

HPM 通訊

第四卷 第七期 目錄 (2001年7月)

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中） 助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
 編輯小組：蘇意雯（成功高中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
 蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新竹高中）
 謝佳叡（台灣師大數學系） 林倉億（台師大數學系研究生）
 陳鳳珠（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
 葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ John Fauvel 紀念專輯（下）
- ▣ 序傳種孫先生的《幾何基礎研究》
- ▣ 數學史在數學的教與學中的定位
- ▣ 介紹 John Fauvel “Using History in Mathematics Education”一文
- ▣ 賦予模型力量：以解放黑奴運動為例
- ▣ 幾何『修辭』：笛卡兒 vs. 歐幾里得
- ▣ 遠距離學習中的柏拉圖修辭：Robert Record如何教在家的學習者
- ▣ 碩士論文《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》摘要
- ▣ 數學為何重要？——從《孫子算經》序談起
- ▣ $\sqrt{2}$

John Fauvel 紀念專輯（下）

台師大數學系 洪萬生教授

本期續完 John Fauvel 紀念專輯，內容包含〈數學史在數學的教與學中的定位〉（與 Jan van Maanen 合撰），〈介紹 John Fauvel “Using History in Mathematics” 一文〉，〈賦予模型力量：以解放黑奴運動為例〉，〈幾何『修辭』：笛卡兒 vs. 歐基里得〉，〈遠距離學習中的柏拉圖修辭：Robert Record 如何教在家的學習者〉等五篇。從這些與上一期四篇文字，我們可以略窺 Fauvel 對於 HPM 的著力之深與關懷之廣。可恨天不假年，否則以他的活力與願景，一定為 HPM 學界做出更大貢獻。

綜觀這九篇文章，我們可以充分體會 Fauvel 出入古代數學文本與多元文化脈絡之後，總是可以為我們帶來 HPM 的啓示與省思。作為一位專業的數學史家，Fauvel 深知 HPM 是一個非常值得投入、而且必須好好地呵護的學術領域。為此，他總是像個 HPM 使者，到世界各地去發掘 HPM 的新進人才。不可否認地，HPM 能夠成為一個國際性而不只是專屬歐美的學術領域，Fauvel 擔任 1992-1996 年期間的 HPM 主席，絕對是不能忽視的因素之一。回顧 HPM 從 1972 年成為 ICMI 下屬的第一個研究群之後，所有的學術活動幾乎全部侷限在歐美世界，東方國家的學者可以說從未發聲。直到日本承辦 ICME-9 之後，Fauvel 也開始在東方世界尋求合作夥伴。我在 1996 年報名參加 “HEM 96 Braga” 時，Fauvel 立刻致函邀請我前往西班牙 Siville 參加 ICME-8，可以看得出來他對我乃至於整個東方的興趣，儘管在這之前，我們並不認識。其實，亞洲的同行如蕭文強（香港）、Masami Isoda（日本）與 Fauvel 論交，都可以充分感受他的歷史多元文化關懷。這可以解釋何以我在 1998 年四月應邀前往法國馬賽參加 “ICMI Study Book” 的編寫會議時，他如何地熱情招待來自亞洲的同行。

Fauvel 待人真誠，很多人見到他的第一個印象，都是笑容可掬。記得他去年來台參加 “HPM 2000 Taipei” 途中，曾轉述他在飛機上的一個遭遇。當他正在閱讀我的論文 “Euclid vs. Liu Hui: A pedagogical reflection” 時，空服員很好奇地問他閱讀內容，他回答那是關於中國數學史的一篇報告，空服員非常驚訝地說：啊呀，中文加數學，真是雙重地困難吧！Fauvel 轉述這一段插曲的主要目的，顯然是刻意強調中國數學史並不等於數學加中文，從而 HPM 也絕非數學史 (History of Mathematics) 加數學教學 (Pedagogy of mathematics) 了。這就是 Fauvel 式的 KTV — “My Way”！即使只是『傳播福音』，他也永遠知道如何就地取材與入

序傅種孫先生的《幾何基礎研究》

劉鈍、道本周 (Joseph Dauben)

中國在過去的一個世紀裏發生了巨變，從清末半封建半殖民地社會逐漸開始向現代工業社會的轉化。在這一歷史過程中，教育特別是科學技術方面的教育起著至關重要的作用。就數學教育而言，恐怕最能說明中國人的觀念轉換和社會進步的例子，就是人們對數學之本質的認識了——從早期對應用數學的重視到 20 世紀初開始對理論和抽象數學的關注，後者包括涉及數學基礎的那些問題以及與數理邏輯有關的技術和哲學。但是這種轉化是怎樣發生的呢？這是研究中國近代科學史不可迴避的問題。

實際上，數理邏輯成爲一個引起數學家內在興趣的課題，在西方也不過是在 19 世紀末的事情，因此它從西方萌芽到向中國傳播所經歷的時間要比其他數學知識（如微積分）短得多。1920 年，英國著名哲學家 and 數學家羅素 (B. A. W. Russell) 來華講學，可以說是通過他的演講中國學者才開始了對數理邏輯的關注和研究。傅種孫先生就是最早受到羅素影響的中國數學家之一。

爲了使中國知識界更好地瞭解羅素的思想，傅種孫先生與張邦銘合作將羅素的通俗讀本《數學哲學導論》(Introduction to Mathematical Philosophy, 1919) 譯成中文，名爲《羅素算理哲學》，1922 年由商務印書館出版，時距原著問世不過三年。同年傅種孫先生還介紹了美國數學家維布倫 (O. Veblen) 的幾何公理，以《幾何學之基礎》爲名發表于《北京高師數理雜誌》上。1924 年，他與韓桂叢合譯的《幾何原理》由商務印書館出版，該書系由希爾伯特 (D. Hilbert) 的經典著作《幾何基礎》(Grundlagen der Geometrie, 1899) 譯出。

在 20 年代的中國，數學基礎完全是一門新奇的學問。爲了向北京高師（北京師範大學的前身）的學生們講解這門課程，傅種孫先生決定自己編寫講義。在當時的條件下，傅先生採取了邊研究邊撰寫和隨寫隨講隨修訂的方式，在 1930 年前後用這份講義陸續爲數屆高年級的學生開課，選課者被要求具備抽象代數和實變函數論的基礎，通常是三、四年級的學生。講義的內容涉及數理邏輯總論、幾何基礎、幾何作圖等。值得指出的是，他所講解的幾何基礎沒有追隨希爾伯特的表述，而是採用維布倫基於射影幾何的公理集系統，儘管他在附錄中也介紹了皮亞諾 (G. Peano)、帕斯 (M. Pasch) 和希爾伯特等人不同的公理體系。幾何作圖原分上、下兩編：上編是一般尺規作圖問題的方法和理論，下編主要介紹伽羅瓦 (E. Galois) 理論在尺規作圖中的應用。

傅種孫先生認爲，數學基礎和數理邏輯應該成爲師範院校數學系學生的必修課，因爲他們中的大多數人畢業之後要成爲中學數學教師，而對嚴密邏輯的追求和對數學本質的理解應該儘早地由老師灌輸給學生。聽過傅種孫先生這門課的學生無不爲其內容的豐富和他的講課風格留下深刻印象。雖然如此，傅種孫先生的講義過去從未正式出版，僅作爲教材被油印和鉛印發行於校內，今日要想找到一套完整的講義已非易事。

1999 年 5 月，我們因從事“數理邏輯在中國的早期發展”課題訪問北京師範大學的王世強

教授。我們的感覺是，王教授是一個極為謙和的學者。在整個訪談中，他很少提到自己的工作，卻一再強調傅種孫先生對他個人的影響，以及傅先生在把數理邏輯這門學科引進到中國來所起的奠基作用。也正是在這次訪談中，王世強教授向我們出示了他珍藏多年的這份講義，我們在粗略地瀏覽過後就得出一個結論：應該儘快地出版這份珍貴的數學文獻。

我們的意見得到臺灣九章書店孫文先先生的熱情回應。孫先生畢業于臺灣師範大學數學系，他的九章書店主要出版和經營各類數學書籍，與大陸數學界保持著極為密切的聯繫。後來王世強教授告訴我們，北京師範大學出版社有一個專門出版本校名教授著作的計劃，同時他也徵求了傅種孫先生親屬的意見，最終決定將此講義交師大出版社出版，這也算作落葉歸根吧。無論如何，我們還是願意借此機會向孫文先先生表示感謝。

在這部講義問世近 70 年後，將其正式出版有什麼意義呢？

首先，這是第一部由中國人自己編撰的系統論述數學基礎的教材，其中涉及的一些內容與當時該領域的前沿工作在時間上沒有很大的差距。這份講義為我們研究西方科學在中國的傳播、轉化和中國近代科學的發展提供了一個極好的切入點，同時也是中國近代數學史研究的一個良好素材。

其次，作為中國近代著名的教育家和數理邏輯這門學科在中國的引進者和開拓者，傅種孫先生理應受到後人的高度尊敬。我們應該將傅先生這樣的前驅者的早年著作加以搜集、整理和研究，並在條件許可的情況下謀求出版。這是尊重知識、尊重人才的具體表現，是社會進步的結果。

最後，傅先生關於師範院校應該開設數學基礎和數理邏輯課程的思想在今天應該得到高度重視。在中國高等教育的實踐者們把目光集中在併校、建樓、產業開發、購置大型器材等舉措的同時，是否也應關心一下立教之本的教材建設呢？在高等數學的若干分支領域，我們都有了自己的教材；而在數學基礎和數理邏輯方面，目前有關的教材還不多。我們相信，它的正式出版將對在師範院校數學系開展這門課程的教學有益，或許還會對一部更系統更現代的數學基礎教科書在中國的誕生起到一點催化作用。

1607 年，當徐光啓和利瑪竇（M. Ricci）合作完成《幾何原本》前六卷的翻譯並將其付梓出版之時，前者曾滿懷熱望地預言“百年之後必人人習之”（《幾何原本雜議》）。然而這種樂觀的局面並沒有按期出現，幾十年後倒是有一位叫作李子金的數學家描寫了當時的知識精英們面對《幾何原本》的困惑：“京師諸君即素號為通人者，無不望之反走，否則掩卷而不談，或談之也茫然而不得其解。”（《杜知耕數學鑰序》）到了徐光啓所說的“百年之後”，康熙皇帝決定棄用歐幾裏德（Euclid）原著、克拉維斯（C. Clavius）評注的《幾何原本》，而將法國耶穌會數學家巴蒂（I. G. Pardies）更近實用的《理論與實用幾何學》納入其欽定頒行的《數理精蘊》之中。這段歷史也許可以說明，在中國傳統的思維定式中，對理論的、抽象的數學體系的接受與吸收不是一件容易的事情。由此聯想到傅種孫先生所處的時代和他的追求，我們就更能品味出這份講義的珍貴了。

附註：傅種孫，《幾何基礎研究》，北京師範大學出版社，2001 年 5 月第 1 版。本文是作者為本書正式出版所寫的序言。□□

數學史在數學的教與學中的定位

台師大數學研究所碩士班研究生 葉吉海摘譯

本文摘譯 John Fauvel and Jan van Maanen. “The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics”, *Mathematics in School* 26 (3) (1997): 10-11.

前言

近幾年來，對於數學史增進數學教與學的定位之研究有逐漸增加的趨勢，於是，『國際數學教育委員會』（ICMI, the International Commission Mathematics Instruction）遂規劃相關的專題研究（Study），其成果將於 2000 年日本所召開的第九屆國際數學教育會議（ICME-9, the 9th International Congress in Mathematics Education）中報告。為此，本『討論文件』（Discussion Document）將扼要地提供關於此一『研究』（Study）的一些想法與建議，期許全球各地的同行都能對這國際性的學術領域有所貢獻。這些議題將於 1998 年四月在法國馬賽研討會中，讓與會者集思廣益，而最後共同討論的成果，將於 2000 年出版的『ICMI 研究』呈現。（按：本書已於 2000 年由荷蘭 Kluwer Academic Publishers 出版，書名為 “History in Mathematics Education: The ICMI Study”，主編是 John Fauvel and Jan van Maanen，他們兩位分別擔任 1992-1996，1996-2000 期間的 HPM 主席）。

以下謹將我們所擬議的問題，作一個概述性的說明。歡迎大家批評與指教！

一些研究的課題

本『ICMI Study』的整體研究意圖，是在探討數學史各個面向，在各個階段的教育系統中的定位。以下研究課題的序號沒有比較重要或有特別的意義。

1、學習者的教育層次如何關連到數學史的角色？

使用數學史的方法和理由，在不同的學校與教育階段裡會有所不同：比如小學生和大學生成對教育有不同的需求和展望。數學史如何符合這種差異？

2、在哪一個層次，數學史納入教學題材是相干的？

在分析數學史的定位時，區分『在課堂中使用數學史以利於數學教學』或是『在教數學史本身』是很重要的。

3、對於教師而言，什麼是數學史課程或成分特有的功能？

數學史可能在師資的培育和教師的在職進修中扮演特別的角色。有很多理由支持在這些訓練中加入歷史，其中包括數學熱情的提升，幫助實習教師以不同的方式看待學生、不同的方式看待數學，並且發展閱讀的技能、圖書館使用和數學課程中被忽略的寫作解說。

4、數學史家與那些只想把數學史運用在數學教育中的人之關係何在？

這個問題聚焦在培養不同專業人才的訓練基礎，同時，它也涉及今天數學教育社群的社會結構，以及數學史的本質。史學家和數學教育家共同合作是很重要的，因為在適當的層次上，史學素養和課堂上課經驗並不永遠在同一人身上兼備。

5、是否課程的不同部分可以用不同的方法將數學史融入其中？

對比代數教學與幾何教學，數學史對兩者的特殊角色研究，早已有人著手研究。甚至課程設計，歷史的知識也可能很有用。回顧近來的研究概況，可以提供一些納入課程的新材料。

6、在不同的地方或區域脈絡中的文化團體中，數學的教與學經驗，是否造成數學史的不同

需求？

數學學習的一個歷史向度，以辯證的方式為我們引出兩個相互矛盾的認知。其一為數學是在文化的脈絡中發展，相對於此的，我們也體會：人類的各種文化都會引發數學的發展，它們是我們每個人的遺產；而這顯然也在教育系統中，對抗了一種狹隘種族主義的觀點。

7、數學史在特殊教育需求上可以扮演什麼角色？

曾負責廣泛多樣的特殊教育需求的老師們的經驗是：數學史可以賦予學生力量 (empower) 並有效地支援他們的學習歷程。這些經驗得自數學基礎良好的班級、低成就學生、資優生和殘障生等得來的。

8、我們賦予數學史的角色與其在教育上引進或使用之方式的關係是什麼？

這個問題在最近幾十年始終是值得注意的焦點。每次有人報告有關在課堂中使用歷史的經驗及成效時，他們就對這問題提供一個回應。這問題也包含了一串的引進或融入歷史向度的方法，例如：軼事的、概括的摘要、內容、戲劇的等等。然後我們將會把注意力擺在每一個融入的方法所能達到教育目標的範圍，例如：數學軼事改變對數學的印象，並使它人性化。另外，還有很豐富的議題可以來討論和深入探討。如：在數學課堂上使用文本等。

9、什麼是課堂組織和實踐的結果？

整合數學史的結果是影響極廣大的。尤其，它對於學習評量的方法有很多機會。評量可以延伸到發展不同的技能（如寫作與專案報告），而學生的興趣和滿意也因此得到關注。針對這些嶄新的評量，教師可能非常需要實務的輔導和教室組織方面的支持。

10、對數學教育研究者而言，數學史如何變得有用？

一個例子：數學史的使用，幫助教師和學生去克服在數學瞭解的發展過程中認識論的斷層。對『個體發生重演種系發生』— 單一數學瞭解是遵循了數學概念的歷史發展 — 的結構性批判分析，是恰當的。另一個例子：有關數學概念的發展的研究。在這例子中，研究者運用歷史作為一面鏡子，以照見讓數學思考付諸行動的機制。如此將史學和心理學觀點結合值得正視。

11、在各國的數學課程文件與各中央政府領導體制中，數學史納入數學課程的經驗為何？

這問題的討論，需要投展入各國的人才越多越好。當然這也牽涉政策的蘊含，以及可以經驗分享如何在各國內達到政策制訂時，影響了這些公部門文件的內容及修辭。

12、在這領域的研究上，過去有哪些研究成果？

答案是：相當多！但將所有的文獻收集與分析放在一起，將會超出篇幅與需要。一個主要的評註參考文獻，將會是本『ICMI Study』可以達成的貢獻。

介紹 John Fauvel “Using History in Mathematics Education”一文

台師大數學研究所碩士班研究生 林倉億

這篇文章發表在 1991 年 6 月號的 *For the Learning of Mathematics* 上，儘管距今已有十年了，但是，我們仍能從這篇文章中得到許多的啟發，由此可見 Fauvel 在此一領域中的真知灼見！雖然利用一篇短文來介紹這篇文章是件不容易的事，不過筆者還是會盡力，希望能將 Fauvel 此文中最主要的理念傳達給各位讀者。

Fauvel 指出：長久以來，一直有人提倡利用數學史來幫助數學教學這一理念，可是在 1989 年的英國『國家數學課程』(Mathematics National Curriculum) 中，此一理念並未被列入，但在同年的『國家科學課程』中，不僅是列入歷史的觀點，還強調社會、文化等脈絡對科學知識的影響。同樣是利用歷史來幫助教學，為什麼會有如此截然不同的遭遇？這便是 Fauvel 作此文的主要動機。不過，Fauvel 並非在這篇文章中呼口號而已，相反地，他去探究了此一理念被忽略的原因，更進一步地指出我們應該努力的方向。

在造成幾個上述情形的原因之中，最重要的就是「利用數學史來幫助教學是否真的值得？」此問題一直並未得到完整的回答。Fauvel 表示雖然在過去數十年間有許多篇文章肯定數學史在教學上的好處，但似乎都認為只要能夠講清楚數學史與數學教學間內在的、令人信服的關聯，那麼改變就會神奇地發生！Fauvel 明白地告訴我們那樣是不夠的，除非能夠證明數學史可以融入課堂活動中、可以讓教學更容易、額外的事先工作對教學目標的達成是有長期的效果等等，否則再怎麼說數學史有助於數學教學，那都不過是大話 (hot air) 罷了。

如何證明數學史真的是有益於數學教學？Fauvel 提出了幾個使用數學史的方式，並且強調我們應該要很清楚地區分『在教學中使用數學史』、『教數學史』，以及『傳達數學研究的文化面向』這三件事。清楚地區分前兩者，可以減輕數學老師們在使用數學史這方面的壓力；至於第三者則是有助於老師們去發展學生對數學的鑑賞與喜好，並且了解數學在過去與未來的科技中所扮演的角色等等，也有助於讓學生欣賞不同文化中的數學知識活動。

最後，Fauvel 還強調從數學史中，老師們可以預見較多的學生可能犯的錯誤，這對老師們的實際教學有很大的幫助。當然，Fauvel 也知道使用數學史並非一件容易的事，所以他在文章結束時，特別呼籲：所有的師資培植機構應當給予教師們在數學史與使用數學史上的訓練，除此之外，許多的周邊資源仍有待建立，唯有這些一一建立以後，才能給教師們最好的支援。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy@pchome.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy@pchome.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

賦予模型力量：以解放黑奴運動為例

台師大數學研究所碩士班研究生 陳鳳珠

前言

本文介紹 John Fauvel 的文章 “Empowerment through Modelling: the Abolition of the Slave Trade” (收入於 Ronald Calinger 主編的 *Vita Mathematica*，頁 125-130)，藉以感念 John Fauvel 在數學教育上的關懷與貢獻。

內容摘要

近來教育界流行『數學工藝品』(mathematical artifacts) 在課堂上運用的研究，以幫助學生進行學習，其作法包括利用過去的事物或文本等等的材料。該文即是在此一背景之下，探討模型 (Modelling) 在課堂上可能具有的幫助與作用。首先，John Fauvel 藉由 Thomas Clarkson 的 *The history of the rise, progress, and accomplishment of the abolition of the African slave-trade by the British parliament* (1808) 書中，關於解放黑奴運動的歷史演進圖，來說明圖像 (diagram) 在傳達或介紹某些概念時可能具有的效果。他在探討解放黑奴運動與該演進圖的關聯之後，接著將此與數學教育作聯結，並進一步討論解放黑奴運動中的相關議題與數學。

事實上，反對黑奴運動中的部分爭議與迷思，正好可以作為數學教育的省思。譬如反對黑奴就得打破「白種人優於黑種人」的迷思，同樣地，在數學教育上也要面對「男人優於女人」的誤解，最佳的方法就是舉出反例，John Fauvel 在該文中列舉出三個實例，以說明黑人和女人也可能具有極高的數學能力，以便祛除上述錯誤認知。

同時，他也認為學生藉由歷史的學習與了解是相當具有教育意義的。例如透過對數學史的認識，就可改變多數學生在學習數學時認為數學早已有之的假設，而轉而體會它是經過長時間的演變與累積而成的。如果藉由圖表 (chart) 或圖像 (diagram) 等等的方式去探索數學的歷史發展，應該可以獲得良好的學習效果。所謂的圖像，並非指數字上或統計上的資料，而是概念化的資料 (conceptual data)，它本身就會說話，因此，在教育上應具有一定的作用與啟發。值得注意的是，使用圖像化的模型 (graphical modelling) 受到部分人士的貶抑，他們認為圖像的使用會脫離數學知識本身的情境和脈絡，其中所呈現的邏輯關係也不夠嚴謹。關於後者，數學家 J. L. Lagrange (1736-1813) 就是最著名的例子，由於他對代數的高度推崇，在其著作《分析力學》(*Analytical Mechanics*, 1788) 中，強調該書中沒有任何圖形 (There are no figures in this book)。John Fauvel 認為，圖像所受到的差別對待，其實就類似於女人在性別歧視社會中所受到的不公平待遇。

結語

John Fauvel 以 Thomas Clarkson 書中的解放黑奴運動及其歷史演進圖為例，揭示圖像在 (數學) 教育上的可能應用，以及解放黑奴運動帶給數學教育的啟發，同時為歷史、數學與教育的聯結提供極佳的例證。

幾何『修辭』：笛卡兒 vs. 歐幾里得

台師大數學研究所碩士班研究生 黃清揚

摘譯序

本篇文章摘譯自 1988 年二月出版的雜誌 *For the Learning of Mathematics* 中 John Fauvel 的著作 “Cartesian and Euclidean Rhetoric” (pp. 25-29)。這裡要對『修辭』做個解釋，這一名詞在此特別是指數學文本中的書寫方式，包含語調（法）及文字的使用。而書寫方式的不同就好比不同老師所採用的不同上課方式，有沉悶也有愉悅。作者基於對數學教育的關懷，整合數學史的發展寫下了這篇文章，並給大家深刻的省思。

前言

在日常教學環境中，是否有一種最好的方式來溝通數學？以時間至上的上課模式來說，學習者日復一日的坐在椅子上，看著教師在黑板上書寫的背影，每次五十分鐘，並接受一連串像是輔助定理、定理 4.2.1、證明以及備註等等數學知識。這種方式對講課者來說是方便的，學生也易於記憶，缺點則是學生無法察覺數學是可親近的，甚至從開頭便不知所措，失去學習的樂趣。另一種講課方式，老師能激發學生的熱情，引導學生相信數學是一門真正有趣的科目並樂意學習。這種方式雖然留給學生溫暖與快樂的感覺，但是，它的缺點則是未給予學生充分的實質內容來強化這種感覺，或是讓學生誤以為這門課是簡易的，但在自行研讀時，遭遇到極大的困難。

以上所述，也見於各種數學的文本。於此，這裡便是要介紹過去兩種有著高度影響力的著作：300B.C.左右歐幾里得所著的《幾何原本》(*The Elements*) 與笛卡兒 1637 年出版的《幾何學》(*Geometry*)。文章中我將數學的溝通描述為歐幾里得或是笛卡兒『修辭』是根據某一個文本讀起來與看起來比較像《幾何原本》或《幾何學》而定。再說到『修辭』與數學的連結，這裡僅止於關懷語言如何用於溝通數學，一位作者選擇怎樣的寫作方式與來讀者溝通，所呈現出來的『修辭』正是本文關注的焦點。

歐幾里得『修辭』

《幾何原本》中『定義-公理-命題-證明』的型式是歐幾里得對上千個相似的產品最終的巧思。我們評估歐幾里得『修辭』，特別有趣的地方是他完全直接的態度：沒有跡象顯示作者曾經注意到讀者的存在，因為在書中他努力地在陳述所謂「永恆的真理」。這種模式已被證明為高度成功的書寫方式，明顯地，故意忽略讀者一直不被視為是不容易理解的。

笛卡兒『修辭』

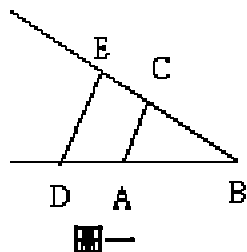
笛卡兒的《幾何學》提供讀者另一種『作者與讀者』關係的世界。《幾何學》乃是 1637 年於萊登 (Leiden) 出版的《方法論》(*Discourse on method*) 中附於書末三篇論文中之最後一篇。《方法論》中所採用的口吻與《幾何學》是一致的，笛卡兒告訴讀者他提供這本書僅當作是歷史或是虛構的故事。而書中對不同時間的描述有著精細的控制，譬如它包含了『寫作的時間』、『讀者經由文本進展的時間』以及『描述事件的時間』等等。簡而言之，笛卡兒絞盡腦汁來定義及架構讀者的反響，而這也是最成功的策略。

檢視《幾何學》，笛卡兒將所訴求的讀者對象設定在『初學者』，因為他在開宗明義就指出：

到目前為止我已經試著讓每一個人對我的意思能清楚的了解；但我懷疑是否這篇論文能被不熟悉幾何的讀者來閱讀，因為我已經認為重複在裡面的論述是多餘的。

相較之下，《方法論》中其他的部分則並非如此。我們要特別注意到《幾何學》反而是放在《方法論》最後的地方。由此看來，儘管他使用的是家鄉話以及較愉悅的模式，作者似乎在前提上就認定大多數的讀者不能讀懂他的書。對於當時的同行來說，他的書的確與眾不同，也因為他的書難以了解，我們也可想像笛卡兒如何技巧性的贏得聲名與喝采。

在書寫方式上，笛卡兒用的是友善及直接訴求般迷人的語調，這種語調不像出自數學家反倒像是一位工匠告訴讀者如何製作傢俱：



圖一

假定 AB 是單位，現在想要將 BC 乘 BD ，我只要連接點 A 與 C ，然後畫 CA 的平行線 DE ， BE 即為乘積。(如圖一)

相較於笛卡兒，歐幾里得則採用面積來操作（因為對歐幾里得來說，兩個數或量相乘其結果必須用面積來替代，並且數與量要分開處理），其語調就較為嚴肅，請參見《幾何原本》第七冊定義 16：

兩數相乘得出的數稱為面，其兩邊就是相乘的兩數。

有了以上定義之後，接下去他才處理數與量的乘法。

另外，對於讀者來說，笛卡兒體貼地未將數學知識所有細節陳述出來（歐幾里得則否），因為他認為過多的敘述令人感到厭煩，如果將這些刪掉的部份留給讀者自己來發現，或許他們會覺得更有樂趣才是。

最後，笛卡兒相信用這樣的『修辭』方式來縱貫全文，後人會給他仁慈的評斷，事實的確也是如此。

笛卡兒「修辭」的成功

雖然笛卡兒最初的文本曾讓讀者稍稍懷疑他的才華，但經由荷蘭籍拉丁文譯者 Frans van Schooten 的努力，卻使它在數學社群中博得好評，並風靡到法國以外的地區。如同 Jan van Maanen 曾經指出：笛卡兒的數學能夠普及，大部分的成就要歸功於 Frans van Schooten，並經由此一荷蘭人，《幾何學》成為教育性的文本。

修辭學上的迴響

綜觀數學史，歐幾里得與笛卡兒『修辭』絕不是數學文本中僅有的兩種書寫方法（英國數學家 Robert Record 另有一種柏拉圖式的『修辭』風格）。我們在檢視其他人的『修辭』時，也必須面對自己的實務經驗。為了不同的目的（教師或作者），我們應該使用怎樣的「修辭」呢？而這種形式的「修辭」在溝通上又是如何進行？（特別是在課堂上教師如何與學生溝通？）從 HPM 的觀點來看，企圖回答這些問題，一定可以幫助我們從自身實務經驗跳脫出來，賦予批判性的反思，並且擴及其他可能的領域之學習。

遠距離學習中的柏拉圖修辭：Robert Record 如何教在家的學習者

西松高中 蘇惠玉老師摘譯

本文摘譯 John Fauvel, “Platonic Rhetoric in Distance Learning: How Robert Record Taught the Home Learner”, *For the Learning of Mathematics* 9 (1) (February 1989): 2-6。

一般我們論及數學學習時，所浮現的印象都是教室中面對面的學習方式。誠然，教室中的學習在數學教育中扮演很重要的角色。但是，有一些人的數學學習，是在遠離教學資源中發生的，甚至沒有任何老師，數學學習只能經由教科書、錄影帶來完成。學生如何從這些媒介的學習中獲利？教師如何為這些遠距離的學習者準備適合他們的教材教具？這篇論文的主要目的，在於藉著研讀過去一位有技巧的老師所寫的教科書，看看在遠距離的數學教學上，我們能學得什麼。

Robert Record

Robert Record 為威爾斯人，出生於 1510 年，1531 年牛津大學畢業，1545 年在劍橋獲得碩士學位。期間擔任過造幣廠的主事者，測量員等等，因為長期和 Pembroke 公爵不合而入獄，於 1558 年死於監獄中。Record 是那一代英國人文主義者 (humanists) 的後代，在諸如 Erasmus、Thomas More 等人的學說氛圍中成長。在當時的極速成長的文學、貿易的繁榮及促進和平或戰爭的技術能力的環境中，Record 是第一個考慮數學應該納入教學科目，以及如何去教的人。他的策略即是一系列教科書的出版，從這些書名中，我們就可以看出他所設計的數學學習者的進程：

The ground of arts (1543) 基本算術

The pathway to knowledge (1551) 基本幾何

The gate of knowledge (未出版)

The castle of knowledge (1556) 天文

The treasure of knowledge (未出版)

The whetstone of wit (1557) 進一步的算術、代數知識

The ground of arts 是 Record 最受歡迎的一本書，在他生平中即已再版過四、五次之多。在這一本書中，Record 即引入他的對話形式，以及人文主義者的教育策略。這一本書中也首度出現他在後續許多書中都出現的角色：『大師』(Master) 與『學者』(Scholar)。其中學者這個角色，並不只是一個單純的知識吸收者，從而這一本書也不是一本無聊的問答集。通過『大師』與『學者』之間的對話，Record 細心地解釋了為什麼『學者』會問這些問題。

理性與權威 (Reason and Authority)

Record 在所有書中的一個主題，即是在知識的建立過程中，權威性與理性思考的平衡。在 *The castle of knowledge* 中，當論及托勒密作品時，『大師』告訴『學者』：

你和所有的人都應該注意，在托勒密和所有人的作品中，不能誤用了他們的權威性，而必須注意到他們的論述，小心地檢驗他們所說的、所證明的；因為權威常常會欺騙人。

在這種方式中，Record 逐漸引入一種較為宏觀的想法：自行思考，使用自己的理性推論是基本的義務 (thinking for oneself, using one's reason aright, is a prime duty.)。

但是，理性推論的強調並沒有辦法提供數學全部的正當化。在這一方面，Record 在他的

幾何教科書 *The pathway to knowledge* 中，解釋了歐基里得《幾何原本》前四冊中的作圖及命題，卻沒有給出任何一個證明。這是一個審慎策略判斷的一部份：初學者（這本書的設定讀者）首先必須去瞭解結果是什麼，然後才是去看解釋的過程：

人們瞭解事情的最佳方式應該是：首先學習這些事情是什麼樣的形式，第二，它們是什麼，及它們的重要性，然後第三，才是它們的成因。

柏拉圖式的修辭

Record 的教育策略最關鍵的在於他的對話形式，他在 *The ground of arts* 的序言中解釋：

我以對話的形式寫出，因為我判斷這是介紹知識最簡單的方法，當『學者』順序地提出每一個疑問時，『大師』將有計畫的回答這些問題。

這種形式能夠使 Record 處理一些較精細的教學問題，且傳達了學習者的困難之處，這是其他呈現方式中很難處理的。它有兩個較全面的優勢：首先，它迫使作者必須站在讀者的角度思考，提出和回答任何學習者可能會碰到的困難之處。所以，比起其他的教育策略，它對讀者而言它是相當親切的。第二，從讀者的觀點來看，它提供了一個戲劇的張力，這些內容會鼓勵讀者忍耐任何困難的片段，使得在遠距離學習中更為主動與適切。

以對話形式的教學，在現今已經很少見了。可能是因為在過去幾個世紀以來，在教科書的文化中，主導的是一種亞里斯多德的形式而不是柏拉圖的形式，也就是說，抽象性及理論形式的遠比文學的、人文主義的形式更受重視。而 Record 會作這樣形式的選擇是相當清楚的，因為他在牛津所受的良好教育，使得他對柏拉圖的作品相當熟悉，這些作品現今被當成是哲學對話的典範 (paradigm)。我將 Record 教科書中所用的形式稱為柏拉圖式的修辭，因為 Record 的對話顯示了他對柏拉圖形式的熟悉；更值得注意的是，他經由錯誤而引導致真理的辯證形式。這不只是一種對話的形式，而是帶領讀者得到進一步的技巧與啟發的形式。

Record 的天才之處，顯現在處理『學者』這個角色上。『學者』的錯誤示範，是教學過程中重要的一部份，藉著這個角色的問題及錯誤示範，可以使得模糊的地方被澄清，一般容易錯誤及誤解的地方，也能適時提出及改正。換言之，『學者』的錯誤，能夠帶出很重要的教學上的訊息。

Record 的啟示

從 Record 的教科書中，我們可以看出，一本教科書的成功與否，在於作者預估到多少讀者的問題所在。另一方面來看，Record 『學者』角色的人格特質，以一種寓意的方式轉化給讀者。讀者在瞭解到什麼是數學家的詢問方式時，也瞭解了數學的技巧和方法。而在遠距離學習裡，學習者在追求知識的過程中，需要指導以及安心的保證。這一點對他們而言就相當的重要。現今的教科書作者以及遠距離學習教師，也許可以從再次檢驗 Record 的教科書中，所呈現的教學技巧的的反思中，而得到啟示。更甚的，也許不只是遠距離學習教師也能獲益！Record 的戲劇效果可以轉化到某些課堂活動中，學生能夠被鼓勵去發展他們自己的認知，以及創造關於數學想法、技巧乃至於『誤謬』的劇本。誠然，教數學要比做數學困難許多，接收過去的教學作品及針對這些課程的評價，需要相當的小心謹慎，但是卻也是一個開始。

碩士論文《清代算學家駱騰鳳及其算學研究》摘要

台師大數學研究所碩士班研究生 陳鳳珠

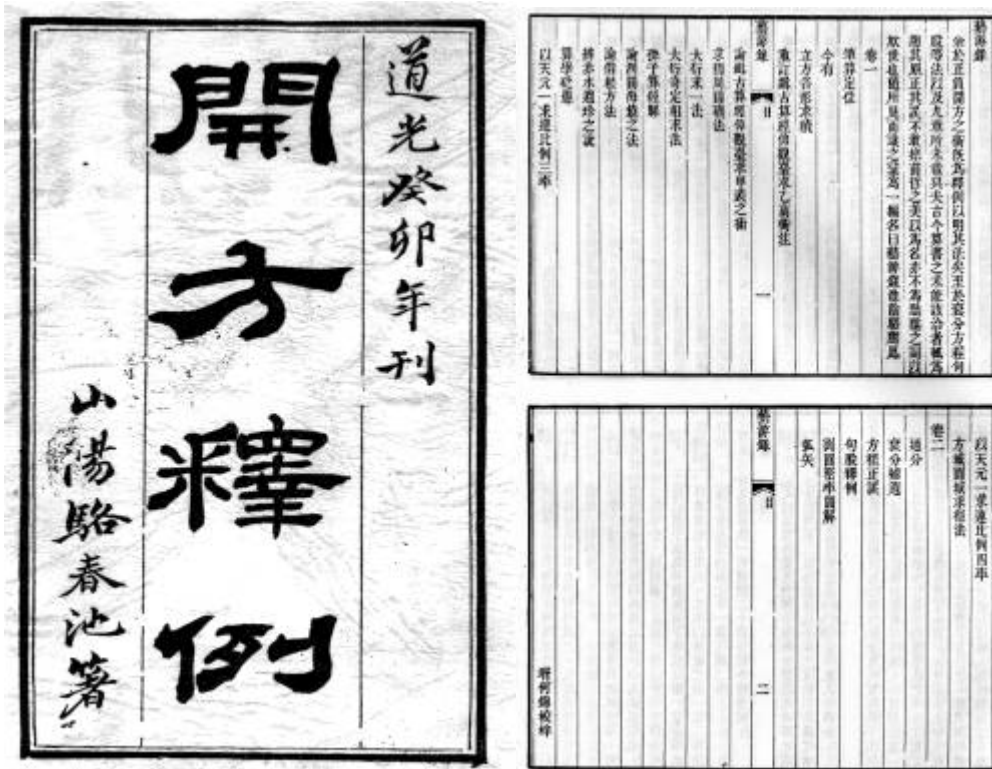
由於明末中算的式微，加上曆法上的需要，西方數學才有機會以優勢的姿態傳入中國，遂成為清初算學家的主要學習對象。在梅文鼎等人的努力會通與研究，以及古代算書的重新編纂之下，清中葉的算學研究焦點，才逐漸由西學反身轉向中算。特別是在以「興復古學、昌明中法」為職志的乾嘉學派，所經營的學術環境下，中國傳統算學得以獲得極大的闡揚與重視，卻同時也突顯中西法較勁的緊張情勢。

本論文的主角駱騰鳳（1770-1841）正好處於清中葉復興中國傳統算學的巔峰時期，同時也是參與當時中西法較勁的成員，不但相當投入中國傳統算學的研究與注釋，對中西算學也有極為鮮明的對待，因此，駱騰鳳及其算學研究可以說是，我們考察清中葉算學研究風貌的極佳對象。

可惜的是，駱騰鳳的算學研究為近世史家所注意的，除了他對百雞問題有進一步的解決外，無非是他沒有理解西法派汪萊探索方程的本意，並以「算學砭愚」為題攻擊汪萊的研究工作。事實上，駱騰鳳對同屬中法派身分的李銳仍未假以辭色，儘管他批評李銳的用詞沒有汪萊嚴厲，但在篇幅上卻遠勝過汪萊，這個部分卻往往為現代史家所忽略。

此外，駱騰鳳在《藝游錄》中，關於《緝古算經》與《九章算術》等古算書的校注以及勾股術的研究，均有精采的表現，為復興中算的工作作出一定的貢獻，值得史家注意。還有，他於《開方釋例》裡，嘗試對各次方程做初步的分類、探討方程根與係數的關係，以及具體論述負根等等，確實在「以復古為尚」的乾嘉學派所經研的學術環境下，作出突破性的演出。

本論文將透過對駱騰鳳算學著作《開方釋例》與《藝游錄》的深入分析，以探討其算學研究與當時學術環境的關聯，及其可能展現的意義，並且藉由清代學者與現代數學史家對他的評價，以釐清駱騰鳳在清代算學研究上的地位與價值。另一方面，我們也試圖從 HPM 的觀點，去考察駱騰鳳與李銳在天元術與借根方的代數認知上之差異，並且解讀他對二次方程解法幾何意義的說明，期待在今日數學教師的教學和學生的代數學習上，獲得更多的啟發與應用，同時賦予駱騰鳳算學研究以及古代文本的「另類」意義。



《開方釋例》封面

《藝游錄》序言與目錄



論文口試場景

數學為何重要？——從《孫子算經》序談起

中等教師研習會 林炎全教授

『算』在中國古代並不被重視，它居六藝之末，未被認定為理。根據唐書記載，算學學生限八品官以下的小孩及庶人，算學學官更是從九品下，可以說是最低階的。顏氏家訓亦有這樣的說法：**(算)術亦是六藝要事。自古儒士論天道，定律曆皆通學之。然可以兼明，不可以專業…**。在許多朝代，算只是曆律占卜項下的支系。

與此相對，《孫子算經》的序言，提供一個很不相同的看法。序言說：**夫算者，天地之經緯，群生之元首，五常之本末，陰陽之父母，星辰之建號，三光之表裡，五行之平準，四時之終始，萬物之祖宗，六藝之綱紀…**。任何事務都與數學有關，任何問題都透過數學而得解。它賦給數學至高的地位和無與倫比的重要性。可惜的是這種看法曲高和寡，並沒有獲得共鳴。這可從兩方面來看：(1)『算』從來不是教育與科考的重點。中國古代教育以培養順民為目的，重點在灌輸忠君尊長的思想。數學在這方面作用不大，甚至是反效果的。(2)社會對數學的需求成長停滯。中國古代科技進展遲緩，既有的算術已能應付所需，缺乏開發新領域的動機。《孫子算經》的序言中的所呈現的觀點，既乏被認可的事實印證，也無政治統制方面的需求。得不到共鳴，實在是意料中的事。

學校的數學老師常被學生問到這樣的問題：為什麼要學數學？這個問題有一個直覺的答案：數學很重要。但這樣空口說白話是沒有用的，只會成為《孫子算經》序的續篇。重要性不是用口頭宣示就能得到認同，而是要透過教學活動來呈現這些特質。考試要考、很有用、能改變氣質…，老師可以舉出一大堆冠冕堂皇的說詞，但它們可有說服力？依賴考試支撐，數學的重要性能維持多久？改變氣質，數學不如詩詞歌賦，讓人口吐珠璣；也不如體操韻律，使人體態優雅。數學所能涵養的氣質在深沉的思維，這需要長時間的浸化才能見其成效。數學老師如果要學生認識數學的重要性，引起學生學習動機，最好從歷史與現實中，尋找相關的事例，納在教材中。讓學生從歷史中看到數學在文明進化過程中所扮演的角色；也在現實應用中看到數學是無所不在。當然還要加上許多耐心、熱心和愛心。

$\sqrt{2}$

台師大數學研究所研究生 黃哲男

(297,210)，看到這個數對，不知道大家會聯想到什麼？什麼也沒有，對不對？

嗯！這個數對對某些人來講應該是很熟悉的數對，但可能從來沒有想過它的意義。

我接觸這個數對至少有六年的時間，但我也從來沒有想過這個數對到底有什麼意義。第一次看到這個數對是在 word 的版面設定中看到的，它是 A4 的長與寬（單位是 mm），不知道各位有沒有想過，為什麼要取這兩個數對？我曾懷疑了六年，始終對於 7 這個部分耿耿於懷，為什麼設計者個位數不取 0，讓數字簡單點？

今天我用 word2000 中的一個功能時發現，這個數對其實是很有意義的。

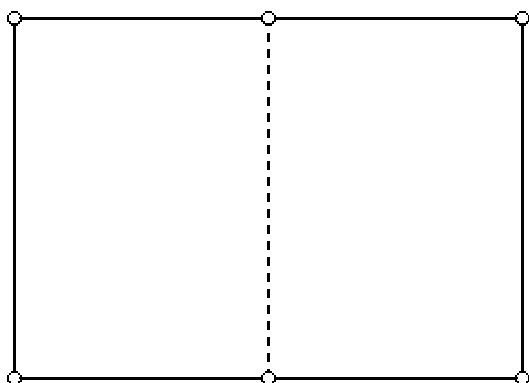
先從 word 的這個功能談起好了。在 word97 以前，要把 A4 的東西印成 B4 是一件困難的事，通常是先用印表機印出來，然後再放大成 B4；如果不喜歡影印機的品質，那麼只好找一台能印 B4 size 的印表機，不過原來的檔案要東改西改，改成 B4 的版面才行，不過這是非常累人的一件事。Word2000 支援放大縮小列印的功能，現在只要印表機有支援 B4，那麼只要在列印中把比例改一下就可以輕鬆解決原來的問題。

這個功能我用過不知道多少次，但直到今天我才想到，為什麼 word 把 A4 size 印成 B4 時，整個版面都沒有改變？這一點給我的直覺聯想是 A4 和 B4 是相似形。

經過我的驗證，的確如此，B4 的長與寬分別為 364 mm 與 257 mm，伸縮比例大約是 1.225 左右，好像沒什麼意義，對不對？那我們看一下 A3 好了。A3 的長與寬分別為 420 mm 與 297 mm，伸縮比例是 1.414 左右（長與寬非依同樣的比率伸縮，不過誤差很小，大約都是 1.414，所以姑且假設它們是依同比率伸縮好了）。嗯！1.414，很熟悉的一個數據， $\sqrt{2}$ 1.41421356...，巧合？還是設計者故意的？我不知道，不過我後來又發現了另外一件事：

$$\frac{297}{210} = 1.4142857\dots, \quad \frac{364}{257} = 1.4163424\dots, \quad \frac{420}{297} = 1.4141414\dots$$

換句話說，我們常用的影印紙的長寬比大約是 $\sqrt{2}$ 。一開始這件事對我造成很大的震撼，但我隨即一想，其實這是可以理解的，因為兩張 A4 可以拼成一張 A3，且 A4 與 A3 相似，所以自然其長寬比為 $\sqrt{2}$ 。



也許，當時的設計者是希望將一矩形分成兩半時，小的矩形會和大的相似，因而進一步算出長寬比應為 $\sqrt{2}$ 。

很有趣，是不是？也許有些人以前曾經發現過這個事實，那請原諒我的野人獻曝；如果以前沒發現過這件事，也許可以和其他人分享這個有趣的事實。

喔！對了，將 A4 影印放大成 A3 的時候，影印機設定的倍數就是 141%，下次影印的時候可以看一下。

數學族人

開平高中 林裕意老師

我的父親已經退休在家，他是一個喜歡動腦筋的人。有一天，他坐在搖椅上很興奮的問我：「裕意，你知道 1 加 2，再加 3，繼續加到 100，結果是多少嗎？」我淡淡的回答：「當然知道，是 5050。」他很稀奇我怎麼那麼快的就說出答案，接著問，「你怎麼算的？」爸爸是小學畢業，我想試著將我所學的「高深公式」說給他聽，我已忘記他是否聽懂了，但是我印象深刻的是，他很認真的告訴我：「我可真是花了很大的力氣才想出來的呢！你看... $1+12=13$ ， $2+11=13$ ， $3+10=13$它們都是 13 呢！」他指著牆上的時鐘繼續說，「所以，想從 $1+2+3+4+...$ 加到 12，只要 $1+12$ 結果再乘以 6 (12 的一半) 就可以了。」所以，「 $1+2+3+...+100$ 只要頭尾相加，再乘於項數的一半即可。如果是奇數項，就暫時先把最後一個數拿起來，算完總合再加上去就是了。」

我並不很認真的聽他說完這些「故事」，淡淡的說：「爸爸，天上有一個月亮，不管你知不知道，它本來就在那裡。有些人發現的早，有些人發現得晚，如此而已，您真是生不逢時，如果您生得早一些，您的理論就成爲了我們這些後代研究的定理了...。」

接著，我已經忘了這件事情，就在第二年的過年，爸爸的朋友來訪，大家聚在一起聊天，爸爸又談起這件事情，然後說：「我好難過，我花了這麼多的心血才想出來的規則，竟然被裕意淡淡的說『那有什麼...』。」站在一旁的我突然發現，我好殘忍，我竟然以「冷淡的言語」去面對父親「發現新大陸的雀躍」，以「驕傲的知識」活生生的抹滅了一粒喜愛數學種籽的萌芽。我告訴我自己，以後我要以同理心去分享父親的喜悅。

如今，也希望我能帶領學生去體驗那種發現數學之美，給予空間讓孩子體驗思考數學的喜悅，而不是急著教孩子算出標準答案。

