HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新竹高中）
陳鳳珠（中和中學） 謝佳叡（台師大數學系）
林倉億（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第五卷 第一期 目錄(2002年元月)

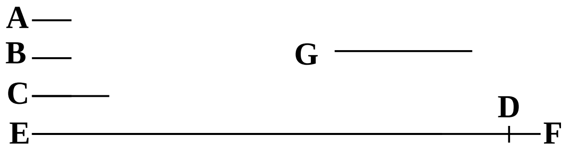
數學文本與問題意識

台師大數學系　洪萬生教授

本學期『數學史』課程結束前，爲了檢驗選修學生是否理解『問題意識』之重要性，特別複印文本一份，請他們提出有意義的數學問題與歷史問題各一個。茲先引述此一文本如下：

Proposition 20: Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.（命題 20：任置若干數根，數根必不盡於此）

Let *A, B, C* be the assigned prime numbers;
I say that there are more
prime numbers than *A, B, C*.



For let the least number
measured by *A, B, C* be
taken,
and let it be *DE*;
let the unit *DF* be added to *DE*.

Then *EF* is either prime or not.

First, let it be prime;
then the prime numbers *A, B, C, EF* have been found which are more than *A, B, C*.

Next, let *EF* not be prime;
therefore it is measured by some prime number. [VII. 31]

Let it be measured by the prime number *G*.

I say that *G* is not the same with any of the numbers *A, B, C*.

For, if possible, let it be so.

Now *A, B, C* measure *DE*;
therefore *G* also will measure *EF*.

But it also measures *EF*.

Therefore *G*, being a number, will measure the remainder,
the unit *DF*:
which is absurd.

Therefore G is not the same with any one of the numbers *A, B, C.*

And by hypothesis it is prime.

Therefore the prime numbers *A, B, C, G* have been found which are more than the assigned multitude of *A, B, C*.

Q. E. D. [Heath 1956, vol. II, p. 412]

此一命題正是歐幾里得《幾何原本》(*The Elements*) 第九冊第二十個定理。眾所周知，本書第七、八、九三冊內容是『數論』(arithmetica)，其中第七冊就包括了鼎鼎大名的『輾轉相除法』(Euclidean algorithms)，為自然數（希臘人稱為 (whole) number）的因數與倍數之關係，提供了討論的起點。不過，上述定理的特殊表達形式，不僅數學家很少察覺，即使數學史家也常常輕忽待之，實在有一點說不過去。

究其原因，數學教科書（不管高中或大學階段）的通用形式固難辭其咎也，這是因為此一定理都被寫成：『存在有無限多個質數』(There are infinitely many prime numbers)，以是，讀者一旦從純粹知識論的角度來研讀《幾何原本》，就很難體會古希臘數學家處處迴避『無限』的無奈與苦心。其實，『無限』即使只當副詞使用，也不曾出現在《幾何原本》之中，譬如平行線之定義，就以下列形式給出：

> Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction. [Heath 1956, vol. I, p. 154]

顯然，“indefinitely” 再怎麼推敲，都不好按 “infinitely” 的意義來翻譯，何況後者的使用，根本經不起伊利亞學派 (Eleatics) 哲學家如 Parmenides 與 Zeno 的挑剔。

另一方面，仔細考察此一『歐式證法』，我們可以發現時髦的『教科書證法』完全脫胎自於此 － 實質上都利用『歸謬法』！不同之處僅在『修辭』而已：後者『假設』結論不能成立，亦即只有有限多個質數，前者則不須作此假設，將指定的質數寫出即可。從數學認知的角度來看，《幾何原本》的命題表達形式，似乎很容易讓我們聯想到上述『歐式證法』，至於『教科書證法』在作結論無法證出的假設時，似乎無法引導我們必然寫下那有限多個質數。因此，貼近文本就此一例子來說，受惠的不僅歷史研究而已，對學習數學知識本身而言，有時也帶來非常深刻的啓發！

最後，謹引錄此一文本的中譯，它出自李善蘭 (1811-1882) 與偉烈亞力 (Alexander Wylie) 合譯的《幾何原本》後九卷，儘管他們根據的英文母本不詳，然而，我們還是可以讀出譯文的忠實程度（請注意：其中『數根』即「質數」也）。


第二十題

任置若干數根，數根必不盡於此。

解曰：任置甲乙丙等若干數根，題言數根必不盡於此。

論曰：試甲乙丙所度之最小數（七卷三十八）為丁戊，加丁己一，則戊己或為數根，或不為數根。設為數根，則甲乙丙數根之外，又有戊己數根。設不為數根，而為數根庚所度（七卷三十三），則庚與甲乙丙各不相等。若云庚與甲乙丙之一數相等，而甲乙丙度丁戊，則庚亦度丁戊，惟庚度戊己，則亦度餘數丁己一，於理不合，故庚與甲乙丙俱不相等，而庚亦為數根，故有甲乙丙庚若干數根，多於甲乙丙若干數根。

幾何九

中國科學技術典籍通彙　數學卷

陳厚耀〈錯綜法義〉研究

朱家生 揚州大學理學院數學系
吳裕賓 揚州大學科技産業處

內容提要：本文主要研究清代數學家陳厚耀的數學論文〈錯綜法義〉中排列組合的問題及其算法，指出這是中國數學家關於排列組合問題的第一次系統討論。

關鍵：陳厚耀，排列組合。

一、前言

排列組合是初等數學中較爲獨特的內容之一，它在機率論、組合數學及級數論等高等數學分支中也有著廣泛的應用。與其他數學分支一樣，排列組合産生發展的歷史也是十分悠久的，在中國最早的文獻記載見於《周易》中關於卦符問題的研究。此後，張遂（或一行）、沈括等人的棋局都數問題，賈憲三角形和宋元算學家的垛積術，清代汪萊等人的遞兼數理研究等，都包含了深刻的排列組合思想和方法。[1]在國外，從印度和阿拉伯的一些古老演算法中，也可以找到關於排列組合問題研究的蛛絲馬迹。[2]從現存的資料來看，中國專門系統地討論排列組合問題的論著出現於清代，當爲陳厚耀的〈錯綜法義〉。

明末清初，由於來華傳教士的工作，西方數學傳入中國，中西數學逐漸合流，其中許多內容都與排列組合的計算有關。爲此，陳厚耀撰寫了〈錯綜法義〉一文，系統討論排列組合的各種類型及其計算方法。本文就此作一些探討。

二、陳厚耀和他的數學著作

陳厚耀（1648-1722），字泗源，號曙峰，清初江蘇泰州人，曾經追隨梅文鼎學習過天文算法。他是康熙丙戌年進士，因通曉天文曆法，被大學士李光地推薦給康熙皇帝，康熙當面試以算法，其在天文數學方面的才能給康熙留下了深刻的印象。戊子年受命來京，己丑五月，隨康熙皇帝去熱河，途中，康熙與陳厚耀一起探討了許多曆算問題。後陳厚耀因母親年事已高，身邊無人侍奉，便要求回蘇州任教職，得到恩准。但不到一年，又被康熙召入南書房，研究天文算法問題，並入淵鑒齋供職。在這裏，陳厚耀見到了許多在民間難以見得的宮中收藏的科學書籍和儀器，他的曆算之學也因此而有了較大的進步。在與康熙的接觸過程中，陳厚耀上表康熙請求編定步算諸書，以惠天下，此事得到了康熙的首肯。在康熙的支持下，清朝政府開始組織編撰大型類書《律曆淵源》。由於李光地等人的推薦，陳厚耀與梅蓀成等人一起被召入蒙養齋修書。康熙還賜以《算法原本》、《算法纂要》、《同文算指》、《嘉量算經》、與《幾何原本》等書。癸巳年書修成，被授予翰林院編修。

陳厚耀一生所著天文數學著作甚多，但大多都已失傳，手稿本《算義探奧》爲其流傳不多的著作之一，現藏中國科學院自然科學史研究所，爲海內孤本。該書分勾股法義、積求勾股法義、勾股容方容圓法義、三角形求中長法義、測量法義、割圓法義、圓求弧背法義、圓容法義、錯綜法義、推古曆法、推授時曆法、推授時曆百年消長法等章，大多是敍述幾何學的內容。其中〈錯綜法義〉討論排列組合問題。

三、〈錯綜法義〉中的排列組合問題及研究

陳厚耀〈錯綜法義〉卷首稱：「九章諸法皆備矣，而少各色錯綜之法。易曰：『參五以變，錯綜其數。』錯綜者，天地自然之數也。夫奇偶相錯而成卦，干支相錯而成曆，五色相錯而成錦，五音相錯而成調，推而衍之，盈萬累億，無非因錯而後有不窮之妙。其爲義也至精，其爲數也至繁。」這裏，陳厚耀首先強調：排列組合問題雖然來於日常生活和生產實際，但其算理深奧，計算結果也十分複雜。接著，他又指出排列組合具有許多種不同的形式：

而其變也亦不可一例而論。故有上下顛倒相錯而複重疊者（如六十四卦之類），有上下顛倒相錯而無重疊者（如串名類），有上與下各錯，而無顛倒，亦無重疊者（如六十甲子之類），有不分上下，既無顛倒，而雜糅之中，但有重疊者（如六骰之類），有以全數之中，摘取二三數以爲錯，而互增互換以錯之至盡者（如紙牌之類），其義既不一，則其立算也因亦因義而別，然即二字相錯以至十字，則其數已逾萬，況推而百千字乎？其法隱于九章之中，而未暢闕旨，今略具數端，以俟深思者觸類而旁通之。[3]

陳厚耀這篇論文的主要部分，是通過具體的例題，來說明各種類型的排列組合問題的計算方法。下文分成四小節介紹。

1、可重排列

陳厚耀首先討論了六十四卦的計算。〈錯綜法義〉提出問題：

今如奇劃爲陽，偶劃爲陰，一奇一偶，重至六劃，得卦幾何？

這是從相異的n個元素中（允許重復）選取r個元素排列的問題。其給出的解法是：

一奇一偶，數之二也。以二因二，得二劃之卦四；再以二因之，得三劃之卦八；……再以二因之，得六劃之卦六十四也。如重至七劃以上，亦再以二累因之即得。

亦即$2^6=64$。這裏，顯然相當於給出計算公式：$\Pi_n^r=n^r$。至於其另一方法：

或以三劃之卦八自乘，即得六劃之卦六十四。所謂得數自乘，即省一倍乘也。

顯然是爲了算法上的簡捷而給出的。

該書的第二個例子是：

又如乾兌離震巽坎艮坤，八卦也，因而重之，當得卦若干。再重之，又當得卦若干。

這顯然也是一個可重排列問題。陳厚耀給出的解法分別相當於$8^2=64$和$8^3=512$。關於這類問題的解法，陳厚耀解釋說：「卦本無三字，今欲窮其所重之數，故屢加以推之。若每次加一字，亦以八累乘之即得。」

2、無重排列

〈錯綜法義〉例舉『串名』問題來論述無重排列問題：

今如合夥當差，有張李王三家串姓爲名，當排出串名若干？

這是一個從相異的n個元素中（不允許重復）選取n個元素的全排列問題。他給出的解法如下：

以三姓減萬億毫二，二三相乘，…又減二爲一乘之，如故。

亦即$3\times2\times1=6$。推至一般情況，則有 $P_n^n=n!$。他還將本題無重排列問題的算法與前面的可重排列作了比較：『前易卦上下顛倒而又有重疊者，故即以本身八遞次乘之；此是有顛倒而無重疊者，故用遞減相乘法。』

『又如趙錢孫李周吳鄭王八姓，串名當差，其串名只三字，當排出串名若干？』在是一個從相異的n個元素中（不允許重復）選取r個元素的選排列問題。其給出的解法是：

八姓減一爲七，以乘八姓，得五十六，爲二姓相錯之數。又以七姓減一爲六，以乘五十六，得三百三十六，爲三姓相錯之數也。

亦即 $8\times7\times6=336$，推至一般情形，則其計算公式相當於

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(r\le n).$$

陳厚耀還給出解釋：

此亦如八卦再重之例，但卦有重疊者，故即以八累乘之即得。此以三字爲名，名必三姓，無重疊者，故即八減爲七乘之，七八五十六，較之八八六十四，則二字姓串名，當除去疊名八，又減一爲六，以乘五十六，的三百三十六，較之八卦再重五百一十二，則三字姓串名，當除去疊名一百七十六也。

此一推導過程，與現代中學數學課本中的方法基本相似。

上述兩個問題可以看作是引出一般公式。接著，他又舉了一些例題，進一步說明這類問題的解法。例如：

今如中庸天命章，只二十二句，當截出長短題目共若干？

他的解法如下：

以二十二句，加一句爲二十三。卻以二十一乘之，得五百零六。折半得二百五十三，此即堆垛法。

至於所依據理由，則是：

一句一題，是二十二也。二句一題，則二十一矣。其次每加一句，則少一題，至全章則止一題，故以堆垛法求之。

實際上，他也是將該此一問題看作是無重排列來處理。

3、可重組合

〈錯綜法義〉利用『骰子問題』論述可重組合的演算法：

今如六個，每個六面六色，當擲色樣共若干？

這顯然是一個從相異的 n 個元素中（允許重復，且同一元素可反復出現），選取 r 個元素的組合問題。他給出的解法如下：

列置一二三四五六色爲六行。自右而左，先以一行一，加二行二爲三；即以二行三，加三行三爲六；又以三行六，加四行四爲十；又以四行十，加五行五爲十五；加六行六爲二十一，是即二子相錯之數。再以一行一，加二行三爲四；二行四，加三行六爲十；三行十，加四行十爲二十；四行二十，加五行十五爲三十五；五行三十五，加六行二十一爲五十六，是即三子相錯之數。再以一行一，加二行四爲五；二行五，加三行十爲十五；三行十五，加四行二十爲三十五；四行三十五，加五行三十五爲七十；五行七十，加六行五十六爲一百二十六，是即四子相錯之數。再以一行一，加二行五爲六；二行六，加三行十五爲二十一；三行二十一，加四行三十五爲五十六；四行五十六，加五行七十爲一百二十六；五行一百二十六，加六行一百二十六爲二百五十二，是即五子相錯之數。再以一行一，加二行六爲七；二行七，加三行二十一爲二十八；三行二十八，加四行五十六爲八十四；四行八十四，加五行一百二十六爲二百一十；五行二百一十，加六行二百五十二爲四百六十二，是即六子相錯之數也。

並進一步推廣：『如再加一子，亦再如此式加之既得。』關於這一算法，陳厚耀解釋說：

此乃有重疊而去其顛倒者（重疊如麼麼二二之類，顛倒如麼二二麼之類，骰子不論顛倒，

故去其同），故用法與前易卦串名法不同，不用乘除，但照行加之，視第六行末所加之數即是。

這相當於利用公式$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=C_{n}^{r}$，推導出其計算公式：$H_{n}^{r}=C_{n+r-1}^{r}$。此外，陳厚耀還利用分類的思想，討論了這一問題的解法：六色各不相同（1）、一對（30）、兩對（90）、三對（20）、分象（15）、三子一色（60）、三子一色合一對（120）、四子一色（60）、四子一色合一對（30）、五子一色（30）、六子一色（6）。這一分類既無遺漏，亦無重復。顯然，其算理與現代數學課本中的解釋基本相同。

4、無重組合

〈錯綜法義〉提出問題：

今如紙牌三十張，張各一形，每副只取九張，當錯出副若干？

這是一個從相異的n個元素中（不允許重復），選取r個元素的組合問題。他給出的解法如下：

以牌三十張爲實，另以三十減一，爲二十九，乘之；又減一，以二十八乘之；又減一，以二十七乘之；又減一，以二十六乘之；又減一，以二十五乘之；又減一，以二十四乘之；又減一，以二十三乘之；又減一，以二十二乘之，其共乘得五萬一千九百一十七億七千八百五十九萬二千爲實。卻以每副九張，亦用遞減，以八乘之，又以七乘之，又以六乘之，又以五乘之，又以四乘之，又以三乘之，又以二乘之，其一如故不乘，共乘得三十六萬二千八百八十爲法。以除前實，得一千四百三十萬零七千一百五十副。

這相當於給出了公式：

$$C_{n}^{r}=\frac{P_{n}^{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}.$$

陳厚耀解釋說：

此亦如前八姓串名之例，但串名中雖無重疊而有顛倒者。此則副各九張，張各一色，既無重疊，又無顛倒者，故其用法又異。其先以三十張遞減相乘，得五萬一千九百一十七億七千八百五十九萬二千之數，即前串名法也。名有上下顛倒，而牌無上下顛倒。故又去其顛倒之同者，乃以九張遞減相乘爲法以除之，則得實數矣。

顯然，他已經注意到了紙牌與串名法的差別。

此外，陳厚耀還研究了一些形式上不屬於排列組合、但實際上可用排列組合的思想方法處理的問題：

今如天干十，地支十二，遞次相配，當得甲子若干？

他給出的解法如下：

以天干十、地支十二相乘得一百二十。卻以十與十二用約分法對減之，各得二，以除一百二十，得六十。或先以約分法約得二，以除天干十，得五，以五乘地支十二，亦得六十。

他還解釋說：

凡以奇數乘偶數，必互乘乃遍。以偶數乘偶數，則不能遍。故用約分法以約之，約得數以除之，乃得正數也。然亦有以奇乘偶而不能遍者，如三之乘六，五之乘十，…亦有以奇乘奇而不能遍者，如三之乘九，七之乘二十一，…又必用約分以約之，乃乘得正數。

又如甲子紀年六十，每年月建十二，紀日亦六十，每日生時亦十二，推得生人八字若干？

他給出的解法則如下：

以年之六十，乘月之十二，得七百二十。又以日時相乘得七百二十乘之，得五十一萬八千四百。

關於『紀日亦六十』，他進一步指出：

每月只三十日，而亦周曆六十甲子者，以月有大小之故也。

至於本題未用『約分法』處理，陳厚耀則解釋說：『此以偶數乘偶數而不用約分法者，以月建生時，已約得十二也。』

四、結語

由本文論述可知，陳厚耀儘管在清初就已經對排列組合問題進行有系統的探討，可惜，後繼乏人，〈錯綜法義〉流傳不廣，或許是主要原因之一吧。直到近代中國數學教育與世界合流以後，這一題材的系統討論，才被寫進了數學教科書而被人們所瞭解。

註解：

1. 劉鈍 (1993).《大哉言數》，遼寧教育出版社。
2. M. 克萊因 (1985).《古今數學思想》第一冊，上海科學技術出版社。
3. 陳厚耀 (手稿本，年代不詳).〈錯綜法義〉,《算法探奧》，現藏中國科學院自然科學史研究所。後面引未注明者皆同此條。

＜歡樂 123－奇幻園地＞影帶 HPM 教學

麗山高中　彭君智老師

一、資料來源

ＶＣＤ版：＜歡樂 123－奇幻園地＞（Donald in Mathmagic Land）卡通類、普遍級，片長 30 分鐘，台北市影久有限公司製作發行，核准字號：強廣四字第 19246 號，許可證號：強廣字第 12636 號。

錄影帶版：＜唐老鴨奇幻數學園地＞（Donald in Mathmagic Land）卡通類、普遍級，片長 30 分鐘，高雄市騰飛碟影有限公司製作發行，許可證號：強廣字第 10162 號。

二、包裝簡介（稍加修飾）

＜Donald in Mathmagic Land＞是狄斯耐出品唯一一部以數學為主題的卡通動畫影片，片中將數學的根據及其應用均非常詳盡的用唐老鴨卡通來表現無疑，小朋友千萬別錯過和唐老鴨一起來體會算術的快樂魔術：活潑而好奇心旺盛的唐老鴨，一天打獵因迷路而誤闖進「算術魔術樂園」，那個地方有用數字形成的樹和花，ＯＯＸＸ的井字遊戲及會計算圓週率π的鳥，還有很多色彩的數字，成了河流而流著，受到「數學精靈」的帶路，唐老鴨遇到古希臘的數學家畢達哥拉斯和他的朋友，數學精靈透過音樂、藝術與自然界生物的型態揭露她們手掌上所描寫的星形理論的秘密，另藉由運動、西洋棋及撞球算出快樂的遊戲，將數學說明得很容易瞭解，那麼唐老鴨下一個要打開的門扉是怎麼樣的地方呢？

請參看英文原來的『包裝』:

Presenting Walt Disney Mini-Classics…a timeless series of classic tales told through captivating music and brilliant Disney animation. Viewer of all ages will treasure this magical collection of Disney animated storytelling at its very best. In this highly acclaimed, award-winning film, a curious Donald Duck ventures into a mystical world. *Mathmagic Land* is his destination-a wondrous land of discovery where trees have square roots and rivers are brimming with numbers！ During his journey, Donald discovers that you can have mirth with math, fun with fractions, and laughs with logic in this fascinating milestone in Disney’s animation legacy.

三、適用年齡

對於「早已不知數學為何物」或是「永遠將數學停留在惡夢階段」的社會大眾而言，本片可說是老少咸宜，真的是一趟童叟無欺的奇妙數學之旅。雖說這些「社會大眾」在欣賞歡樂之餘，對於數學依舊是停留在「不敢恭維」的階段，剩下的除了「驚奇」還是「驚奇」，不過這樣的數學入門卻是一個極好的開始：透過唐老鴨卡通所呈現出奇不意的數學內容的「另類風貌」，給人「原來數學也可以這樣！」煥然一新之感，那種感覺也許一時之間說不上來，卻已能冰釋「外行人」跨越「數學殿堂」畫地自限的那一道門檻，化解與數學的敵我意識，相信是增進數學好感與數學教學的一帖良藥。對於社區大學中數學通識課程的定位而言，是作為「無數學背景」的學生極佳的入門強心劑，慢慢的在joy & fun中，將數學的專業與品味潛移默化的變成一種enjoy & funny的習慣與水平。

四、教學參考建議

片中可深入探討的數學面向有三，分別是「撞球遊戲」、「黃金分割、黃金比例與黃金曲線」、「圓錐曲線」。若是中學數學教師欲用之以爲課程的輔助教學，建議以國三學過「相似形」或是高二學過「圓錐曲線」爲分野。

1.先教後看再探討：以五角星形爲例，教師可在欣賞影片之前，導引正五邊形的對角線與邊長所形成的黃金比例（$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339$）與黃金分割的計算（利用相似形與公式解一元二次方程式），如此片中比重較大，且不斷呈現的「自然與藝術」中和費氏數列（Fibonacci Series）相關的事物，如鸚鵡螺、毬果、向日葵、植物枝芽的生長、人體比例、畫作、建築…等，都將會是學生目不轉睛的焦點所在。全片「賞玩」之後，可就黃金曲線與費氏數列（Fibonacci Series）集其他相關數學深究之。

2.全片看完再探討：此一回顧式教學，可將全片的數學內容巨細靡遺的反芻消化。適用於較高層次的學生，建議在觀看之前先將學生分組並交代任務（回家功課），待全員做好課前準備，再將影片分段播放，由學生就其所觀所察討論、分享之，應是一趟不錯的影片數學發現之旅。與此同時，教師當然也得以身作則做功課：片中的數學如何適時分段？其深入淺出的數學知識是否清楚？凡此種種最後若能將上 HPM 不同面向的人文思維與關懷，學生對於數學的震撼相信定能「繞樑三日」。

【註】教師應添購準備充足的教具（光碟片），每組配發一片供學生在做 Home Work 時可以反覆地觀看、討論、探究與查資料，而不依賴有限的數學記憶。

五、HPM 教學

以下提供幾個關於 HPM 教學可探討深入的「點」，可再加深、加廣、延拓之，以開啓另一扇窗。

1.畢氏學派：「萬物皆爲數」、「畢氏三角數」、「Plato 哲學觀」、「音樂與數學」…等可以談的很多，也可視情況拓展至立體畢氏定理、費瑪最後定理、Aristotle 哲學觀…等。

2.Appolonus & Conics.（作圖、科學應用、代數解釋與幾何解釋，或是提及 Euclid 有限次的尺規作圖 vs. Appolonus 無限次的圓錐曲線作圖）

3.Fibonacci Series & Golden Section、Golden Ratio & Golden Curve. （作圖、自然現象、幾何觀與代數觀）

4.文藝復興時期藝術家們追尋的理論依據（科學之美）。

5.雪花與碎形。（立體碎形、有限中的無限與無限中的有限）

6.關於無限「∞」（數系中「部份 vs.全部」、Zeno 悖論中的有限與無限）。

六、教學回顧

實際任教以來（四年），對於所教之班級（一、二年級）都會利用機會（段考後）讓學生觀賞、輕鬆一下，通常學生看完之後，只對片中的撞球打法嘖嘖稱奇，其餘所知不多，而當時的 Ponpon 尚未受過 HPM 的專業訓練，以致未充分利用機會導引，只是一相情願，輕乎玩乎的想「拉攏學生」、「博取對於數學的興趣與好感」，或許真有學生因此而對數學展露那麼「曇花一現」的感覺，由於老師得浪費與不懂得因勢利導，那些「不會凋謝的曇花」不久

便又消失、淹沒在現實大環境的洪流之中。偶爾「換手」或是畢業的學生回來看到 Ponpon 桌架上的錄影帶，總不忘淘侃一下：老師，還在用那「騙小孩的東東」！雖說開玩笑的成分居多，卻也多多少少隱含「遊藝」與「分數」拉鋸戰的現實與無奈。

也許說得太嚴肅（別忘了Disney以家喻戶曉的唐老鴨卡通來呈現數學的用意），接下來談點輕鬆的意外收穫：30 分鐘的影帶欣賞，可以從中看出不同的班風：有的班級全班笑得很開懷、很自然，幾乎是從頭笑到尾；有的則笑得很靦腆、很尷尬，偶爾有同學笑得忘了規矩時（忘我時），才會換來更大的歡樂與笑聲；有的班級這裡會笑得很過癮，那裡一點感覺也沒有（說實在的，有時我也不清楚學生在笑什麼，只是為此疑問覺得好笑），有的班級則是恰恰相反。另由於錄影帶版的＜唐老鴨奇幻數學園地＞之後接的是Disney米老鼠系列的卡通，因此在片頭簡介及 30 分鐘的影片欣賞之後，Ponpon通常很識趣的讓學生回味童年（離下課已不遠）。當下課鐘響時，這些心靈已近「童心緣」的學生，也呈現出多種面貌：有的急著背書包傘閃人；有的則非得把該片段卡通看完不可，離開時還有點依依不捨。綜合上述種種不同之現象，也許哪天值得來個「數學童心測驗」之研究（視聽教室除了螢幕之外，其餘全黑）。

七、歡樂 123－奇幻園地觀後感

大四時屠耀華老師的數學教材教法課即與此片有過第一次接觸，實習後有機會在公館玫瑰唱片行、地攤買到此錄影帶（撿到寶，一卷 89 元，2000 年底在愛買與VCD版邂逅，直搗黃龍找到九耀代理廠商，一片 30 元撿到「飽」)，用之於數學課外教學不下 10 次，為了HPM 這篇報告，還是頭一遭動筆寫「論述」，也許正如老師所言：看過想過水無痕，只有寫下來才是你的。學術專業的源頭在此。為了「湊 3000 字」，第一次細讀其英文導覽，用「譯點通」偷懶，其全文翻譯如下：

> **班級(課)故事的一個永恆連續由於使音樂和輝煌的狄斯耐生氣著迷講述了現下(目前) Walt 狄斯耐迷你班級(課)…。 所有年紀(時期)中的觀眾在將珍藏狄斯耐鼓舞的 講故事的這個不可思議收集珍藏得它的很最好。**
>
> **在它中好奇(古怪) 唐納德 為鴨子高度歡呼了，獎賞勝　的電影，到 神祕的 世界裡冒險。 - 發現(揭露)的 令人驚奇的 土地(國家)在樹有廣場(方形)根源那裡， Mathmagic 土地(國家)是他的終點並且在他的旅行期間隔空白道用數字(目)！(是)邊緣， 唐納德發現你(們)能夠用 數學 ，有碎片的玩笑，有 歡笑 和在狄斯耐的生氣遺產中笑此時有邏輯在這個迷人里程碑中。**

將「狗屁不通」的譯文放在此處，除了「湊字數」，其實想表達的就是「貼近古文本」的用意，也是我們不常閱讀外文的心聲：分開來每個字都懂，合起來誰是誰都不清楚自己在講些什麼。何時能達享受的境地時，即齒頰留香，樂在其中矣！

最後對於片中的卡通描述，略提幾個個人觀感：

1.「Math-magic」一詞取得好、取得妙，以 Magic 的手法呈現 Math，連字又有原 Mathematics 的諧音，Ponpon 給一中文名「魔數」，似有異曲同工之妙，只是前者打" Mathematics "的招牌，後者打「魔術」的招牌。

2.一開始與唐老鴨玩井字遊戲的「鳥」是由鉛筆、三角板與圓規構成，其尺規作圖的傳達意味深遠。

3.樹上那隻會報圓週率 π 的「鳥」，從錄影帶版即報錯（曾細聽英文發音，好像也錯），當初

即生一念頭：毛遂自薦寫信給Disney總公司，告知這不可犯的「專業的錯誤」。無奈沒有行動力，遲遲未動筆，怎知道了VCD版還是報錯（只是精確的小數點位數多了些），究竟何謂專業？果然有時「跨行如隔山」，一切並非想像中簡單，君不見五個「數學白痴」大張其鼓的報導加拿大某學童算出π是有理樹？。

4.末段透過圓形與正三角形的巧妙轉化，確實生動的引入一些數學思維，如圓錐曲線可從圓錐截取而得，然其他異想天開之舉，雖不是重點，但是硬ㄠ，還不如刪除。

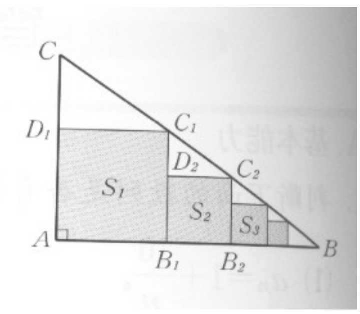
5.壓軸那句伽利略的話語「上帝用數學的語言創造萬事萬物」與數學精靈和唐老鴨的對話「開啓那些神秘之門的鑰匙就是」「數學」相呼應，本有畫龍點睛之功效，今日觀之，若對伽利略之生平有所了解的話，HPM的味道便不在話下！

下次有機會不妨輕鬆一下！（可別笑得太「ㄐㄧㄢ　ㄐㄧㄝˋ」哦！）

從一個問題說起：無窮

西松高中　蘇惠玉老師

在現行高中數學教材中，高一課本有一章內容爲數列與級數。其中級數單元的教學目標之一，即是無窮等比級數的求和問題。在南一版本的教科書中，編者提到季諾 (Zeno of Elea, 490BC~430 BC) 的「阿基里斯悖論」(Achilles paradox)，[1]與阿基米德 (Archimedes of Syracuse, 287? BC ~ 212 BC) 求拋物線弓形面積，似乎是一個合適的引起學習興趣的切入點。但是，如果我們能夠還原歷史真相，盡量貼近這些古代學者的歷史脈絡，將會發現另一種數學學習的樂趣。同時，或許還能幫助我們多少瞭解學生在學習無窮概念時，所隱含的認知障礙。



在無窮等比級數求和這個單元中，一定會有一些幾何圖形的等比變化，然後再求面積或周長的問題。例如，圖一就是一個例子。在這裡我們所提供的問題，爲了配合高一的程度，都是直線形如三角形或矩形的問題。然而，引入阿基米德求拋物線弓形面積這一個歷史問題時，教師卻可以將西方數學發展長久以來對「無窮」的恐懼，以及因而導致表達形式的特殊考慮，作一個很好的示範與說明。事實上，我認爲這是數學與社會文化脈絡相結合的

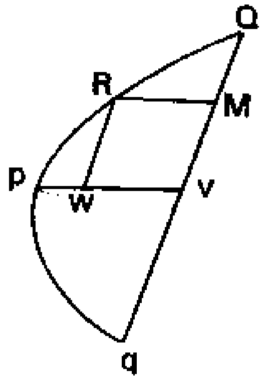
一個很好的例子。

阿基米德的拋物線弓形面積

在阿基米德的《求拋物線弓形的面積》中，他利用了兩種方法來證明：「拋物線弓形的面積是同底同頂點的三角形面積的 4/3」，分別是力學的方法、無窮級數求和的方法。有關無窮級數的幾何證明方法，他從以下的幾個命題開始（其中題數悉照原書）：

命題 18

設Qq為一拋物線弓形的底，V是Qq的中點，過V點的直徑交曲線於P，則P為弓形的頂點。[2]



命題 19

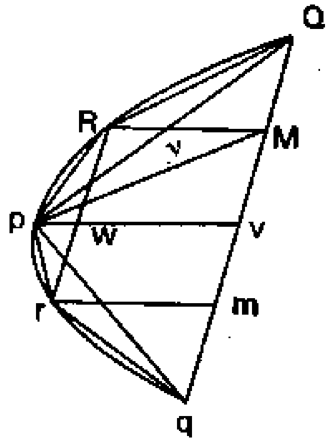
如果 Qq 是被直徑 PV 平分於 V 的拋物線的弦，直徑 RM 於 M 點平分 QV，RW 是從 R 到 PV 的縱標，則 $PV=\frac{4}{3}RM$ 。

命題 20

設拋物線弓形的底為 Qq，頂點為 P，則三角形 PQq 大於弓形 PQq 之半。

命題 21

如過任一拋物線弓形的底為 Qq，頂點為 P，R 是由 PQ 所截得的弓形的頂點，則 $\triangle PQq=8\triangle PRQ$ 。



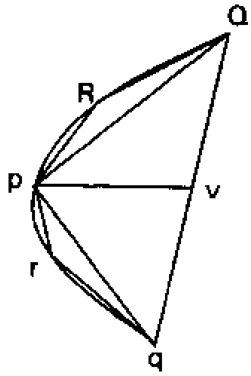
證明：

過 R 點的直徑平分弦 PQ，因此也平分 QV，其中 PV 是平分 Qq 的直徑。設過 R 點的直徑平分 PQ，QV 於 Y、M，連接 PM。

由命題 19， $PV=\frac{4}{3}RM$ ，

又 PV＝2YM，因此 YM＝2RY，及 ΔPQM＝2ΔPRQ。從而，ΔPQV＝4ΔPRQ，及 ΔPQq＝8ΔPRQ。

如果延長從 R 到 PV 的縱標 RW 與曲線交於 r，也有 RW＝rW，同理可證得，ΔPQq＝8ΔPrq。



命題 22

如果 A、B、C、D…是一系列面積，其中前一向是後一項的 4 倍，又最大面積 A 等於內接於拋物線弓形的三角形 PQq，且三角形 PQq 與弓形同底等高，則

（A＋B＋C＋D＋…）<（弓形 PQq 的面積）

命題 23

已知一系列面積A, B, C, D,…Z，其中A是最大面積，且前一項等於後一項的 4 倍，則A＋B＋C＋…＋Z＋$\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A$。[3]

證明：

作面積 b, c, d,…使得 b=(1/3)B, c=(1/3)C, d=(1/3)D 等等，那麼，由於 b=(1/3)B，及

B=(1/4)A，則有 B+b=(1/3)A。

類似可得 C+c=(1/3)B，…Z+z=(1/3)Y，所以

B+C+D+…+Z+b+c+d+…+z=(1/3)(A+B+C+…+Y)。

但，b+c+d+…+y=(1/3)(B+C+D+…+Y)，

因此，上兩式相減得 B+C+D+…+Z+z=(1/3)A，即 A+B+C+…+Z+(1/3)Z=(4/3)A。

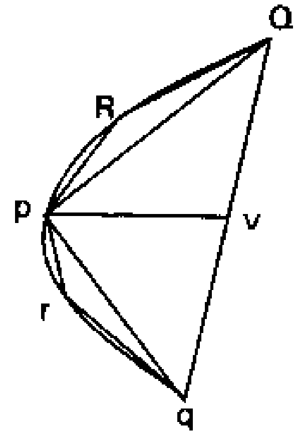
命題 24

由拋物線與弦 Qq 所圍成的弓形面積，等於同底等高三角形面積的$\frac{4}{3}$。

證明：

令$K=\frac{4}{3}\Delta PQq$，其中 P 爲弓形的頂點，現要證明弓形面積等於 K。

如果二者不等，則弓形面積要嘛大於 K，要嘛小於 K。



I. 假設弓形面積大於 K。

在由 PQ，Pq 截得的弓形內，分別作與該弓形同底等高的內接三角形，及兩內接三角形與兩弓形有相同的頂點 R、r，在餘下的弓形內按同樣的方式作內接三角形，如此作下去，直到剩下的弓形面積之和小於弓形 PQq 與 K 之差。由此可知，如此形成的多邊形一定大於面積 K，這是不可能的，因爲

$A+B+C+...+Z<\frac{4}{3}A$，其中 A＝ΔPQq，因而弓形面積不大於 K。

II.假設弓形面積小於 K。

若令ΔPQq＝A，B=(1/4)A, C=(1/4)B，如此下去，直到得到面積 X，使得 X 小於 K 與弓形面積之差，則有

$$A+B+C+...+X+\frac{1}{3}X=\frac{4}{3}A=K$$

現在，由於 K 與 A+B+C+…+X 之差小於 X，又與弓形面積之差大於 X，所以 A+B+C+…+X>(弓形面積)，這是不可能的。

因此弓形面積不小於 K。

因爲弓形面積既不大於 K 又不小於 K，所以

（弓形 PQq 的面積）＝K＝$\frac{4}{3}\Delta PQq$。

命題 24 中，阿基米德的證明方法稱爲窮竭（或窮盡）法，即 “The Method of Exhaustion”。所謂的窮竭法證明方式，包含了兩個部分，一個是操作的窮竭，如在曲線圖形內，以同樣的方法，作出許多個內接或外切多邊形，如命題 24 證明中的內接三角形；另一個部分，即是兩次歸謬證法（*reductio ad absurdum*）的應用。[4]在歐基理德的《幾何原本》(*The Elements*) 第 12 冊的第二個命題，即是利用窮竭法證明：「兩個圓的比如同它們的直徑平方比」(Circles are to one another as the squares on the diameters)。[5]阿基米德在他的另一本著作《圓的度量》中，亦用了窮竭法證明圓面積公式：「任何一個圓面積等於一個直角三角形，它的夾直角的一邊等於圓的半徑，而另一邊等於圓的周長」。

然則訴諸兩次歸謬法（大於、小於一個定值）的意義何在？如果以現代的數學觀點而言，已知面積和是一公比為$\frac{1}{4}$的等比級數，那麼，即使是無窮等比級數，依然可以用極限的方法，將『總和』很輕易的求出。為了這個『總和』為什麼阿基米德要花那麼多的心思，從命題 18 到命題 24 才能得到呢？這是因為古希臘的數學家們一直佇立在深不可測的無窮概念之前，從不冒險跨越一步。他們的這種懼怕，來自於無窮的概念所引起的許多爭論。而一開始的引子，卻必須追溯到古希臘時期對「變化」問題的歧異性看法。

季諾的悖論

西元前五世紀早期，古希臘的哲學家在觀察大自然的循環與變化時，想要從古代神話之外的觀點來了解、解釋週遭的變化。他們最感興趣的問題即是：感官知覺是否可靠？還是只能依賴理性？外在世界的變化是否會造成誤導？首先提出這些問題的哲學家，即是 Heraclitus 與 Parmenides。Heraclitus 認為世界是持續變化的，萬世萬物都可能是變化的主角，他最著名的話即是：我們不可能經過同一條河流兩次。而 Parmenides 則認為變化是不可能的，世界上沒有真正的變化。他堅持只有理性才是可信任的，感官知覺並不可靠，又容易造成誤導。同時，他也認為，萬事萬物不可能來自於虛無，必須要有某一種物質 (the One) 的存在。到了西元前五世紀後期，哲學家們分成兩派，一派擁護 Parmenides 的觀點，另一派即持反對的態度。支持者中最重要的，當然是 Parmenides 的學生，依利亞的季諾（Zeno of Elea）。

從Heraclitus與Parmenides的對話中，引伸出來的問題便是：萬物的組成元素是什麼？Anaxagoras of Clazomenae認為大自然是由無數肉眼看不見的微小粒子組成，所有的事物都可以分割成更小的部分。而原子論的開山始祖Democritus認為每一種事物皆由微小的、不可能再分割的基本單位構成。[6]季諾為了替Parmenides的 ”the One” 辯護，聲稱變化、運動的不可能。他的四個悖論，即是針對這兩派的觀點所提出的辯解。前二個悖論針對事物可以無限分割 (*ad infinitum*) 這一點，後二個悖論，則針對事物有最小的不可分割的單位。這四個悖論結果，都成了運動是不可能的『證明』。

目前，我們只能從亞里斯多德的著作得知季諾四個悖論的部分內容。第一個悖論稱為『二分悖論』（Dichotomy）：

> There is no motion because that which is moved must arrive at the middle (of its course) before it arrives at the end.
>
> （運動是不可能的。因為必須再到達另一邊的端點時，必須先經過路徑的中點。）

第二個悖論稱為『阿基里斯悖論』(Achilles)：

> This asserts that the slower when running will never be overtaken by the quicker; for that which is pursuing must first reach the point from which that which is fleeing started, so that the slower must necessarily always be some distance ahead.
>
> （較慢者絕不會被較快者追趕過去。因為追趕者必須經過在前頭跑者經過每一點。所以較慢者一定在較快者的某一段距離之前。）

第三個悖論為『箭矢悖論』(Arrow)：

> If everything is either at rest or moving when it occupies a space equal (to itself), while the object moved is always in the instant (in the now), the moving arrow is unmoved.
>
> （如果每一個物體當它佔據與自己相同空間時，不是靜止不動就是在運動中，[7]然而，

在一瞬間物體已經運動完成，所以飛矢不動。）

第四個悖論為『運動場悖論』(Stadium)：

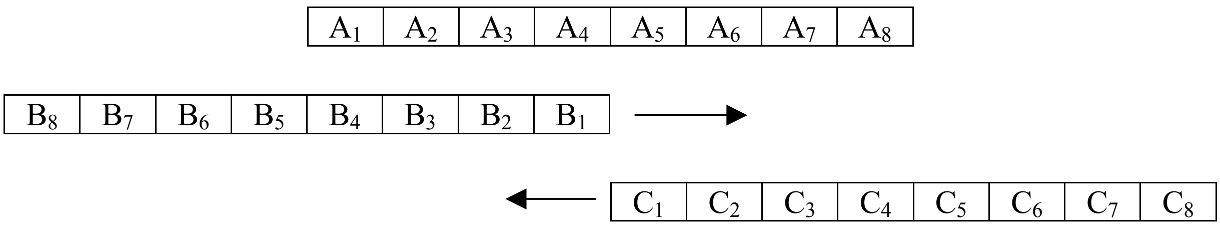
The fourth is the argument concerning the two rows of bodies each composed of an equal number of bodies of equal size, which pass one another on a race-course as they proceed with equal velocity in opposite directions, one row starting from the end of the course and the other from the middle. This involves the conclusion that half a given time is equal to its double.

（第四個悖論關於兩列由相同大小相同數目的物體所組成的運動體，以相同的速度，相反的方向經過彼此。一列從路徑的端點，一列從中點出發。結果是時間與它的一半相等。）

就希臘數學史家 Thomas L. Heath 對這四個悖論的觀察，他認為它們剛好形成一個非常有趣且有系統的對稱性。第一個和第四個是關於有限空間的運動，而第二和第三個之運動長度是不定的。第一個和第三個的運動個體只有一個，第二和第四則比較兩個物體的運動，說明了相對運動與絕對運動同樣的不可能。第一個和第二個悖論以空間的連續性，而不管時間是否連續來說明運動的不可能；第三個和第四個則以時間來說明。

亞里斯多德認為前二個悖論的謬誤，在於季諾沒有體認到時間與空間一樣是可以無窮分割的。但是，Heath 卻認為季諾其實了解時間與空間同樣可以是無窮分割的。這兩個悖論其實很容易用無窮級數求和以及極限的觀念來反駁，例如，第一個悖論中，用$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=1$即可證明這個悖論的錯誤；在『阿基里斯悖論』中，只要假設雙方速度，就很容易說明，甚至計算阿基里斯何時超越烏龜。儘管如此，Heath 認為這兩個悖論的重點不在於「何時」，而在於「如何」。在『二分悖論』的無窮分割假設中，絕對沒有辦法達到所謂的「極限」；而在『阿基里斯悖論』中，雖然相隔的距離逐漸縮短，卻也絕對不會消失。換言之，「如何」達到這一點，才是這兩個悖論的重點所在。這樣無窮的概念，一直要到 Georg Cantor 的集合論出現後，才完整的、無畏懼地被數學家們接受。

針對第三個悖論，亞里斯多德認為：只要不接受這個悖論的假設，即時間有最小的不可分割的單位（瞬間）即可。而在評論第四個運動場悖論時，亞里斯多德則認為：季諾沒有意識到相對運動的不同，才會有「一個瞬間和它的一半相同」這樣的結論。他的解釋如下：有三列相同數目相同大小的物體，排列如下，



一列靜止，另兩列在中間的地方以相同的速度，朝相反的方向前進，到三列並排為止，如下圖。

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1
C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8

就B_1而言，從A_5到A_8，所以，這個運動時刻，經過四塊區域；但是就C_1而言，從B_1到B_8，所以，在這個運動時刻經過八塊區域。但是，由於每一塊相同大小，相同速度，又是在相同時刻，所以，就C_1而言，經過八塊區域的這個瞬間，等於C_1經過四塊區域的瞬間。

Heath 認爲這樣的解釋並不容易取信於人，而應該有更好的解釋才是。他採用下列的說法：

> 在 B 列和 C 列以相反的方向經過彼此時，在互相經過一整個區域的這個不可分割的瞬間時，一定有一個「瞬間」是互相交錯的（只過一半），但是這個「瞬間」已是就最不可分割的單位了，也就是說，「一個瞬間和它的一半相同」。

			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8			
B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1						
						C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8

季諾的這四個悖論，讓以後許許多多的西方數學家們，不再輕易相信直覺，對無窮這個概念，更是不敢輕易去碰觸。亞里斯多德將無窮分爲「潛在無窮」(potentially infinite) 和「實在無窮」(actually inifinite)：『潛在無窮』是一種無窮盡的過程，只要願意，都可以持續地遞增或遞減下去，譬如在自然數中，要得到多大的數目都可以辦到，或是在 0.999….中，要得到多少位的 9 都可以繼續下去；至於『實在無窮』，則是指涉完備的無限 (completed infinity)，譬如自然數整體，如{0.9, 0.99, 0.999, ….}這個集合。亞里斯多德拒絕實在無窮的存在，這樣的態度，也在後來的許多數學家身上觀察到，例如，偉大數學家如高斯 (1777-1855) 就認爲使用到「無限（無窮）」在數學證明上是不被承認的，他認爲只要「有限的人類」（Finite Man）不將無限當成是某一種固定的東西來看，就不會有矛盾產生。[8]

這種被「無窮」這個巨大的包袱束縛住的情況，即使阿基米德也不例外。這可以解釋阿基米德的拋物線弓形面積證明，何以成爲有如上述這樣的形式。誠然，他將作內接三角形的「無限」過程，只當成是一種發現的方法，但是，若要論及證明，就只能採用邏輯上較爲嚴謹的歸謬法了。

教學上的另一種反思

阿基米德的這個例子，除了可以解釋「無窮」這個概念發展關連到人文社會活動之外，附帶地，還可以提醒我們進一步思考「反證法」在數學教學上的地位。在高中數學新課程標準中，『反證法』的教學算是邏輯基本概念中的一個單元。但是，由於學生才剛接觸抽象、邏輯性的思考，對於『反證法』的證明，他們很容易迷思方向。『反證法』，例如像是「歸謬證法」，雖然證明的邏輯上相當嚴謹，但是卻不夠直觀。試想學生在看不到證明『目標』的

情形下，又如何能像已受過良好訓練的教師一般，輕鬆自如地完成證明呢？儘管阿基米德逼不得已利用（包含論證嚴謹的歸謬證法）窮竭法來證明弓形面積，反證法卻不是數學教學上一個好的學習過程。因此，我們教師在教學及擬定考題的評量過程中，實有必要衡量反證法的必要性。

註解：

1. 在南一版的課本中，將『悖論』翻譯作「詭辯」。『悖論』是一般科學史與數學史中的翻譯，它指邏輯推論上沒有問題，但是違反直觀的論證。
2. 阿基米德餘力學解法及證明之後，才定義何謂頂點：「由一直線和任一曲線所圍成的弓形，我稱這條直線為底，高為曲線到弓形底的最大垂線長，而頂點是這樣的點，過這點的垂線是最大垂線長。」而這裡所謂的直徑，是指拋物線的軸或平行於拋物線軸的直線。
3. 這一個式子以現在的符號表示，即是$1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+...+(\frac{1}{4})^{n-1}+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1}=\frac{4}{3}$，亦即如大家所熟悉的等比級數和公式：$1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+...+(\frac{1}{4})^{n-1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}$。
4. *reductio ad absurdum* 為拉丁文，英文為 reduction to absurdity，亦即『歸於荒謬』之意。
5. 值得注意的是，歐幾里得德並沒有使用「面積」這個詞。
6. 原子，atom 這個字的本意即是「不可分割的」。
7. Heath 認為 ”or in moving” 應該拿掉。
8. 轉引自 Barbett (2000).

參考文獻：

Aristotle (1995). “From the *Metaphysics* (11066-1067)”, in R. Calinger ed, *Classics of Mathematics* (New Jersey: Prentice-Hall, Inc.), pp. 84-85.

Barnett, J. H. (2000). “Anomalies and the Development of Mathematical Understanding” in V. Katz ed, *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, Washington: The Mathematical Association of America.

Lloyd, G. E. R.(1970). *Early Greek Science: Thales to Aristotle*. New York: W. W. Norton& Company, Inc.

Heath, Thomas. (1921). *A History Of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Heath, Thomas. (1949). *Mathematics in Aristotle*. New York: Garland Publishing, INC.

Heath, Thomas. (朱恩寬、李文銘等譯) (1998).《阿基米德全集》，陝西科學技術出版社。

新書櫥窗

邀請大家一起來解這一道『睡蓮方程式』

台灣師大數學系 洪萬生教授

《睡蓮方程式：學習科學的樂趣》
(L'Equation du nénuphar: Les plaisirs la science)
作者：亞伯特·賈夸 (Albert Jacquard)
譯者：陳太乙
台北：究竟出版社，2002 年一月。
ISBN 957-607-738-9

這幾年來，閱讀國內外出版的優秀科普書籍，總有賞心悅目的感覺！不過，共鳴的層次，大都僅止於科學知識的啓發或歷史人文的懷想，很少有如本書，能夠進一步端出了頗具『啓蒙』(enlightening) 意義的『大哉辯』（本書第四部份）來。

本書作者亞伯特·賈夸是一位退休的（群體）遺傳學教授，才識兼備，知識視野極爲開闊，堪稱是難得一見的科普作家。因此，儘管本書體例與手法近於隨想，作者依然可以運用輕鬆的筆調，貫穿他奠基於遺傳學的教育關懷與社會良心。有時候，他的論述好像是在對一群學童交心，在另一方面，他積極參與社會運動，爲法國其他種族的弱勢者之權益大力奔走，卻又不由得不讓人肅然起敬。不過，他這種人溺己溺的正義感，則是出自他對所謂『種族』定義深刻質疑，而這當然就訴諸他的遺傳學專業素養了。此外，他也對階級偏見者『量化』管理『智力』感到憂心，因爲這些人推卸了該負的社會責任後，居然還振振有詞，實在很難相信人類已經進入二十一世紀了。

正因爲作者對於自然科學的知識本質，有著正統實證論的偏好，所以，他在『批判理論』方面的閱讀興趣，並未讓他成爲一個虛無的犬儒主義者，反倒是結合了遺傳學專業知識，而強化了他的社會批判論述。或許也因爲如此，他才會提醒科學高中學生讀書時，不要只對科學狂熱，而忽略了哲學思辨。顯然，在重建人類社會以便協助個人實現自我時，他認爲年輕人光有科學的求真熱情是不夠的，還需要有哲學的薰陶，才能構築公義社會的願景。

本書的其餘部分，亦即前三部份內容，當然也非常精彩。其實，作者在字裡行間所流露的教育評論，應該是作者的終極關懷之所在。不過，作者對於體制內教育，固然不無批判，但是，說理譬喻平易近人，始終延續著他在世界各地中小學課堂中，那一位諄諄善誘、與人爲善的長者風範。還有，由於他曾擔任世界衛生組織遺傳學家，讓他有機會深入瞭解不同的種族與文化，從而將『禮讚差異』（他的一本著作的主題），作爲教育關懷之主軸。或許這也可以解釋何以在『蘇格拉底與奴隸』（本書第三部份）那一小節中，他會強調『理解』與『知識』是兩碼子事。

如此看來，本書作者或有比附蘇格拉底的意圖才是。試想在《米諾篇》中，柏拉圖以蘇格拉底和奴隸男孩的對話，鋪陳了他自己的數學哲學主張，同時，也利用了『靈魂不朽』的概念，說明了人類的『生而平等』。於是，雖然奴隸男孩從未受過正規教育，然而，經由蘇格拉底的『喚醒』，他還是能夠『理解』數學概念。柏拉圖在此所闡釋的這種『產婆式教學法』之方法論的局限，哲學家與教育專家早有定論。本書作者理應知之甚詳，他或許著重此

一對話的啓發性吧。

是的，本書正是由深具啓發性的小節連綴而成！它的第三部份主要以數學爲例證，但是，作者念茲在茲的，仍然是這些知識的意義。事實上，對照作者在大學時代的主修『統計學』，他有能力突顯這些數學知識之啓發價值，實在相當難得！當然，本部份題名『鍛鍊小體操』，也大大地強調了數學的『大哉用』。至於本書何以題名『睡蓮方程式』，我始終難以索解 — 或許它隱喩了一種被啓蒙後的意外驚喜吧。現在，且讓我們大家一起來解這一道方程式！

訊息

『學會會訊』

＊ HOMMSIGMAA：美國 HPM 新研究群的創立

今年 (2002)元月八日，美國數學協會 (Mathematical Association of America) 即將創立一個屬於 HPM 的研究群：HOMSIGMAA。它的英文全名爲 Special Interest Group of the MAA，其目標如下：

(1). 促進數學家、史學家與（各個階層）數學教育家之間對於 HPM 議題的討論。

(2). 激勵 MAA 會員中的數學史家、正在研究數學史的數學家發揮更大的角色，一起來貢獻 HPM。

(3). 幫助數學教育家更容易獲得數學史資源、課程材料與 HPM 方面的服務。

(4). 爲了推動歷史在教學中的使用，而提供一個課程發展與改革的論壇。

(5). 提供此一個論壇，促進數學家、數學史家與數學教育家之間的溝通。

關於進一步的消息，請查訪他們的網址：http://www.adelphi.edu/bradley/HOMSIGMAA/。

＊ HIMED 02 (History in Mathematics Education 2002)

英國數學史學會 (British Society for the History of Mathematics) 將於今年二月 16 日假 Sheffield Hallam University舉辦一天的研討會，主題是『教師與學習者的（數學史）資源』(Resources for Teachers and Learners)，由任教於Sheffield Hallam University數學教育中心的 David Lingard教授所承辦。應邀發表演講的學者，都是該學會的會員，其中包括了我們所熟悉的 Jan van Maanen。至於研討的主題，則涵蓋了『從文獻到資源：一個幾何學家的工作坊』 (From sources to resources: A geometer’s workshop)、『在小學課堂中我作了什麼？』、『數學史成爲課堂教學的一環』、『不可公度量與無理數』 (incommensurable magnitudes and irrational numbers) 以及『埃及數學與低數學成就的中學生』等等。Lingard教授的伊媚兒如下：d.lingard@shu.ac.uk 。

＊ AMUCHMA-NEWSLETTER-25

這是非洲數學聯盟 (African Mathematical Union) 數學史委員會 (Commission on the History of Mathematics in Africa) 所發行的第二十五期通訊。其內容目錄如下：

1. Objectives of AMUCHMA
2. Meetings, exhibitions, events
3. Current research interests
4. Notes and queries
5. Theses
6. Have you read?
7. Announcements
8. 8. Addresses of Scholars and institutions mentioned in this newsletter
9. Suggestions
10. Do you want to receive the next AMUCGMA-Newsletter?（英文版請聯繫 Paulus Gerdes: pgerdes@virconn.com）
11. AMUCHMA website: http://www.math.buffalo.edu/mad/AMU/amuchma_online.html

此一通訊也同時以阿拉伯文、法文發行，免費共有興趣的讀者索閱。華人地區的讀者如有興趣，請聯繫洪萬生教授：horng@math.ntnu.edu.tw。

這一委員會的現任主席是莫三鼻給的 Paulus Gerdes 教授，他是國際知名的數學教育家與民族數學專家。本委員會的目標，當然是發展去歐洲中心、並具有非洲特色的數學史學，為此，他們特別推動史學家、數學家、考古學家、民族誌學者以及社會學家等等的積極合作。目前，他們的主要活動包括以下三項：(1) 出版本通訊；(2) 建立檔案中心，以及 (3) 為各種規模學術會議與研討會，組織數學史講題。