HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中）邱靜如（實踐國中）唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（中山女高）洪秀敏（豐原高中）洪誌陽（新竹高中）
陳鳳珠（土城中正國中）謝佳叡（台師大數學系）林倉億（服役中）黃清揚（福和國中）葉吉海（內壢國中）陳彥宏（台師大數學系研究生） 林旻志（台師大數學系研究生） 陳啓文（中山女高）彭良禎（麗山高中）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第五卷 第十期 目錄（2002 年 10 月）

關於《算數書》體例的一個備註

台師大學數學系 洪萬生教授

一、前言

繼江陵張家山漢簡整理小組發表《算數書》釋文 (2000 年 9 月) 問世之後，[1]彭浩又接著推出《張家山漢簡《算數書》注釋》一書 (2001 年 7 月) ，[2]讓我們得以『貼近』這一份至少已有 2186 年歷史的數學文本，誠然是中國數學史學界一大盛事！

根據彭浩的報告，《算數書》竹簡共有一百九十枚，簡長 29.6－30.4 公分，寬 0.6－0.7 公分。編線有三條，上、中、下各一，全書編成一卷。[3]在《張家山漢簡《算數書》注釋》中，彭浩則提供了 72 枚竹簡圖版，不僅文字清晰可辨，而且書寫體例也可以一覽無疑，讓我們有機會求證一些先前的猜測。

筆者在拙文〈《算數書》初探〉(2000a) 與〈《算數書》的幾則論證〉(2000b) 中，[4]都曾指出《九章算術》文本本身所未得見的『因而』連接詞，是先秦時期中國算數著述重視論證的一個重要的例證。但是，由於無法親睹《算數書》體例之原貌，所以，『因而』在該書中是否作爲連接詞被使用，也沒有完全的把握，儘管釋文的呈現還相當忠實。

現在，有了《算數書》的圖版與彭浩的注釋，我們根據此一文本中的『勾識』(∟) 與『墨點』(・) 記號，已經可以確定『因而』一詞果然是做連接詞使用。此外，在某些題文、術文中，『勾識』記號出現頻繁，我們可以猜測它們受到使用者 / 抄寫者的青睞，以及他(們) 如何使用此一文本。再有，從『楊（已讎）』、『王（已讎）』的註記位置，我們應該可以確信本書至少有楊姓與王姓兩位校對者。[5]在本文中，我們打算依序對這些問題提出一得之愚。

二、秦、漢簡文中的『勾識』、『墨點』與『重文』記號

《算數書》與其他出土漢簡一樣，除了文字之外，還包括了『勾識∟』、『重文＝』與『墨點・』等三種符號。這三種記號也出現在秦簡之中。[6]不過，比較秦、漢簡中的這些記號的出現頻率，兩者之『重文號』相差無幾，而前者之『墨點』遠較後者爲多，[7]譬如《算數書》的『墨點』只有 15 個。至於『勾識』則剛好想反，《算數書》就多達 157 個。儘管秦簡中『勾識』的用途各家說法稍有不同，大概總不外乎是抄錄者或誦習者所做的標識或記識，與今之

頓號『、』相通。[8]吳福助針對秦簡《語書》中的上述三種符號進行研究，也同意『勾識』標號之作用相當於句讀，然而，他認爲註記卻是誦習者所加。[9]吳福助還指出：「由此文書的勾識符號繁多（凡二十七個），爲秦簡其他各篇所不及，足見喜（按 即墓主）對它確曾特別用心研讀過。」[10]另一方面，他也認爲秦簡《語書》中的『重文號』與『墨點』都是抄錄者所作，其中『墨點』表示章句號。[11]

針對《算數書》的體例，彭浩認爲『勾識』「用作斷句。在題中數字連續出現時多用以點斷上下句，避免誤讀」，至於「算題的末尾皆無句讀」。此外，「墨點 • 多用於另一段文字開始的標誌，兼有與上文相隔斷。」[12]現在，就讓我們來考察《算數書》中『勾識』或『墨點』記號，如何關聯到它的『因而』連接詞。在本書中陳述中含有『因而』兩個文字的題名中，除了『徑分』、『粟求米』、『米求粟』、『絲練』、『以方材圜』以及『里田』等之外，還有『合分』。[13]在下文中，我們將討論其中涉及『勾識』或『墨點』的題名。第三節：『合分』與『徑分』。第四節：『粟求米』。第五節：『以方材圜』與『里田』。

三、『合分』與『徑分』

『合分』題在提供了分數的加法法則之後，隨即舉例說明。全文引述如下（在下述引文中，『ㄥ』代表勾識記號，『＝』代表重文記號，阿拉伯數字則是彭浩所編的整理號）：

合分　　合分術曰：母相類，子相從。母不相類，可倍＝、（倍），可三＝、（三），可四＝、（四），可五＝、（五），可六＝、（六），七亦輒倍＝、（倍），及三、四、五之如＝，母相類 (21)

者，子相從。其不相類者，母相乘為法，子互乘母并以為實ㄥ，如法成一。今有五分二ㄥ、六分三、 (22)

十一分八ㄥ、十二分七ㄥ、三分二為幾何？曰：二錢六十分錢五十七ㄥ，其術如右方。五人分七錢、少半＝、（半）錢，人得一錢三十 (23)

分錢十七。術曰：下三分，以一為六，即因而六人以為法，亦六錢以為實ㄥ。又曰：母乘母為法，子羨乘母 (24)

為實＝，（實）如法而一ㄥ。其一曰：可十＝、（十），可九＝、（九），可八＝、（八），可七＝、（七），可六＝、（六），可五＝、（五），可四＝、（四），可三＝、（三），可倍＝、（倍），母相類止ㄥ。母相類，子相從。[14] (25)

上述五個段落，分別寫在各一枚竹簡之上，彭浩的竹簡整理號依序爲 21，22，23，24，25。如果我們再參考彭浩所提供的〈《算數書》竹簡整理號與出土號對照表〉，以及〈張家山《算數書》竹簡出土側視圖〉，[15]那麼，此一『合分』題的簡文還原應該是合理的。

如此一來，我們就可以考察『勾識』記號的意義了。在上述第 22 號這一枚竹簡中，共有兩個『勾識』號，第一個句讀頓在『實』這個專有名詞，可能意在提醒下文的點讀，譬如第 25 號的這一枚中第一個勾識就是頓在『實如法而一』。第二個句讀頓在『二』字，目的當是明白地指出舉例中的數據。同理，第 23 號這一枚竹簡中的前兩個『勾識』記號也是如此，至於第三個似乎用以指出答案，儘管它顯然有訛文。[16]

第 24 號這一枚竹簡中的『勾識』號頓在第一個『術』文的結束處，所以，註記者明確地知道這一句話陳述了一個『術』。由於此一術文涉及『因而』兩字，所以，我們必須分析其用途，以便確認它們是否是帶出結論的連接詞。顯然，此一術文是針對前一個問題：「五人分七錢、少半錢、半錢」，它的算術計算相當於 $(7 + 1/3 + 1/2) \div 5$，答案爲『（每）人得

一錢三十分錢十七』(1 + 17/30)無疑是正確的。不過，如果《算數書》的解法：「下三分，以一爲六，即因而六人以爲法，亦六錢以爲實」，正如彭浩的解讀，也就是：「把人數與錢數都擴大了六倍，47/6 錢則成爲整數 47，運算更簡捷」，[17]那麼，『因而』作爲一個引出『推論』的連接詞，應該是個合理的解讀。

這種解讀當然不是主觀認定，我們也可以徵之於照彭浩所推斷的『合分』題中之簡文竄抄：「自『五人分七錢、少半、半錢』以下文字應歸入下題『徑分』，簡文竄抄」。[18]事實上，從『徑分』題內容看來，確有可能。茲引述其內容如下：

徑分　　徑分以一人命其實，故曰：五人分三、有半、少半，各受三十分之二十三。

其術曰：下有少半，以一為六，以半為一，以少半為二，　　(26)

并之為二十三，即值（置）一數，因而六之以命其實∟。有曰，術曰：下有半，因而倍之；下有三分，因而三之；下有四分，因而四之。[19]　　(27)

正如筆者曾經指出，本題中的『故』爲本書僅見，它所連結的句子更是徹頭徹尾的推論形式之表徵。[20]如果參照彭浩所推測的竄抄，[21]則『徑分以一人命其實』之作爲前提，讓連接詞『故』適時地引出另一個推論結果 － 亦即「五人分三、有半、少半，各受三十分之二十三」，實在是很難令我們抗拒的論斷。另一方面，在緊接著的『其術曰』句子結束處有一『勾識』記號，足見註記者十分清楚它的內容。事實上，此一例題在說明如何求 $(3 + 1/2 + 1/3) \div 5$，由於《算數書》作者以 $6 \times (3 + 1/2 + /1/3) = 23$ 爲『實』，所以，他才會說：『因而六之以命其實』。於是，『因而』兩字作爲推論用的連接詞，殆無疑問矣！這或許也可解釋何以本題最後的『術曰』中，『因而』一詞都以對稱形式出現，蓋其推論形式相仿故也。

四、『粟求米』

上一節的內容與分數計算有關，本節則針對比例問題。先引述『粟求米』的內容：

粟求米　粟求米因而三之，五而成一。•今有粟一升七分三，當為米幾何∟？曰：為米七分升六。術曰：母相乘為法，以三　　(113)

乘十為實。[22]　　(114)

在本題名中，『墨點』與『勾識』記號區隔了粟與米的交換比率（第一句），以及所舉的例題（第二句），所以，應該是近乎標準的體例。不過，更值得注意的，是第一句中的『因而』一詞。由於前幾個題名已經提供了一些糧食的交換比率，其中當然包括了『粟求米』，[23]所以，此一『因而』當是推論用的連接詞。

在緊接著的『米求粟』題名中，儘管我們找不到『墨點』與『勾識』記號，但是，由於它的體例與上一題對稱，所以，其中『因而』一詞應該也是推論用的連接詞。請參考下文的引述：

米求粟　以米求粟因而五之，三成一。今有米七□升六，當爲粟幾何？曰：為粟一升七分升三。術曰：母相　　(115)

乘為法，以五乘□□□。[24]　　(116)

此外，『絲練』也是比例計算題，雖然它缺算例，[25]而且也未見『墨點』與『勾識』，但是，由絡絲求練絲的比率『16：12』，可知句中的『因而』也是用以推論的連接詞無誤。

五、『以方材圜』與『里田』

『以方材圜』與前一題的『以圜材方』應該是對稱題型，不過，由於在後者中未見『墨

點』與『勾識』記號，所以，先討論前者，其內容引述如下：

以方材圜　以方材圜，曰：材方七寸五分寸三，為圜材幾何？曰：四韋（圍）二寸二十五分十四。•術曰：方材之一面即 (154)

圜材之徑也，因而四之以為實，令五而成一。[26] (155)

儘管在上文中，我們看不到『勾識』記號，但是『術曰』前的『墨點』「加在題文之中，標示以下文字爲另一部份。」[27]既然如此，本句中的『因而』連接了前提『方材之一面即圜材之徑』以及運算『四之以爲實，令五而成一』，其作爲『推論』之用，應該是確論不移了。[28]同理，可證『以圜材方』中的『因而』亦然，儘管這兩題中都有訛文。[29]

最後，我們來考察『里田』題：

里田　里田術曰：里乘里＝，(里)也、廣、從、(縱)各一里，即直(置)一因而三之，有（又）三五之，即為田三頃七十五畝∟。其廣、從（縱）不等者，先以里相乘，已， (187)

乃因而三之，有（又）三五之，乃成。今有廣二百二十里，從（縱）三百五十里，為田二十八萬八千七百五十頃。直（置）提封以此為之。 (188)

一曰：里而乘里＝，壹三，而三五之，即頃畝數也∟。有（又）曰：里乘里＝，(里)也；以里之下即予二十五因而三之，亦其頃 (189)

畝數也。曰：廣一里、從（縱）一里為田三頃七十五畝。[30] (190)

在本題中，『勾識』記號共有兩個，分別出現在『術曰』結束處。由於在此一題名中，『因而』一詞所連接的往往是兩個運算或計算過程，所以，推論的意義看來比較不明顯。在這樣的脈絡中，它作爲一般轉折的連接詞來使用，倒是比較可能。換句話說，『因而』作『就接著』解，似乎比較言之成理。[31]儘管如此，在古漢字的使用上，『因而』連成一組通常表示結果的連接詞。[32]

六、勾識、墨點與楊、王之校讎

在本書中，校對者『楊』氏共出現九次，『王』氏則出現三次。在這些可以確知經過楊或王校讎之題名中，我們也發現了『勾識』記號的存在，有一些甚至於次數十分頻繁。譬如，『相乘』題經過『楊』氏兩度署名校讎，同時，它也被註記了 21 個『勾識』記號；[33]類似地，『粺毀』題亦經『楊』氏校讎，而且也出現了 28 個『勾識』記號。[34]另一方面，『女織』題經『王』氏校讎，『勾識』記號則有 10 個。[35]所有這些似乎都指向校讎者與『勾識』記號的相干。不過，『少廣』題有 31 個『勾識』記號，然而，校讎註記卻未曾得見。[36]此外，還有一些題名有校讎但缺『勾識』記號者，譬如『程禾』與『粟米并』題。[37]

由於相對於秦簡，《算數書》的墨點出現頻率偏低，而『勾識』記號又偏高，所以，『勾識』記號也可能是抄寫者 / 使用者所留下，而不是校讎者的手筆。前文曾提及秦簡《語書》的『勾識』記號有可能是誦習者所加。不過，《算數書》中的『勾識』記號當然也可能是文本抄寫的一部份，因爲他們都佔滿了一整格，而且，全書筆墨濃度一致。[38]

七、題、術文的使用頻率

如果《算數書》中的『勾識』記號確是抄寫者照抄得來，那麼，它的出現頻率至少可以指出它的母本中，哪些題、術文最受青睞了。這些題名按照勾識個數的多寡順序，可排列如下（括弧內阿拉伯數字表示個數）：少廣 (31)、粺毀 (28)、相乘 (21)、女織 (10)、合分 (7)、

耗 (7)、粟爲米 (5)、啓從 (5)、粟求米 (4)、分當半 (3)、并租 (3)。下列題名有兩個勾識記號：約分、稅田、租誤卷、大廣、方田。至於題名只有一個勾識記號的，則有：里田、增減分、徑分、出金、共買材、傳馬、婦織、飲漆；程竹、賈鹽、粟求米、盧唐、囷蓋、井材、啓廣。

由上述的統計數字來看，《算數書》的勾識記號，主要集中在分數演算法則與其例題、比例問題（尤其是糧食交換的比率與其計算）以及面積計算等三方面。彭浩對本書九十幾個算題的用途之歸納，發現本書算題與秦漢縣級政府的管理職責息息相關，亦即：土地和租稅、倉儲物資以及勞役和工程等三方面的管理。誠然，本書勾識記號最多的算題，主要集中在第一方面的應用，而未及於後兩者。至於原因究竟，我們目前還難以索解。當然，如果勾識記號只是抄寫慣例，譬如『相乘』題中第 2（整理）號簡的開端之勾識記號，[39]那又另當別論矣！

八、結論

筆者曾在先前關於《算數書》的研究中，企圖回答一個問題，那就是：此一文本如何被它的擁有者 － 亦即張家山 247 號漢墓的墓主－所使用？[40]其實，本文所努力還原的圖像，也無一不指向此一問題。

根據考古學家的研究，此一墓主原是秦朝小吏，於公元前 202 年（漢高祖五年）或稍前「新降爲漢」。公元前 194 年（漢惠帝元年）六月以「病免」，最後約在公元前 186 年（呂后二年）後不久去世。[41]由於陪葬的簡策除了《算數書》、曆譜與遣策之外，還包括了法律文書如《二年律令》、《奏讞書》與《蓋盧》，以及醫書如《脈書》與《引書》，可見墓主「有較高的文化水準，涉獵廣泛，喜好醫學、導引、兵、陰陽。他在縣級政府中的主要職責是協助縣令處理司法案件並管理政府財物，通曉數學。」[42]此一事實也呼應了秦漢吏員的素養與能力，亦即『能書、會計、治官民、頗知律令』。[43]

這或許也呼應了秦朝『以吏爲師』的深厚傳統。[44]由睡虎地秦墓簡書《語書》與《爲吏之道》的內容體例與文章風格來看，墓主喜可能「在司法職務之外，還兼有教法之吏的身分。」[45]依此類推，張家山漢墓的墓主也可能曾經是『教法之吏』，如此一來，《算數書》體例中的勾識記號與楊、王校讎之特徵，似乎也顯示了它是秦漢時期輾轉傳抄課吏之教材。其實，鄒大海細緻地分析它的內容結構之後，推斷「《算數書》不是一本精心編撰的數學專著，其性質屬於一部撮編的問題、方法、標準等的文集；即使其本身有一主要來源，其主要母本也是撮編之書。」[46]既然如此，本書之於它的陪葬者，或有可能正如《爲吏之道》之於喜，年少學吏時習用過，後來擔任法吏兼有『學室』教職，又用以訓練吏員之教材。[47]

然則本書中的『因而』連接詞，不曾在同時或稍後的《九章算術》（南宋版爲準）中現身，又當如何解釋呢？春秋戰國時代的中國古算被認爲有『算法式』（或『算則化』）和『理論化』兩種傳統，到了漢代以後，前者成爲中國數學的主流，而《九章算術》正是此一主流的經典作品，[48]從而足以表徵『理論化』傾向的『因而』也就跟著消失了。《算數書》的內容與形式儘管無法與《九章算術》相提並論，[49]不過，『因而』在前書多處一再（即使是不經意地）出現的事實，卻可以說明春秋戰國時代中算『理論化』曾經存在的事實，只是此風已遠，徒令後代史家憑弔與遐思罷了。

謝辭：本文初稿完成，承李怡嚴教授不吝指正，謹此致謝。後來藉參加第九屆國際中國科技史會議（10/9-10/12, 2001，香港城市大學）之便，送請與會者傳閱，又蒙彭浩教授、郭書春

教授與鄒大海教授惠正良多，不勝感激。當然，筆者理當自負所有文責。另外，本文之撰寫，也獲得國科會計畫編號 NSC 90-2521-S-003-005- 之部分贊助。

註解：

1. 參考江陵張家山漢簡整理小組 (2000)。
2. 參考彭浩 (2001)。
3. 參考彭浩 (2001)，頁 2。
4. 參考洪萬生 (2000a)，(2000b)。
5. 本書中的『楊』、『楊已讎』、『王』、『王已讎』都出現在下編線之下。其他文字除了兩枚例外，都是在上下兩編線之間。參考彭浩 (2001)，頁 2-3。
6. 參考徐福昌 (1993)，頁 194-208；吳福助 (1994)，頁 65。
7. 參考徐福昌 (1993)，頁 207
8. 同上，頁 205-207。
9. 參考吳福助 (1994)，頁 65。
10. 同上，頁 194。
11. 同上，頁 65。
12. 彭浩 (2001)，頁 3。
13. 洪萬生 (2000b) 漏列『合分』題。
14. 引彭浩 (2001)，頁 45-46。
15. 同上，頁 129-130。
16. 參考同上，頁 46-47；或蘇意雯等 (2000)。
17. 彭浩 (2001)，頁 47。
18. 同上。
19. 引同上，頁 48。
20. 參考洪萬生 (2000a,，2000b)。又此一釋文的可靠，也可以徵之於彭浩所提供的〈《算數書》竹簡整理號與出土號對照表〉，以及〈張家山《算數書》竹簡出土側視圖〉。本文其他引述例之可靠，亦依此推斷。
21. 彭浩認爲第 23、24（整理）號簡中的「五人分七錢，……，（實）如法而一」一段，應該移入第 27 號簡的最後一句之後。彭浩 (2001)，頁 49。
22. 引同上，頁 89。
23. 譬如『粺毀』、『粟爲米』與『粟求米』三題（在本書中『粟求米』共有兩個題名，這是第一個，本文所引述者爲第二個）。參考同上，頁 84-89。
24. 引同上，頁 90。
25. 參考同上，頁 74-75；或蘇意雯等 (2000)；或洪萬生 (2000a)。
26. 引彭浩 (2001)，頁 111。
27. 同上，頁 3。
28. 也參考洪萬生 (2000a，2000b)。
29. 參考彭浩 (2001)，頁 110-113；蘇意雯等 (2000)。
30. 引彭浩 (2001)，頁 125-126。
31. 參考洪萬生 (2000b)。

32. 同上；或呂 (1993)，頁 406-407。
33. 參考彭浩 (2001)，頁 37-38。
34. 同上，頁 84-85。
35. 同上，頁 56。
36. 同上，頁 116-118。
37. 同上，頁 80，91。
38. 筆者與彭浩教授會見於第九屆國際中國科技史會議（10/9 – 10/12, 2001 香港城市大學），承他賜知此一結果。
39. 針對此一現象（見彭浩 (2001)，頁 37），彭浩認爲「簡文開頭有用作斷句的勾識，本應屬上簡，但上簡末已無空餘，故移至本簡開端。」引彭浩 (2001)，頁 39。
40. 參考洪萬生 (2000a，2000b)。
41. 參考彭浩 (2001)，頁 11。
42. 引彭浩 (2001)，頁 11-12。
43. 參考吳福助 (1994)，頁 150。
44. 同上，頁 177。
45. 引同上，頁 114。
46. 引鄒大海 (2001)。
47. 參考吳福助 (1994)，頁 180。
48. 參考鄒大海 (2001)。
49. 有關兩書的比較，參考同上；或洪萬生 (2000a)。

參考文獻

江陵張家山漢簡整理小組 (2000).〈江陵張家山漢簡《算數書》釋文〉,《文物》2000 年第九期：78-84。

呂叔湘 (1992).《中國文法要略》，台北：文史哲出版社。

吳福助 (1994).《睡虎地秦簡論考》，台北：文津出版社。

李迪 (2000).〈關於竹簡《算數書》的若干問題〉，收入《橫地 清先生七十大壽紀念誌》，頁 21-24。

洪萬生 (2000a).〈《算數書》初探〉,《師大學報：科學教育類》45(2): 77-91。

洪萬生 (2000b).〈《算數書》的幾則論證〉,《台灣歷史學會通訊》第十一期：44-52。

徐富昌 (1993).《睡虎地秦簡研究》，台北：文史哲出版社。

彭浩 (2000).〈中國最早的數學著作《算數書》〉,《文物》2000 年第九期：85-90。

彭浩 (2001).《張家山漢簡《算數書》注釋》，北京：科學出版社。

彭浩 (2001).〈張家山漢簡《算數書》中『分錢』題的校讀〉，提交第九屆國際中國科技史會議，10 月 9 日 ~ 12 日，香港城市大學。

城地 茂 (2001).〈《算數書》成書年代考〉,《世界華人科學史學術研討會會場論文集》（台北：淡江大學化學系、歷史系），頁 129-138。

鄒大海 (2001).〈出土《算數書》初探〉,《自然科學史研究》第 20 卷第 3 期：193-205。

鄒大海 (2001).〈睡虎地秦簡與先秦數學〉，提交第九屆國際中國科技史會議，10 月 9 日 ~ 12 日，香港城市大學。

郭世榮 (2001).〈《算數書》勘誤〉,《內蒙古師大學報・自然科學（漢文）版》第 30 卷第 3 期，頁 276-285。

郭書春 (2001).〈算數書校勘〉,《中國科技史料》第 22 卷第三期，頁 202-219。

郭書春 (2001).〈試論《算數書》的理論貢獻與編纂〉, 提交第九屆國際中國科技史研討會議，10 月 9 日 ~12 日，香港城市大學。

蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚、與葉吉海 (2000).〈《算數書》校勘〉,《HPM 通訊》第三卷第十一期：1-20。

關於漢字文化圈數學教育的幾點思考

中國貴州畢節師專數學系　夏瑁教授

無疑，漢字文化圈數學教育，一般說來是與漢字文化教育密切相關的（尤其是在十六世紀以前），或者說是漢字文化教育中的一個領域。因爲漢字文化中的數學文化，完全可以說是與漢字文化同時起步的，中國古代數學的表述方式就是與古漢語同出一轍。基於此，凡漢字文化圈的數學教育，很自然的是應該介紹中國古代數學及其歷史（以下分別簡稱爲『中數』及『中數史』）的，又正因爲『中數』不及近現代數學有那樣嚴密的思維體系，故『中數』中的一些思維特徵，也是適合中、小學學生的思維特徵的，故筆者在此對漢字文化圈數學教育提出以下幾點粗略的思考。

思考之一，凡漢字文化圈數學教育界（一國之內），『中數』及『中數史』均應有專人進行研究。這是因爲，只有專門研究『中數』並有成果的人才能夠容易將『中數』理解與闡釋得較爲接近其『本來面目』。如此一來，一些數學教育研究專家、數學課本編輯與數學教師，才容易知道哪些『中數』內容（含解題方法），是適合安插（融入）于學生所學的數學知識之中的。雖然我們不應當要求所有數學教育工作者都去弄懂『中數』古典原著，但對於『中數』研究有成果的數學教育工作者，我們應給予大力支持、幫助與鼓勵。

思考之二，基於上述『思考之一』，凡研究『中數』者，只需將其『本來面目』說明清楚，讓當今的『中數』愛好者能弄清楚其原意即可（研究西方古代數學亦如此。筆者並非認爲研究古代數學者可以不懂必要的近現代數學知識），不必要將其直接轉換成近現代數學的形式（因爲這是當今數學教育專家與數學教師或數學愛好者自己的事情）。筆者認爲，這樣既可以使『中數』與近現代數學之間的『翻譯』表達少（或不）出現『牛頭不對馬嘴』的現象；更爲至關重要的是，這樣才有利於研究『中數』的專家真正專注于對『中數』的研究。

例如，『中數』中給一個應用題的解答，往往原著中只有一個最後答案。有的專家只是運用近現代數學知識去表達古人的解題過程，而略去了對古人解題過程的研究；筆者認爲，這是“中數”研究中的一種失誤，因爲今天的讀者並不能由此看出古人的解題過程究竟是怎樣的；而只有根據原題意，撇開近現代數學的表達方式，將古人解答此題的原思路與表達形式盡最大可能地挖掘（即『直譯』）出來，才算是在真正地對『中數』進行中肯地研究，才能讓古人的解題思想方法重見天日，從而達到『古爲今用』之目的。爲此，不妨在下面舉例說明之。

例一：**李白無事街上走，提著酒壺去買酒；遇店加一倍，見花喝一斗；**

三遇店和花，喝光壺中酒。試問壺中原有多少酒？

此題大意爲：李白每一次遇到酒店，都要買酒，其數量與壺中存有酒的數量相同，而且，每次遇店之後又見到花時，同樣均喝去一斗酒；在第三次遇到店和花之後，喝光了壺中的酒。試問，首次遇到酒店之前李白的酒壺中原來裝有多少酒？

古人解答此題的思維方式，一般應當是首先緊緊抓住第三次遇店之後只剩下一斗酒，故在此次遇店之後『見花喝一斗』，即『喝光壺中酒』。由此可見，在『第三次遇店』之前，壺中只有 $\frac{1}{2}$ 斗酒（因爲『遇店加一倍』），再加上第二次見花喝去的一斗酒，那麼第二次遇店之後壺中有 $\frac{3}{2}$（即 $\frac{1}{2}+1$）斗酒。由此，可得出『第二次遇店』之前，壺中只有 $\frac{3}{4}$ 斗酒，再加上第一次見花喝去的 1 斗酒，那麼第一次遇店之後壺中有 $\frac{7}{4}$（即 $\frac{3}{4}+1$）鬥酒，所以，『第一次遇店』之前壺中原有的酒，就應該是$\frac{7}{8}$ 斗酒。古人的這種解題思路，對於培養學生的逆向思維（即『執果索因』）能力，是頗有益處的 — 這種能力尤其在社會科學中有著廣泛地應用，儘管看上去好象麻煩一些。

當然，如果不用心去挖掘出古人的這種解題思路，而用近現代數學知識去解之，則只需解一道比較簡單的一元一次方程（$2[2(2x-1)-1]-1=0$）即可。然而，這對於普通的數學愛好者來說，得此『簡單』的解題方法，即感滿足了，對於前面所談古人的解題方法，則『擦肩而過』，也許永遠不會知道。

例二 ：**一個老牧民有 11 匹馬，臨終前對三個兒子說：『我死後你們把這 11 匹馬分掉，老大得$\frac{1}{2}$，老二得$\frac{1}{4}$，老三得$\frac{1}{6}$；但是不准把馬殺掉。』說完，老人就長眠了，3 兄弟分來分去，總是找不到一個恰當的辦法。你能替他們想出個好辦法嗎？**

其實，這道題的解答過程並不複雜，關鍵看研究者是否能吃透古人的這道『智慧型』題目。很顯然，3 兄弟直接分得馬的匹數分別是

老大：$\frac{11}{2}$（匹）； 老二：$\frac{11}{4}$（匹）； 老三：$\frac{11}{6}$（匹）。

可是 $$\frac{11}{2}+\frac{11}{4}+\frac{11}{6}<11,$$

而 $$11-\left(\frac{11}{2}+\frac{11}{4}+\frac{11}{6}\right)=\frac{11}{12}\text{ 。}$$

現在，三兄弟又必須分完這 11 匹馬，就應該有

$$\frac{11}{2}+\frac{11}{4}+\frac{11}{6}+\frac{11}{12}=11,$$

即 $$\frac{11}{2}+\frac{11}{4}+\frac{11}{6}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=11;$$

(按：解此題的絕妙之處，就是（$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$）中的$\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$ ，又剛好是老大、老二、

老三分別應該分得馬的份數。)

由題意與加法結合律，可得 $\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{11}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{11}{6}+\frac{1}{6}\right)=11$。

所以，老大分得馬 $\frac{11}{2}+\frac{1}{2}=6$（匹）；

老二分得馬 $\frac{11}{4}+\frac{1}{4}=3$（匹）；

老三分得馬 $\frac{11}{6}+\frac{1}{6}=2$（匹）。

這種解法，才完全體現了古人給出此題的原本意義。所以，此題的確是一道優秀的『智慧型』題目，我們完全應該將之介紹給廣大學生（湖北少兒出版社將此題編入《1988 年初一數學暑假作業》、湖南教育出版社於 1988 年亦將此題編入《世界數學名題趣題選》，的確是具有慧眼的）。那種只知道用近現代數學知識來解此題，是違背了出題者的本意的。

思考之三，在數學教育過程中貫穿一些『中數史』，並插入一定的『中數』知識的時候，必須和諧得體，既不加重學生的學習負擔，又能使學生對數學更感興趣。例如，我們小學生背誦『九九乘法表』是從『一一得一』開始，而古代小孩背誦此表則是從『九九八十一』開始；這就完全可以引導學生探討和研究一下，究竟是哪一種背誦順序比較便於記憶？這樣的引導，對於天真爛熳的小學生來說，他們的興趣是很濃的、是樂意去反復琢磨的。諸如此類的例子不少，請恕筆者不再贅述。

思考之四，在實現上述『思考之三』的過程中，應順便將與某一『中數』知識有關的數學（數學教育）家的生平、人品、個性與其時代背景等簡介給學生（口頭或書面，有條件的最好以口頭與書面並行的形式），但又不能弄成嚴格的『中數史』教學。例如，在學生學習 $(a+b)^k$（k=2，3，4，5，……）的展開式時，當然可插入『賈憲三角』（也有人稱『楊輝三角』，西方稱之爲『巴斯卡Pascal三角形』），是『中數』中著名的『開方作法本源』圖，而『賈憲三角』（約西元 1050 年）卻比『巴斯卡三角』（約 1654 年）早大約 600 年出現。這時即可將賈憲、楊輝的生平、業績與時代背景等（尤其是『中數家』們的人文精神與詩、詞、歌、賦這方面的作品）簡介一點給學生，學生當然是很高興與覺得很新奇的。

筆者認爲，只有至少實現以上幾點思考的漢字文化圈數學教育，才是真正體現漢字文化圈數學教育特徵的數學教育。

主要參考文獻

李　迪 (1984)，《中國數學史簡編》，瀋陽：遼寧人民出版社。

黃邦本 (1989)，〈談一道古算題〉，《數學通訊》1989（1）：33－34。

陳信傳等 (1992)，《中國古代數學精萃》，貴陽：貴州教育出版社。

錢寶琮 (1964)，《中國數學史》，北京：科學出版社。

《平三角舉要》、《方圓冪積》文本研讀內容摘要

台師大學數學系碩士班 陳彥宏

一、《平三角舉要》內容摘要

《平三角舉要》是梅文鼎早期的作品。梅文鼎以明末傳教士編譯的《大測》、《測量全義》等書爲基礎，對有關三角形的算法作了系統的整理。此書原名《三角法舉要》，因梅氏後來又寫成論球面三角的《弧三角舉要》五卷，《梅勿庵先生曆算全書》和《梅氏叢書輯要》的編者遂將此書更名爲《平三角舉要》。全書共分爲五卷，序言即道出此書一個很重要的目的：嘗試以傳統句股理論整合三角術。

西法用三角，猶古法之用句股也。但三角有鈍角，而句股無之，論者遂謂句股之數有所窮，殊不知銳角形須分為兩句股，鈍角形須補成句股，…，然則句股雖不能備三角之形，而能兼三角之理，三角不能出句股之外，而能盡句股之用，一而二，二而一者也。

底下便將各卷之內容作一簡略之摘要：

	卷　名	內　　　容
卷 一	測算名義	各種定義（包括點、線、面、體、三角形、角、弧、矢、通弦、大矢、正弧、餘弧、正角、餘角、割圓八線、相似形）、同角三角函數間的關係、八線表、互爲餘角及補角的三角函數間之關係。
卷 二	算例	以例題介紹各種三角形的算法。
卷 三	內容外切	包括三角求積、三角容圓與三角容方。
卷 四	或問	利用句股理論對各種三角形算法進行證明，有「三角形用正弦爲比例之理」（即正弦定理）、「和較相求之理」、「用切線分外角定理」、「三較連乘之理」（即 Heron 公式）。
卷 五	測量	爲“生活中之測量實例”，包括「測高」、「測遠」、「測斜坡」、「測深」四種類型。

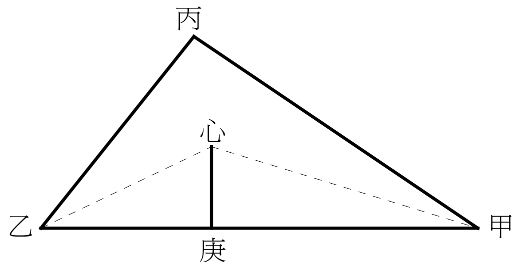
在梅文鼎的時代，三角術並未發展成一門獨立的學科，主要的定義、公式與定理都是經由幾何的方法推導而得，因此，《平三角舉要》一書中含有各種圖形，作爲輔助說明之用。

值得一提的是，除了介紹各種三角形的算法外，在卷三出現了「以量代算」這樣的方法，以書中的「三角求積第二術」爲例：

三角求積第二術　以中垂線乘半周得積，謂之以量代算。

假如鈍角形，乙丙邊五十八步，甲乙邊一百一十七步，甲丙邊八十五步，求積。

術平分甲、乙兩角，各作線會于心，從心作十字垂線至乙甲邊如心庚，即中垂線也，乃量取中垂線心庚，得數一十八步。合計三邊而半之一百三十步為半周，以半周乘中垂線，得積。

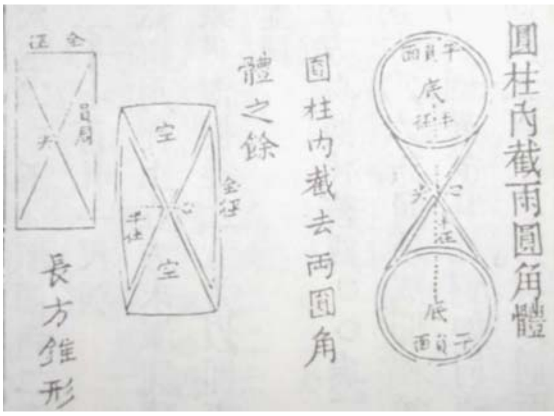


在三角形中，先作兩角平分線以求出內心，再由內心對某一邊作垂線，然後“直接量取”此一垂線長度即可得該三角形內切圓之半徑長，姑且不論其「精確性」和「嚴謹性」，這樣的方法，在當時三角術的核心內容還是以大地及天文測量問題爲背景的年代，確實已經足夠！

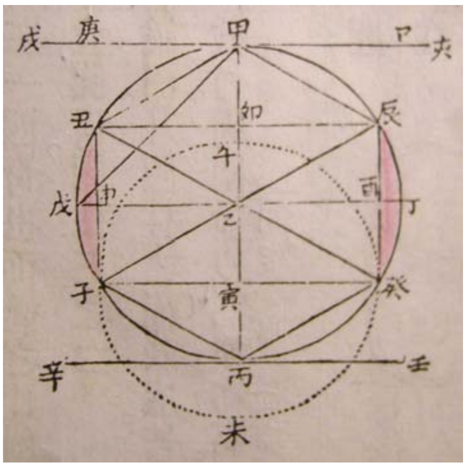
二、《方圓冪積》內容摘要

《方圓冪積》是梅文鼎研究圓與球體的專著。《勿庵曆算書目》作二卷，各種刻本均爲一卷。其內容包括方圓相容（有方中容圓、圓中容方）、方圓周徑相求（有同積較徑、同積較周、同徑較積較周、同周較積較徑）、圓錐與球及圓柱表面積、體積之間的關係。

全書多以條列方式敘述，不過，在討論同底等高之圓柱與圓錐間的關係時，他利用如下圖之“切割”方法進行了詳細的推導。



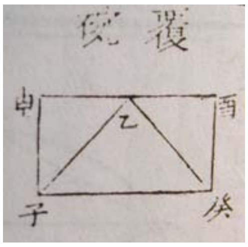
另外，梅氏亦利用三維的「出入相補」方法，正確地推導出球體公式，這項成就對當時而言，著實意義深遠！底下便簡單摘錄其論述內容。

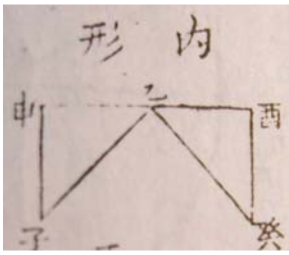


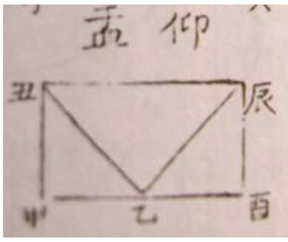
梅文鼎首先敘述其“切割”方式：

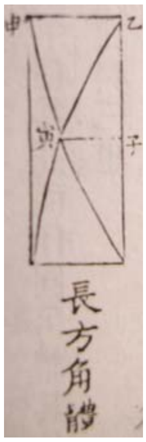
甲戊丙丁渾圓體。　從丑乙、辰乙、癸乙、子乙、卯乙、寅乙等各半徑，各自其渾冪透至乙心，以半徑旋行而割切之，則成上下兩圓角體，一甲卯辰丑乙以甲丑卯辰割渾圓之面為底，乙為其銳。此割圓曲徑，自丑而甲而辰，居圓周三之一，一丙癸寅子乙以子丙寅癸渾圓之割面為底，乙為其銳。此割圓曲徑亦三之一，如三百六十之一百二十。此上下兩角體相等，皆居全渾體四之一。中腰成鼓形，而上下兩面並窆空各成虛圓角其外則周遭皆凸面，如丑戊子及辰丁癸之割圓狀。此割圓曲徑，自辰而丁而癸，居圓周六之一，為三百六十之六十。

此鼓形體，倍大於上下兩角體，居渾圓全體之半。若從戊乙丁腰橫絕之為二，則一如仰盂，一如覆碗，而其體亦渾圓四之一也。









接著，梅氏再論爲何以上述之切割方式會得到四個體積相等之立體：

試於乙丙子癸角體，從子寅癸橫切之，則成子未癸午小圓面，為所切乙子寅癸小圓角體之底，乃子寅小半徑，乘子未癸小半周所成也。然則以子寅小半徑，乘子未癸小半周，又以乙寅半半徑為高乘之，而取其三之一，即小角體矣。

試又于中腰鼓體，從丑子及卯寅及辰癸諸立線，周遭直切之，脫去其外鼓凸形，即成圓柱體之外周截竹形。又從酉乙申橫切之為兩一仰盂，一覆碗。則此覆碗體舉一式為例，可直切斷而伸之，亦可成方角體，此體以乙寅半半徑，乘子未癸午小圓全周為底其形長方，此長方角體必倍大于小圓角體。何也？兩法並以小半徑，及半半徑，兩次連乘，取三之一成角體，而所乘者，一為小圓全周，一為小圓半周，故倍大無疑也。

又丙癸寅子亦可成角體，與乙子寅癸等。覆碗體既倍大，則兼此兩角體矣。

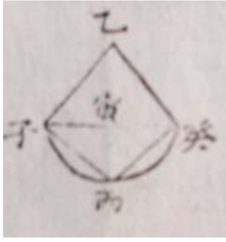
上段說明先將「凸形」切去，得到「圓柱體之外周截竹形」體積是上下兩角體的兩倍，然後

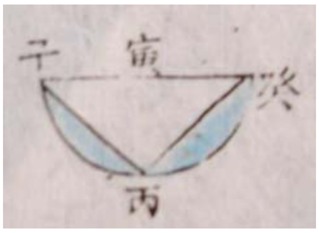
又角體內，既切去一小角體，又窆去一相同之小角體，則所餘者為丙癸寅子圓底仰盂體。

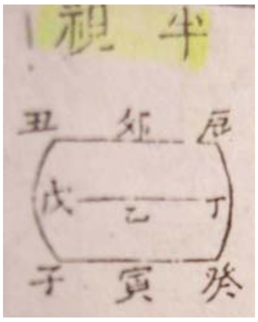
鼓體內既窆去如截竹之體，則所餘者為內平如丑子或辰癸外凸如子戊丑及辰丁癸之空圈體，

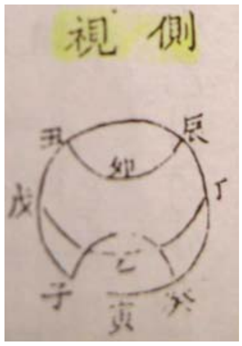
而此體必倍大于圓底仰盂體。何以知之？蓋兩體並以半徑為平面丑子與癸丙並同。並以圓周六之一為凸面，而腰鼓之平面以半徑循圓周行，圓底仰盂之平面，則以半徑自心旋轉。周行者，兩頭全用；旋轉者，在心之一頭不動，而只用一頭，則只得其半矣，故決其為倍大也。

準此而甲丑卯辰，亦為窆空之圓覆碗體，而只得鼓體之半矣。由是言之，則上下角體各得中腰鼓體之半，而鼓體倍大于角形，渾體平分為四，夫復何疑。









推導出球體積爲圓錐體積之四倍，再利用之前所得的圓錐體公式，便可得到正確的球體體積公式！

三、參考資料

劉鈍(1993)，〈平三角舉要提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四，鄭州：河南教育出版社。

劉鈍(1993)，〈方圓冪積提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷四，鄭州：河南教育出版社。

《平三角舉要》與《方圓冪積》初探

台師大學數學系教師在職進修碩士學位班 麗山高中彭良禎老師

一、 緣起

9 月 14 日「人文社會科學史料典籍研讀會」由陳彥宏導讀清朝梅文鼎（1633-1721）的《平三角舉要》與《方圓冪積》。此次研讀的文本源自《梅氏叢書輯要》，收錄於郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，頁 458-517。在〈平三角舉要提要〉中，劉鈍特別指出「梅文鼎在明末傳教士編譯的《大測》、《測量全義》等書的基礎上，對涉及三角形的幾何學性質以及有關三角術的算法作了系統的整理」。由於《大測》與《測量全義》恰涵蓋於筆者正埋首研究的《崇禎曆書》中，因此，對於這次的研討很有感覺，茲將部分文本的初步研究及些許心得與大家分享。

二、梅氏編撰時的想法

概略說來，《平三角舉要》與《方圓冪積》本該算是兩個不同的知識面向，前者是藉由測量談三角之法與原，後者則是給出方與圓、柱體與球體等相關的比例計算。然而，梅文鼎在兩篇內容的安排上，有個地方極其特別，那就是在《方圓冪積》中，全未提及古今算家如何計算圓面積，反將此部份以「補遺」的形式安插在《平三角舉要》卷一的〈測算名義〉中。[1]對於這樣的設計，想必是另有安排。

先從這兩處相關字面上觀察，則不論是中法的「割圓求積」，還是西法的「割圓八線」，

恰好都有「割圓」二字，這或許給了梅文鼎一些靈感，以至於他在方法上，「補遺」一開頭便強調「正弦為八線之主」，由於古今中西的「割圓之法，皆作勾股於圜內，以先得正弦」，因此，不論是中法「劉徽、祖沖之以割六弧起數、趙友欽以四角起數」，還是西術以「六宗率則兼用之」，[2]是皆「理之至者，先後一揆，法之精者，中西合轍」的昭然之理，「故古人只用正弦，亦無不足」。

換句話說，梅文鼎之所以能將三角與方圓這兩個主題「送作堆」，是由於他看穿了在計算圓面積的逼近過程中，總是要用到「外接圓半徑 R、內切圓半徑 r 與半個邊長 a／2」所形成的勾股形，而「半面為股，則正弦也」、「所用小股，皆正弦也」，換言之，對梅文鼎而言，正弦即是勾股的化身，而割圓即生三角，三角又以正弦爲首，所以，梅文鼎只是順水推舟地將劉徽《九章算經》的割圜術、趙友欽《革象新書》中的「乾象周髀法」，全都換上西法「三角」的新包裝而已。

「補遺」中最後總結「中西割圜之法，皆以勾股法求通弦，通弦半之為正弦，割圜諸率，皆自此出，總之，為勾股之比例而已」。無怪乎梅文鼎在〈平三角舉要序〉中，開門見山即強調「西法用三角，猶古法之用勾股也」。而在三角與勾股正反兩論分分合合之後，梅文鼎便中西會通地下了「勾股雖不能備三角之形，而能兼三角之理，三角不能出勾股之外，而能盡勾股之用，一而二，二而一者也」的結論。因此，如果說梅文鼎是站在肯定中算勾股的基礎上，同時取長西法三角「用之殊便」的實際功能，來重新審視、整理，那麼，劉鈍在〈平三角舉要提要〉中尊崇該書卷「堪稱中國歷史上第一部三角學教程的著作」的說法，也就不足爲奇了。

順帶猜想，此次的內容安排，或許是爲了讓大夥體驗「會通之後的一貫」，才會用心良苦的在梅文鼎的眾多數學遺作中，刻意挑選這兩篇書目研討吧！

三、測算名義

梅文鼎在重新消化、整理整套三角學的知識內容時，仍延續《幾何原本》「凡造論，先當分別解說論中所有名目，故曰界說」的習慣，將「點；線；面；體；三角形；角；弧；割圓弧矢；通弦、正弦；正矢、大矢；正弧、餘弧、正角、餘角；正弦、餘弦、正矢、餘矢；割線、切線；割圓八線；角度；相似形；比例；八線表；半徑全數；鈍角正弦、餘弦；過弧、大矢；正角正弦」等使用名詞的定義，「爰摘綱要，列於首簡」，隨即強調「不可以不知」。

然而，雖同樣是名詞介紹，其所用術語卻大不同，《大測》採用佛門的「因明」，《測量全義》恪守尊師的「界說」，而《平三角舉要》則是另創新派「名義」，箇中差異，饒富趣味，或值一探。此外，在介紹名詞的過程中，亦夾雜定理論述，茲舉數個面向供讀者欣賞。

（1） 點、線、面、體

仍提長短、廣狹、厚薄，並附圖說明。所不同者，皆舉日月測行、田疇櫃塔等測算實例、實物，從而直觀地得出「故線以點為其界」、「故面以線為界」、「皆以面為界」的結論（而非定義）。[3]此或突顯出梅氏在「名義」前冠上「測算」二字的源由。另外，「線」只談弧線（中規）與直線（中繩），未提雜線，想是因爲此處的研究對象皆爲「有法之形」的緣故，而附圖中則指出平行直線「凡平行線，必相距等」的性質。

（2）三角形

仍強調「必三線以上」、「形之始也」，至於「故三角者，量法之宗也」的結論，則可從附圖所隱藏的公式「從一個凸 n 邊形的頂點連對角線，可將原形分爲 n－2 個三角

形」，再加上「凡可算者，為有法之形；不可算者，為無法之形」的觀點來說明，因爲勾股爲有法之形，而斜角形或分或補，皆可成勾股形，至於通通可入算的「海龍公式」，則出現在卷三〈內容外切〉「三角求積第三術：以三較連乘，又乘半總，開方見積」。

（3） 角、弧、角度

從「線既平行，雖引而長之，至于無窮，終無相遇之理」平行線的直觀想法，引入「兩線相遇則成角」的概念，並提及正方角、銳角、鈍角。其中 90 度角亦曰直角、亦曰方角，或省曰正角、象限角，但文後卻全然避用「直角」一詞，若從字義上來看，大概是因爲「正方」一詞所表達的圖感優於「直」字所傳達的體勢吧！至於利用「兩線十字縱橫相遇」的「十字」來「圖釋」垂直的概念，又或許是在明清之際，「西學」即等於「聖教」的趣味連結。而「角之在小形與在大形，無以異也，故無丈尺可言，必量之以對角之弧」的敘述，則突顯出梅氏已掌握到「角經放大、縮小仍不改其度」這種與眾不同的性質。（這個概念在《大測》與《測量全義》中似未出現，待考）

（4） 相似形、比例

在「有兩三角形，其各角之度相等，則為相似形，而兩形中，各邊之比例相等」中，梅文鼎特將「相似」與「形」兩種概念合成一個專有名詞，是否爲首創？待查證。又梅文鼎的年代當未能接觸《幾何原本》第七、八、九卷的內容（巧妙地藉由幾何量談比例，以避開數的不可公度），不過其「兩數相形則比例生」這句話，頗能反襯出「在不同時空背景下，數學知識的發展性、侷限性與啓發性」。附帶一提，雖屬定義名詞之介紹，但在前後次序上，仍發生「倒置」的情形，如「割圜八線」條即引用後「比例」條。此現象在西學知識日漸被中算家消化、吸收，甚至成爲基本術語的時空背景下，或無法避免。

（5） 半徑全數

藉由「正弦必小於半徑」、「割切二線皆依正弦而生，亦皆有畸零」來說明何以新法中會將半徑冠上「全數」之名，並強調如此一來（半徑即等於全數），在三率法求數及乘除運算時的方便。不過，梅文鼎在卷二〈算例〉的描述中，爲了突顯「比例之理」，從頭到尾堅持使用半徑一詞，而未採用新法之全數。對梅文鼎而言，「形」與「數」這兩種各自代表「幾何」與「算術」的不同表徵，想必是有明確界線，但卻又互相依存的，因爲必「形」才能相似，且需有法之形可算，而半徑爲形非數，全數爲數非形，因此兩數須相形始生比例。

（6） 直角、鈍角之正弦、餘弦

承續《大測》從鈍角的補角來定義其正弦、餘弦，所不同的是，梅文鼎特別爲鈍角的「正矢」另立一條目「大矢」。而對於正方角正弦的描述，則是：「八十九度奇之正弦，至九九九九九而極，迨滿一象限，始能成半徑全數，故半徑全數者，正角九十度之正弦也」，由此可見，梅文鼎從銳角正弦推廣到正角正弦的函數遞增與極限想法。

四、中西對照與一二考證

梅文鼎在〈測算名義〉「八線表」條後，補述「銳角分兩勾股，鈍角補成勾股，然惟有八線表中豫定之勾股，故但得其角度，則諸數歷然，可於無勾股中尋出勾股矣」，此正呼應劉鈍在〈平三角舉要提要〉中提到「此書也是作者藉助傳統勾股理論整合三角術的一個嘗試」，故擬對照《大測》與《測量全義》，將中西之「三角」、「勾股」和「圜徑之法」等相關

評述，列表對照如下，期供讀者一探梅氏會通之源：

〈大測序〉 勾與股交必為直角，……，遇斜角則勾股窮矣！分斜角為兩直角，亦勾股也，遇或不可得分，又窮矣！	〈平三角舉要序〉 但三角有鈍角，而勾股無之，論者遂謂：勾股之術有所窮。殊不知銳角形須分為兩勾股，鈍角形須補成勾股，
〈大測序〉 以弧求弧，無法可得，必以直線、曲弧相當相準，乃可得之，	〈平三角舉要序〉 至於弧三角以直線測渾圓，其理最奇，
〈大測序〉 而圍與徑，終古無相準之率。古云「徑一圍三」，實圍以內二徑之六弦，非圍也。祖沖之密率云「徑七圍二十二」，則其外切線也，非圍也。劉徽密率云「徑五十圍百五十七」，則又其內弦也，非圍也，或推至萬萬億以上，然而小損即內弦，小益即外切線也，終非圍也，	〈方圓相容〉 《新法歷書》曰，又云「徑一圍三，絕非相準之率，然徑七圍二十二則盈，徑五十圍百五十七則朒，或詳釋之，則徑一萬，則圍三萬一四一五九，雖亦小有畸零不盡，然用之頗為相近。
《測量全義》卷五〈圓面求積〉 徑與周之比例，古士之法如此，今士別立一法，其差甚微，然子母之數積至二十一字，為萬億億，難可施用。 〈大測序〉 歷家以勾股開方展轉商求，累時方成一率，然不能離徑一圍三之法，即祖率已繁不復能用，況徽率乎？況萬萬億以上乎？是以甚難而實謬，	〈方圓羃積說〉 《歷書》周徑率至二十位，然其入算，仍用古率（十一與十四之比例，本祖沖之徑七周二十二之密率），豈非以乘除之際，難用多位， 【註】左言 21 字，此言 20 字，應是梅氏忽略誤差，只考量準確值的關係。以下寫至 36 位供讀者參考（有 0 哦！） 3.141592653589793238462643383279502884

由於梅文鼎在其「教科書」體例格式的安排上，並未如前輩們以《幾何原本》爲宗，處處引經據典，將論證體系環環相扣。若從「假如」、「問曰」、「解曰」、「術曰」、「答曰」等體例來看待這套教程的編輯，則應歸屬「草稿」而非「標準版」。茲就文中相關引述略加考據。

（一）《新法曆書》

「《新法歷書》曰：割圓亦屬古法」。[4]明末徐光啓領導編修的《崇禎曆書》，前後分五次進呈，合計一百三十七卷，然刊成未及頒行（後又陸續進器與書，共一百四十餘卷）。清順治二年（1645），湯若望刪修成《西洋新法曆書》一百卷進獻，至康熙十三年（1674）時，又刪增成《新法曆書》九十七卷刊印，部分內容見載於《古今圖書集成》曆象彙編曆法典。[5]末至乾隆皇帝開《四庫全書》館，將之刪增爲《新法算書》一百卷，收入子部天文算法類。

（二）《筆算》

「總而言之，皆以先有兩數之比例，為後兩數之比例。其乘除之法，皆一三率也（三率法詳《筆算》)。[6]《筆算》收錄於《梅氏叢書輯要》首五卷。《測量全義》卷一第七題關於「三率法」一詞的描述如右：斷比例之四率，以三推一，名「三率法」：四幾何為兩比例等，先有三推得第四。……，列第一、第二、第三率，即可推第四率。依（《幾何原本》）七卷十九題，中率相乘與首尾兩率相乘得數等。故二三相乘為實，第一為法，而一，得四率也。據陳敏皓《《同文算指》之內容分析研究》的論文研究，三率法的引進介紹首出其中。

（三）《比例規解》

「論曰：……，即《比例規》變面線之理」，[7]義大利傳教士羅亞谷譯撰的《比例規解》見於崇禎四年八月初一日《崇禎曆書》第二次進呈的書目中，後梅文鼎將全書修潤成《度算釋例》，並將「變面線」一詞改爲「更面線」，是書收錄於《梅氏叢書輯要》八、九卷。

（四）術語

《測量全義》卷一第一題「通弦與通弧，正弦與正弧比例等（比例等後省曰『若』)」，因此「a與b若A與B」即是《測量全義》中用以表示「a：b＝A：B」的術語，此用到了梅文鼎身上則多成了「a比b若A與B」，「比」似乎成了一個專有名詞。（偶爾也出現「a 比b若A比B」或「a與b若A與B」的敘述）。[8]

（五）其他

附圖上所標識的字或數字，有正放的、斜擺的、橫躺的，更有倒立的，此情況未見於《新法算書》，而用來識別之字眼。《幾何原本》中徐光啓道「凡圖，十干為識，干用盡用十二支，支用盡用八卦、八音」，[9]而梅文鼎除了採天干、地支外，另有「亢」、「房」二字的出現，[10]不知有無特別用意？至於海龍公式的證明、測量高、深、遠、廣等問，亦見載於《測量全義》，待來文再探。

五、關於「教程」的幾個 HPM 觀

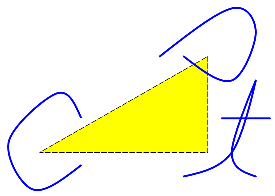
若從今日數學課堂上的教學方式或教材編排，來看待梅氏「這部堪稱中國歷史上第一部三角學教程的著作」，有些現象或問題值得站在教學第一線的教師們學習與深思。

（一）古今三角教學

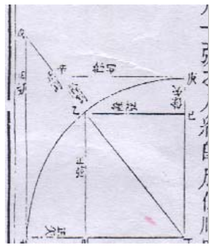
現今數學課堂上，每當介紹三角函數的單元時，黑板上的圖形全都是「第一象限的表徵」，因爲如此一來，當要介紹 sin、cos、tan 的定義時，老師們都會搬出拿手絕活，只要將 sin、cos、tan 中的 s、c、t 字母給他草寫（圖一），學生馬上不費吹灰之力便都清楚斜邊、對邊、鄰邊應該放哪兒了。

然而，在明末清初，sin、cos 這些「番話」未見眾習，上述捷法必定「當機」！因此，《平三角舉要》延續《大測》、《測量全義》的策略，採取「圖文對照」的方式介紹，因爲用弦、切線、割線來割圓，而所割之形「如弓之曲」，故得矢，如此四線，再加上餘角所成四線，順理成章便以「割圓八線」名之，而「正弦、正切線、正割線、矢、餘弦、餘切線、餘割線、餘矢」一概只須「看圖說故事」，至於彼此的「餘角關係」，更是望文生義便得。

古今兩教學法不同，今法或許速成，立竿見影，但剩下的倒數關係可不易收拾，[11]所以，才又得發明「雪花圖」捷法。而古法的圖像記憶或許老牛慢步，然而，一旦認清名詞，無煩再背矣！更巧妙的是，古法用以詮釋的圖形幾乎都是「第二象限的表徵」（圖二），這樣的安排，在拓展至廣義三角函數（尤其是鈍角）的介紹時，一切就都自然而然，順理成章。課堂上若作這樣的鋪路，對於學生後續學習，相信是有價值的。



圖一：s、c、t 草寫



圖二：割圓八線第二象限表徵

另外，梅文鼎還強調幾近補習班口訣的「但以餘為正，以正為餘」、「正餘互用」，也頗顯「編寫教材」的風格。又「既稱八線，刻中何以無矢？矢者，弦之互餘相減即得也（法見後條）」。[12]由於半徑為全數，加減即得矢，因此，無須浪費版面造表，然而今日課堂上從頭到尾只介紹六線，究竟矢之巧妙大用為何？何以古人視為珍寶，今人全然不理不睬？以上種種，在三角單元教學中，或可換換口味補充、思考。

（二）三角形內角和定理

梅文鼎在「凡三角形併三角之度，皆成兩象限（一百八十度）」定理的證明上，將勾股形內角和一百八十度當作已知，把銳角三角形分成兩勾股形證明，鈍角三角形並同。[13]同時，為了證明這個已知，梅文鼎還特地在前頭「割圓八線」條，安排「順勾股形」與「倒勾股形」為熱身，若從教材的編排觀點而言，獨見其匠心與用心。而梅文鼎從勾股切入此定理，固然有其「一而二，二而一」的一貫想法，但若仔細分析其證明過程，除了「順、倒」與「勾股」，剩下的就只是「正餘互用」的定義而已，因此，「勾股三角之度皆成兩象限」這個已知，就變得那麼地理所當然了。

（三）尺規作圖

【範例】鈍角形第三術「有三邊求角」（新式）

【解法】術自乙角作垂線至甲，又引丁丙線遇於甲，則成乙甲丁勾股形。又引橫線至辛，使甲辛如甲丙，成乙甲辛勾股形，則……

尺規作圖的單元教學，曾是現今中學幾何證明的重要媒介，而其中「輔助線」無中生有的歷程，最是學子感到徬徨、無所適從之處。從此經驗來看待上題的教學「解答」，雖不難從已知圖形與作法的描述中拼湊出完整的圖像，然而，整個作圖過程卻是嚴重的「無序」，好似那些隱藏的點、線、面原本就該出現在那兒，類似的情況在《新法算書》中屢見不鮮。如此的教材設計若成教師手冊，則新手該如何上任才能使得教材更具創造性與啓發性？

另外，三率法的計算結果常需處理反三角函數，也就是求得某一八線數值，再求其對應角度。面對這樣的情形，梅文鼎在數據的設計安排上，與《新法算書》如出一轍，呈現兩極化，有設計精確的 $\tan^{-1}17633 = 10°$，[14]也有誤差頗大的cos40o＝76604＜cos-176616＝40o＜cos39o59’＝76623。[15]此現象雖不免受誤差概念所影響，[16]但在「中算第一人」梅文鼎身上，或多或少仍見西法的影子。

（四）限制的背後

不論是《新法算書》，還是《平三角舉要》，整個關於三角的運算性質中，皆未出現餘弦定理，由於時空背景所造在成方法上的限制，其背後所發展的劇情，或為開拓另一新紀元的點子。茲以筆者在咬文嚼字，幾經細讀後，豁然開朗之處為例

【範例】銳角形第三術「有三邊求角」

【解法】術為以勾總比弦總，若弦較與勾較也。

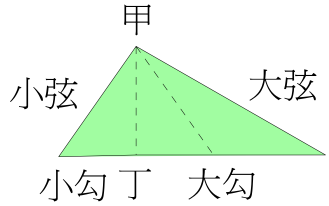
既無餘弦定理，對於「勾總比弦總，若弦較與勾較」這個陌生之「術」，筆者只好反過來「看圖說故事」了：(圖三)

∵ （大勾＋小勾）:（大弦＋小弦）＝（大弦－小弦）:（大勾－小勾）

∴ 大勾^2－小勾^2 ＝大弦^2－小弦^2

故 大弦^2－大勾^2 ＝ 小弦^2－小勾^2

即 甲丁^2



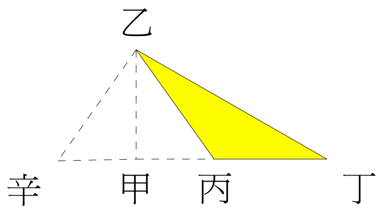
（圖三）

雖經一番推導得以確認此術無誤，然而對此天外飛來之術仍不得其門而入。筆者之後又繼續埋首鑽研，直到邂逅了下題：

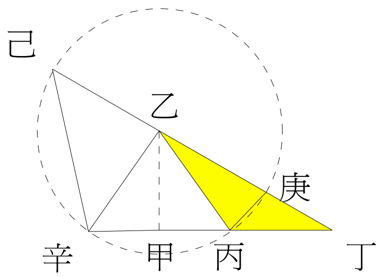
【範例】鈍角形第三術「有三邊求角」(新式)

【解法】術……，乃以勾較比弦較，若弦總與勾總。(圖四)

現在看來，這兩題根本就是換湯不換藥，可以直接跳過，無奈筆者當時腦袋混沌，早將前題歸零，所以又要再說一次故事。不過卻由於銳角與鈍角圖形的「體勢」不同，筆者才靈光乍現，說成了另一個故事：從鈍角形補成勾股形，再補成銳角形，又再加上「總」與「較」的感覺，最後就補成圖五的樣子了，如此一來，管他是勾較、弦較，還是勾總、弦總，只須Δ丁己辛≅Δ丁丙庚，一切就都迎刃而解。後來筆者在綜合總整理時，看到這一巧妙變化，於是迫不及待地想寫下來與大家分享！



（圖四）

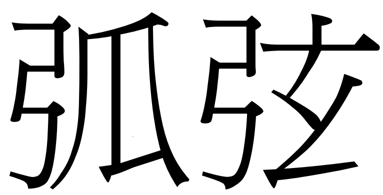


（圖五）

由於梅文鼎深受銳角形與鈍角形擺放的體勢所影響，因此，鈍角形永遠只能「補」成勾股形，而不能仿銳角形的「分」成勾股形來畢其功於一役。然無彼一役（分成勾股形，再以勾、弦之總與較證之），即有此一役（還原成圓上的兩割線，再以相似形證之)。相較起來，後術的認識就變得那麼直接，筆者由此而陰錯陽差的親身體驗，或值得在教學方法上多作反思。

六、插曲一則

關於文本中的用字，讀者可曾察覺「弧」與「弦」兩字總是長得怪怪的？若無此感覺，不妨現在睜大眼睛仔細瞧瞧右圖的模擬字，是不是都「少了一點」，這個現象是爲了避諱清高宗乾隆皇帝的名號「弘曆」，因爲「弧」與「弦」中都藏有「弘」的結構，所以就得「避嫌」啦！否則到時候少的不是「點」，而是「頭」。同樣的「新歷」、[17]「歷書」、[18]「新法歷書」、「授時歷」就都是在避「曆」字。[19]（到後來更用「秝」



替代）

或許有讀者會根據這兩篇文本的書成年代而提出反駁，例如在劉鈍的〈平三角舉要提要〉所引的「是書安溪公刻於保定，乙酉南巡蒙恩召對御覽」，以及〈方圓冪積說〉的「癸未歲，匡山隱者毛心易乾乾偕其婿中州謝野臣，惠訪山居，共諭周徑之理目，反覆推論方圓相容、相變諸率。庚寅在吳門，又得錫山友人楊崑生定三《方圓訂註圖說》，益覺精明」，文中出現乙酉（清聖祖康熙 44 年，1705）、癸未（42 年，1703）、庚寅（49 年，1710），由此可推知，這些文本早在康熙朝就已刊印，因此「少一點」應是刻版或印刷不清的問題，而「歷」與「曆」當如同「圓」、「員」、「圜」等，通用無妨，況且就算真要避諱，也當是清世祖順治皇帝的「福臨」或康熙皇帝的「玄燁」才對，哪裡輪得到孫子乾隆皇帝！

上述的年代考據確屬真實，不過可別忘了《通彙》所收錄的《梅氏叢書輯要》版本前都有梅氏子孫的刊校資訊，因此，在重新刻印時，該怎麼避諱，就不得不看看當家的臉色囉！至於「刻版或印刷不清」的說法雖不無可能，然而文本中的「法」字就從來不曾少一點。以上插曲，聊供同好作爲研究清朝文本茶餘飯後的話題，至於「己」、「已」、「巳」不分家的情況，是否還隱藏另一位大人物（雍正皇帝胤禛），目前未瞭，有待讀者高明。

七、後記

因爲有感覺，所以認真鑽研，本以爲兩天的週休可以敲定，如今已一週，實在是因爲越鑽研，冒出的想法與問題越多，加上對於明清數學環境的涉略嚴重不足，案頭參考書目又少得可憐，要查證，總得大費周章，或許其中不少疑問早該是入門明清數學史研究的基本常識，而自己一概付之闕如，以致庸人自擾，而某些想法，也可能是門外漢的笑話吧！洪老師也鑒於夥伴們撰寫論文的現況，特別 E-mail 提醒大家可參考文俊、梅茵與宗奎小組讀書會的研討分享方式，以避免閉門造車與單兵戰鬥的浪費，一週來感受良多，大夥一同努力！

註解：

1. 參閱《梅氏叢書輯要》卷十九，頁 13b-14b。
2. 六宗率參閱《新法算書》卷九，頁 21b-26a 之《大測》〈表原篇〉：宗率一「圈內六邊等切形，求邊數」、宗率二「內切圈直角方形，求邊數」、宗率三「圈內三邊等切形，求邊數」、宗率四「圈內十邊等切形，求邊數」、宗率五「圈內五邊等切形，求邊數」、宗率六「圈內十五邊等切形，求邊數」。
3. 參閱《幾何原本》〈界說三十六則〉第三界「線之界，是點（凡線有界者，兩界必是點）、第六界「面之界是線」、第十三界「界者，一物之始終。今所論有三界：點爲線之界；線爲面之界；面爲體之界，體不可爲界」。
4. 參閱《梅氏叢書輯要》卷二十四，頁 2a 之《方圓冪積》〈方圓相容〉。
5. 曆法總部彙考收錄五部、測量部彙考收錄三部、算法部彙考收錄二部、儀象部彙考收錄一部。
6. 參閱《梅氏叢書輯要》，卷十九，頁 12b 之「比例」條。
7. 參閱上書，卷二十四，頁 7b 之《方圓冪積》〈方圓周徑相求〉約法。
8. 參閱上書，卷二十二，頁 5a 之「全與全若半與半也」、頁 9 之「故大勾比大股若小勾比小股」。
9. 參閱《幾何原本》〈界說三十六則〉第一界之註解小字。
10. 參閱《梅氏叢書輯要》，卷十九，頁 12a 之附圖。
11. 若從古法的定義來看，今日所謂的「倒數關係」並非顯而易見，不過，梅文鼎在「比例」

條後則補充了類似今日「商數關係」的「八線自相生之比例」，此亦見於《新法算書》卷九十三，頁 1a-5b 之《測量全義》卷七「圈內線相當之理」。

12. 參閱《新法算書》卷八十一，頁 1b；5a 之《八線表》卷上「表中用線相求法第六條：求矢法『求設弧之餘弦，以減全數，得正矢，…，若求餘矢，則以正弦減全數，得餘矢』」。
13. 梅文鼎在註解小字強調「乙為鈍角，並同」，若據前後文一貫的想法，鈍角三角形是「補」而非「分」成兩勾股形，故其「並同」一詞應是指「皆以勾股形內角和成兩象限為已知」。
14. 參閱《梅氏叢書輯要》卷二十，頁 6b。
15. 參閱上書，卷二十，頁 8b。
16. 參閱上書，卷二十四，頁 6 之「約法……，去末六位，得同積之圓徑」。
17. 參閱《梅氏叢書輯要》卷十九，頁 1a，「新歷之妙全在弧三角」。
18. 參閱上書，卷十九，頁 13a，「《歷書》中多言全數」、同上書，卷二十四，頁 1a，「《歷書》周徑率至二十位」。
19. 參閱上書，卷二十四，頁 7b-8a，「《授時歷》謂之平差」。

劉徽之『割圓術』

台師大數學系教學碩士班 徐梅芳

劉徽注《九章算術》〈方田章〉中的『圓田術』：

按：半周為縱，半徑為廣，故廣縱相乘為積步也。

從中，我們可以看出：劉徽將『圓田』化為長為半周寬為半徑的『長方形』加以計算。然則圓田又是何故列入〈方田章〉中呢？劉徽何以會『將圓化方』呢？

在李繼閔的《《九章算術》及其劉徽注研究》中，作者指出：中算家素以圓、方相提並論。《周髀算經》卷上，載有周公請教商高天圓地方之量數從何而得的對話。商高回答：「數之法出於圓方。圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。」所謂「圓出於方」，注云「圓規之數，理出於方」，是說圓的數量乃歸之於方來計算。所謂「方出於矩」，注云「方正之物，出之以矩；矩，廣長也」，是說方形的數量是由它的長與寬決定的。所謂「矩出於九九八十一」，注云「推圓方之率，通廣長之數，當需乘除以計之，九九者，乘除之原也。」既然『圓出於方』，那麼，將「圓田術」列入〈方田章〉也就順理成章了。

在〈方田章〉中的『圭田』、『邪田』、『箕田』各題，從劉徽的注看來，他都運用了「出入相補」的方法，將簡單直線多邊形，分割、移動組合成長方形（其中運用了平面圖形經過移動其面積不變的原理）。既然「圓田」亦列入〈方田章〉中，那麼，劉徽對「圓田術」的論證，就如同其他圖形的方法一般「割圓拼方」。但不同於圭田、邪田及箕田之術，『割圓』這種拼法，只能在有限次中獲得近似的結果。若最終成立，則一定要通過無窮的極限過程來實現。

劉徽注「割圓術」：

又按：為圖。以六觚之一面乘一弧半徑，三之，得十二觚之冪。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧之半徑，六之，則得二十四觚之冪。割之彌細，所失彌少。割之又割，

以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。觚面之外，猶有餘徑。以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外矣。以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍。故以半周乘半徑而為圓冪。

這是劉徽對圓面積公式的證明，其中包含了有限過程和無限過程兩部分。有限的分割過程，是基於「出入相補」，不過，在這樣的分割與拼補中圓面積有「所失」，所以，是一個逼近的方法。若要精確，就需無限分割而涉及極限，『割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣！』這對極限思想有透徹的闡發，此外，劉徽對有限分割中的「所失」也做了定量分析，論證當割圓無限細密而達到極限時，「所失」遞減至零。所以，毫無疑問地，劉徽證明圓面積公式的「割圓術」是一種極限方法。

劉徽的「割圓術」是以圖驗術，使得我們可以十分直觀接受他的論證。儘管以現在數學證明所要求嚴謹來看，劉徽的證明是不夠標準，但對於國中生而言，介紹他們認識劉徽的「割圓術」，可以讓他們對圓面積公式更加印象深刻。它不僅是一個公式，而且是一個可以由日常生活的蛋糕、pizza 實際做做看的實驗結果。這種活動也許會有帶來誤差，但是，卻提供給他們「隨時觀察生活，也許其中蘊藏了奇妙數學」的一個例子。

Information

數學科新進教師甄試筆試題目

台師大數學系 洪萬生教授

底下，轉載一份我爲某職校數學科新進教師甄試所設計的筆試題目。這些問題實質上不難，尤其不能與一般參考書題目相提並論，不過，著重數學感 (sense of mathematics) 的復甦與數學知識的統整，卻是唯一的用心與考量。現在，轉載在此，純粹是爲了好玩而已。讀者千萬不要以爲這就是數學的全部了。當然，如果因而體會數學的多重豐富面貌，則或許是意外的收穫了。

一（20%）

(1) 試說明：何以在任一三角形中已知兩邊及其夾角，則此一三角形之面積即已確定。

(2) 有學生在計算三角形面積時，利用了式子 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 a, b, c 分別代表此一三角形的三邊，而且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 。請問除了告知正確的公式之外，如何以直觀的方式糾正她（他）們的謬誤。

二（10%）

試說明 $ax^2+bx+c,\ f(x)=ax^2+bx+c$ 中的 x 有何不同。

三（20%）

試求 x^2+y^2 在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的條件下之最大、最小值，並圖解說明之。

四（20%）

在 $x\geq 0, y\geq 0, 3x+y\leq 3$ 及 $2x+3y\leq 6$ 之條件下，求 $x-y$ 之最大值及最小值。請問何以最大、最小值都出現在凸邊形的頂點上？

五（20%）

試敘述『微積分基本定理』，並從『定積分及其應用』的觀點，來說明此一定理的價值。

六（10%）

前年報紙曾報導有一位加拿大中學生發現圓周率 π 是一個可以除得盡的實數，請問：如果學生相信這則報導，你（妳）將如何回應。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng**