 聯繫，希望能將本次研討會演講者的論文彙編成一本專刊。

實習心聲

無窮 vs. 教學 123

中山女中實習教師 黃茄峰

在中山女中的講台上上課，頗具挑戰性。通常女校的學生有個非常奇妙的特質：只要一開始她們聽不懂、沒興趣，之後的她們只會每節上課時對老師『磕頭膜拜，崇尚有加』。除非老師再有新的主題、概念，將她們的學習動機再拉回來，幫她們解開身上的枷鎖，否則她們只會不覺得地在數學的監牢裡過一天算一天。動機與學習關聯性之大，在這裡可說是一覽無疑。

因為課程的關係，指導老師採取分配單元的方式讓我進行課程的實習。在本學期第一次段考完後，我接到比較完整的單元『無窮等比級數』。而這部分，我打算用的用一個比較不一樣的方式進行，亦即：想辦法融入一些數學史的東東，再藉此探索學生課堂上的反應，以及課後學習的發展性。

就課程而言，『無窮』對她們來講是一個全新的概念。依照本校學生的特質，如何引起她們的學習，動機變得非常重要。針對這部分的活動的進行，我採取的方式是『提問法』－何謂『無窮』？先介紹名題『無窮旅社』問題，再利用費氏兔子數列說明遞迴關係。

第一堂課，一進教室我就將問題拋出。雖說有些學生還處在半睡半醒之中，不過，很快就被旁邊同學熱烈的討論聲給驚醒，迅速加入討論行列之中。對於我的試探，她們給我的回饋真是琳琅滿目：

『老師 …… 無窮就是無窮阿！』

『無窮 …… 老師我知道，可是我不會講。』

『無窮就是無限多！』

『無窮就是沒有邊界啦！』

……

綜觀這些答案，可知雖說她們對『無窮』不是那麼的熟悉，不過，仍有大略的見解在。逐漸地，她們討論出了『無窮』這個概念的精髓。儘管這個概念跟她們的交集不是百分百，不過，對她們來說卻已經不再陌生了。後來，我使用了引導的方法，將『無限大』給推上檯面，告訴她們『它』就是比任何妳說得出來之數還要大的東西，終於她們臉上的滿足表情告訴我：老師我懂了。懂是懂了，卻花費了我半節課的時間，跟我預期的仍有些差距。然而，這種提問的研討方式，似乎才真正讓學生學得到東西，也確實符合歷代數學家們討論學習的精神吧。

緊接著，在這項試驗後半節課，我開始將『無窮旅店問題』介紹給她們認識：『現在一旅社，有無窮多間房間，不過都住滿了人。請問如果再來一名客人，是否有辦法安排給他一間空房。假如可以的話，該如何安排呢？』同樣地，這問題再次引起她們高度興趣。我預期她們應該會認為沒辦法安排這位旅客住店，可是她們『一致認為可以』的答案，卻讓我非常驚訝。由此可見，在先前的討論中，『無窮』已經給了她們相當具體的想法。不過，想法歸想法，安排住宿的方式，還是使她們對自己的答案產生懷疑，而認為：『反正有無窮多間房啊，就一定可以空出一間來供新客人居住的，沒有為什麼、又何必特別安排呢？』趁此機會，我開始提點出數學知識該有的規律性、一般性、整體性，說服她們接受、肯定下列想法：『只要將房間編號，然後每個客人依自己房間的號碼往後退一間，即可空出第一間房，給新客人』，再慢慢推演到：『就算再有限個人來，一樣有辦法住得下。』

由於時間不夠，最後我無法將費氏兔子數列說明遞迴關係呈現出來，有點遺憾。儘管如此，這一節課上下來，給了我非常深刻的體會，那就是：數學是由前人智慧累積的成果，教師在教書時如果有辦法將一觀念的來龍去脈都搞清楚，再呈現給學生們學習；同時，學生們的學習，也能夠藉由教師的提示與講解，而獲得承先啓後的感覺，多少了解古人研究數學的心得。如此一來，我們不但能讓學生更了解數學的重要性，也更明白數學其實很有趣，因而激發學習的更強烈動機。總之，融入歷史的教材多元呈現，引發學生的興致，從而形成了她們的學習動機；動機則帶動了有效率的學習，而有效率的學習會再一次地提起興致，如此交替循環，相信學生們會愈來愈喜歡數學。

中東古文明數學巡禮

中原大學數研所碩士班 英家銘

前言

筆者曾於國中任教兩年，有機會以教師身分深刻地體會到許多人中學時代共同的噩夢：學數學好累，上數學課真無聊！這種感覺，並不能單純地看成不愛唸書的學生的藉口。其實，一些頗爲優秀的同學也會有這種感覺。我想，在台灣任何人要從自己朋友中，找出十來個討厭數學（不是數學不好）的人，是相當容易的事。對數學的排斥，似乎是我們台灣社會的共同記憶。這種記憶，當然與過去我們強調演算與反覆練習的教學有關。筆者在這裡並非要探討教改在數學這一科目上應有的作爲，我想說的是，作爲數學教師，我們可以嘗試使數學課更「引人入勝」。

一代科學史家 George Sarton 曾在《數學史的研究》中提到：

> 數學史家的主要任務，……就是詮釋數學的人文成份，顯示數學的偉大、優美與尊嚴，……也使我們每個人對它嘆為奇觀，感到謙遜而謝天。學習數學史倒不一定產生更出色的數學家，但它產生更溫雅的數學家。學習數學史能豐富他們的思想，撫慰他們的心靈，並且培養他們的高雅品質。

同樣地，講述古代數學的故事，不一定使學生的數學成績更出色，但它可以作為學生與數學之間的潤滑劑，以及使學生更容易自發學習的催化劑。加入數學故事，也許會讓原本乏味的數學課，吸引較多學生的注意，也可能增加他們學習數學的機會。

至於本文爲何要說近東、中東古文明的故事呢？在國、高中任教的教師們，只要願意說故事，大概都會提到 Newton, Gauss, 甚至於 Galois 的經歷，再往前走，可能也會講述古希臘 Pythagoras 或 Archimedes 等人的故事。以《幾何原本》出發的歐洲中心典範，當然可以作爲很好的數學教材，但

也可能會讓學生誤會數學只是歐洲人才有的玩意兒。現在國中教材已經出現埃及金字塔（不過，那是 Thales 用陽光量金字塔高度的故事），但筆者覺得我們還可以適時加入其他文明的題材。中國古代留下豐富的數學題材，在學者們努力研究之下，已有許多中學教師可發揮之處，而筆者則想從台灣學生不熟悉的埃及人和巴比倫人開始，找一些到今天仍然影響著我們的成就，或是中學生能懂又帶有歷史背景的題目，希望爲中學師生帶來一點趣味。

系列之一：巴比倫歷史、考古及圓周 360 等分

在中東或西亞稱爲「肥沃月彎」的底格里斯河和幼發拉底河兩岸，從約公元前 3000 年開始一直到公元前 600 年左右，有許多不同的民族在此創造出光輝燦爛的西亞文明。這些民族包括蘇美人、阿卡丹人、迦勒底人、亞述人，以及最爲大家所知的巴比倫人。我們今天所說的巴比倫人（Babylonians）及巴比倫古文明，其實是包含上述這些民族及他們共同在兩河流域所創造的文明。巴比倫人使用泥板來書寫文字，而這些泥板因爲不會隨時間而腐化，以致於今天我們能從這些被考古學者挖掘出土的泥板中，了解巴比倫古文明的偉大成就。

在我們的語言中，有著「他的態度出現了 180 度的轉變」這樣的說法，來表示「完全相反」的意思，可見圓周 360 度的概念，是我們習慣使用的。在中學的歷史或數學課上，教師們可能會提到巴比倫人使用六十進位法，也可能會告訴學生圓周 360 度是由巴比倫人最先使用的，所以，有人也許會認爲這是六十進位的當然結果。但這似乎又不完全說得通，因爲我們都知道：$60^1=60$，$60^2=3600$，360 並非 60 的整數次方。筆者在未來的系列文章中，會討論六十進位法及它的影響，但我們先來看看這個從小學開始，就一直使用的圓周角度。

關於圓周 360 等分的概念，學者提出了許多不同的解釋，其中由科學史家 Otto Neugebauer 所提出的說法最爲可信。在早期蘇美文化的時代，約公元前 3000 年至前 2100 年左右，他們使用一種很長的距離單位，一種「巴比倫哩」，大約等於今天的 11 公里長。既然巴比倫哩是用來測量較長的距離，它很自然地也可以作爲一個時間的單位，即行走一個巴比倫哩所需的時間。在公元前 1000 年到公元元年之間，巴比倫人的天文學進展到相當高的階段，使他們能夠有系統的紀錄天體運動。而這個時候，巴比倫哩這個長度單位也被用來計算時間。因爲他們發現一個完整的日子，大約等於走 12 個巴比倫哩的時間，而每天天空中的星體剛好會旋轉一圈，所以一個圓周就被分爲 12 等分。但爲了方便起見，原來的一個巴比倫哩早已被分成 30 等分。所以，我們得到一個圓周被分爲 12╳30=360 等分。

原來，我們跟巴比倫人共用的圓周 360 度，有個這麼有意思的起源。

參考資料

蘇意雯 (1994).〈從歷史學家的觀點看數學：MHE≠EMH!〉,《數學傳播》18 卷 1 期: 62-63.

Eves, Howard (1975). *An Introduction to the History of Mathematics* (4th ed). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Joseph, G. C. (1992). *The Crest of the Peacock*. New York: Penguin Books.

新書摘要

台師大數學系碩士班　陳彥宏

書名：阿草的曆史故事
作者：曹亮吉
出版：天下文化，**2002** 年 **9** 月 **25** 日第一版第一次印行
出版資料：共 **203** 頁，定價 **220** 元
國際書碼：**ISBN 986-417-024-4**

正如同於本書自序〈學曆之旅〉中所提到的：「我所鎖定的讀者對象就是一般的大眾，所以我得循序漸進，而且通識有趣。」作者安排以徐光啓、利瑪竇（Matteo Ricci, 1552-1610）的虛擬對話作爲出發點，開啓了這一趟『學曆之旅』。

全書共分爲五章，每一章皆以對話錄之形式寫成，使讀者很容易便能『進入狀況』，並於每章之對話錄前即道出其對話者所處時代背景，第一章從西元 1600 年（明神宗萬曆 28 年）徐、利兩人第一次會面開始談起，第二章至最末章則拉至四百年後的 2000 年（1600 年及 2000 年恰有其特殊意義！），對話則轉到了『小徐』與『小利』身上。

雖然對話的內容是作者虛構的，但當中包含了許多關於曆的發展及相關背景，同時爲了不讓讀者因爲浸淫細節過久而失去整體感，在每一章章首皆附上導讀，和五章的對話分別對應，另外內容亦穿插有專欄介紹該章相關的人物或知識，對一般讀者而言相當方便。值得一提的，書末附錄提供了萬年曆的製作方法，讀者閱讀之餘更能『動手做』！唯一令筆者覺得比較可惜的是，本書的錯別字不少，若能予以校正就更完美了！

書名：香港數學教育實地觀察**II**－無無謂謂聽書記
作者：黃毅英
出版：香港數學教育學會，**2002** 年 **10** 月
出版資料：共 **84** 頁，定價港幣 **30** 元
國際書碼：**ISBN 962-85218-6-1**

本書寫作之理念延續了 1998 年《香港數學教育實地觀察－無無謂謂教書記》的想法，作者將其實際『下鄉』與小學學校生活接觸所得種種，以短篇文章的形式記錄下來，並不時與'98 年在中學實地觀察之所得比較，雖然所處之背景爲香港，但筆者相信應仍能獲得不少讀者（尤其是身在第一線的數學教師）的共鳴！就拿本書的第 10 章〈似是而非話表象〉來說好了，作者談到在小學教學中，爲了『滿足』學者專家所倡導之「多重表徵」（multiple representations） 的想法所衍生出來的問題 － 規定老師在教學時必須要有多少種教法，或是學生在考試時，必須要回答幾種不同的答案等等，讓筆者不禁想到最近在台灣同樣吵得不可開交的『建構式教學法』。另外，本書也收錄了作者所設計的兩節活動課程與一次數學遊

蹤（類似台大所舉辦的「數學步道」）內容，以及若干學生的日記分享（比如說對數學的看法），的確有教學參考之價值。

書名：歐幾里得之窗－從平行線到超空間的幾何學故事

（**Euclid's Window : The Story of Geometry from Parallel Lines to Hyperspace**）

作者：李奧納多・曼羅迪諾（**Leonard Mlodinow**）　譯者：陸劍豪

出版：究竟出版社，**2002** 年 **11** 月

出版資料：共 **341** 頁，定價 **290** 元

國際書碼：**ISBN 957-607-844-X**

或許與作者曾從事電視影集創作的背景有關，閱讀本書就像是閱讀小說一般，雖然內容包含了許多的數學與物理方面的知識，但卻不會令人『喘不過氣』。全書基本上按照幾何學的發展順序：從巴比倫人、埃及人的「大地測量」說起（書中談及了比巴比倫人更早的幾何學發展），然後透過歐幾里得的《原本》（The Elements）『開啓了一扇邏輯幾何之窗』，最後談到曾在 80 年代風靡一時的「超弦理論」（superstring）之興衰始末。其間對於《原本》「第五公設」所引發之種種問題與『革命』更有精彩的介紹。另外，全書不時以現代的生活實例作比喻，讓讀者更容易去理解！說本書是『進入幾何學的途徑』，也許還是『太沈重了些』，不過，我們的確看見了本書作者所做的努力！

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至　**suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng**