

# HPM 通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）  
 主編：蘇惠玉（西松高中） 助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）  
 編輯小組：蘇意雯（成功高中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）  
 蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新竹高中）  
 謝佳叡（台灣師大數學系） 林倉億（台師大數學系研究生）  
 陳鳳珠（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）  
 葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）

創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊  
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- ▣ John Fauvel 紀念專輯（上）
- ▣ 英年早逝事業長存：紀念英國數學史家與數學教育家 John Grant Fauvel
- ▣ 從 John Fauvel 教授之觀點看歷史多元文化論
- ▣ 試評析 John Fauvel “Revisiting the History of Logarithms” 一文
- ▣ 誰是牛頓 - 拉福生？
- ▣ 『數學教師專業發展』課程介紹：『數學史與數學教學』

## John Fauvel 紀念專輯（上）

台師大數學系 洪萬生教授

驚聞 John Fauvel 英年謝世，我們強忍著不捨的心情，規劃此一紀念專輯。經過我與編輯群商量的結果，我們決定大家分工，針對 Fauvel 在 HPM 方面的論述，各自撰寫一點研讀心得。在一方面，我們當然希望藉此對 HPM 的這一位使者表達最真誠深刻的懷念，在另一方面，我們也期待比較全面地貼近他的一生耕耘，看看如何可以延續他的寶貴資產。

在本期中，我們先刊出其中四篇，至於其他五篇，則留待本刊下一期再陸續刊完。在規劃專輯同時，遠在紐約的徐義保也捎信來，表示他也打算撰寫一篇追念文字。於是，在本期中，我們可以讀到他與 Fauvel 的第一次、但也是最後一次的會面經過，而且，更難得的是，他也為我們整理了 Fauvel 的出版目錄，讓我們有機會觀照 Fauvel 一生的學術成績。

John Fauvel 年輕時曾經徹底地反叛體制，後來選擇回到體制內奮鬥。他讓大家看到的，是受過嚴格訓練後的睿智與練達，然而，年少的熱情執著與理想氣質依稀可辨！回想去年八月他前來參加『HPM 台北 2000』之前，曾在電子郵件中表示他可能無法出席，我緊急告知 Jan van Maanen，請他一併敦促 John 務必如期前來。沒想到他當時隱瞞了病情，為此，Jan 與我都深感內疚不已。無論如何，我們永遠珍惜與他難得相會的緣分。



右圖中，手拿麥克風者為 Fauvel 先生

## 英年早逝事業長存：

### 紀念英國數學史家與數學教育家 John Grant Fauvel

美國紐約市立大學研究生院與大學中心歷史系數學史博士候選人 徐義保

五月十三日，星期日，筆者晚飯後照常上網流覽新聞，查看電子信箱。一通來自英國邏輯與邏輯史學家 Ivor Grattan-Guinness 的郵件說『John Fauvel 昨天去世。』我簡直不相信精力充沛、正值盛年的 John 真的離我們而去了。Grattan-Guinness 教授次日的電子郵件消除了我的疑問，並提供了更具體的信息：『John Fauvel 於五月十二日，星期六下午六時二十分因肝與腎功能衰竭，病逝於他好友的家中。』John 真的走了。

John Fauvel 這個名字我大概四年前在哥倫比亞大學科學圖書館看書時才初次注意到。至今仍記得當時拜讀他論述『對數史』論文時的情景。<sup>1</sup>我第一次，沒想到竟是最後一次，見到 John 本人是在美國數學會（AMS）與美國數學聯合會（MAA）去年二月在華盛頓共同舉辦的年會上。John 作了一個題為〈卡約里與歷史的應用（Florian Cajori and the Practice of History）〉的報告。主要內容是他在卡約里生前工作過的卡羅拉多大學（Colorado College at Colorado Springs）作訪問教授時研究的結果。John 在報告中主要討論了著名數學史家卡約里研究、寫作數學史與進行數學教學的關係。在會議期間，筆者與 John 攀談過數次，其中有一次，詢問他在伯克萊加州大學班考夫圖書館（The Bancroft Library of the University of California at Berkeley）卡約里的檔案里有沒有中國數學史家李儼或別的中國學者與卡約里的通信。John 告訴我他沒有看到這些通信，並說卡約里的檔案里很少有私人的材料，絕大部分是卡約里準備他多部著名的數學史著作的資料。閒談中，他還關心地問及我的學位論文題目以及今後打算，並告訴我他的主要興趣在怎樣把數學史應用到數學教學中去。

自華盛頓會議後，我對 John 的瞭解逐漸增多。知道他曾擔任『英國數學史學會』主席（1991-1994）；『數學史與數學教學關係（即 HPM）國際研究小組』主席（1992-1996）；『國際數學史委員會執行委員會』委員（1994-1998）等其它學術職務。還知道他在擔任『英國數學史學會』主席期間，為保全十九世紀末著名數學家 James Joseph Sylvester 的墓免于毀壞，以及為阻止 The University of Keele 把蘇格蘭教育工作者 Charles W. Turner 一生收集 — 一千四百余冊具有歷史價值的數學及其它科學著作 — 出售給古舊書商，做了大量的工作。但知道更多的，還是 John 在 HPM 方面的工作，以及他在全世界不遺余力地推廣 HPM 所作的努力與取得的成就。

HPM 的歷史至少可以追溯到十九世紀末，當時美國數學教育家史密斯（David Eugene Smith），以及上文提及的卡約里已開始探討數學史與數學教育之間的關係。他們正是為了尋求一種新的數學教育手段而從事數學史研究的，之後又將數學史研究成果應用于教學。史密斯在他著名的二卷本《數學史》的前言中寫道：『本書寫作的目的是為給教師和學生提供一本有用的有關初等數學史 — 即到簡單微積分的歷史 — 的教材。這一課題對數學教師的培養以及對高中生、大學生施行文理並重的教育的重要性已經開始被認識到。』<sup>2</sup>一九零五年，史密斯建議成立國際數學教育委員會（The International Commission on Mathematical Instruction，簡稱 ICMI）。這一建議於一九零八年在羅馬召開的國際數學家大會上通過。ICMI 成立後對促進數學史與數學教育的結合作出了一定的貢獻。但由於二次世界大戰及其它因素的干擾，HPM 在相當長的時間內沒有得到應有的發展。

二十世紀七十年代美國與歐洲一些從事數學教育與數學史研究的學者重新燃起了對 HPM 的興趣。一九七六年在 ICMI 內正式成立了 HPM 工作小組。此後，HPM 有了穩步的發展。HPM 真正的大發展是在過去的十年，這在很大程度上應歸功於 John。

在擔任『HPM 國際研究群』主席期間，John 組織了多次 HPM 國際會議，討論在不同背景下，如何使數學教師利用數學史工作者整理的歷史材料；數學課程的設計與歷史資料的關係等等。會議報告的論文均由他與其他合作者編輯出版。這些文集的出版不僅為 HPM 的發展提供了指導，並且為它的進一步發展提供了理論基礎。為適應 HPM 的需要，John 寫了大量的文章，並編輯一本數學史原始文獻選讀（見後附 John Fauvel 論著目錄）。

John 一九四七年七月二十一日出生於英國蘇格蘭的 Glasgow，一九七零年畢業於 The University of Essex，獲數學學士學位；同年入 The University of Warwick 繼續深造，次年獲碩士學位，一九七五年博士學位。畢業後，John 服務於英國 The Open University at Milton Keynes，直至去世，歷任教員（Assistant Staff Tutor and Acting Staff Tutor, 1975-1979）、講師（Lecturer, 1979-1992）、高級講師（Senior Lecturer, 1992-2001）。<sup>3</sup>

John 英年早逝，不能為 HPM 作出更多的貢獻。但我們相信他幫助發展的 HPM 定會在全世界枝繁葉茂，碩果累累。

#### 注釋：

<sup>1</sup> John Fauvel 論著目錄，論文 16.

<sup>2</sup> Smith, David E. *History of Mathematics* 2 vols. New York: Ginn and Company, 1923-24. Quoted in Dover 1958

Edition, p.iii.

<sup>3</sup> *Who's Who in the World* 12<sup>th</sup> edition, edited by Marquis Who's Who, 1999.

## 附錄

### John Fauvel 論著目錄

#### 編著

1. *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 2000 (edit with Raymond Flood and Robin Wilson).
2. ***History in Mathematics Education: the ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer, 2000 (edit with Jan van Maanen).**
3. ***Learn from the Masters!*. Providence, Rhode Island: Mathematical Association of America, 1995 (edit with Frank Swetz et al.).**
4. *Möbius and His Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-century Germany*. Oxford: Oxford University Press, 1993 (edit with Raymond Flood and Robin Wilson. The book was translated into German, 1994 and Japanese 1995).
5. A special issue on history in mathematics education for the *For the Learning of Mathematics* 11, no.2 (1991) (edit).
6. *History in the Mathematics Classroom: the IREM Papers*. Leicester: The Mathematical Association, 1990 (edit).
7. *Mathematics Through History: A Resource Guide*. York: QED Books, 1990 (edit).
8. *Let Newton Be! : A New Perspective on His Life and Works*. Oxford: Oxford University Press, 1988

(edit with Raymond Flood, Michael Shortland and Robin Wilson, paperback edition 1989).

9. *The History of Mathematics: a Reader*. New York: Macmillan, 1987 (edit with Jeremy Gray).
10. *Conceptions of Inquiry*. London: Methuen, 1981 (author with Stuart Brown and Ruth Finnegan).
11. *Darwin to Einstein: Historical Studies on Science and Belief*. New York: Longmans, 1980 (edit with Colin Chant).

## 論文

1. "Multiculturalism in History: Voices in 19<sup>th</sup> Century Mathematics Education in East and West," in the *Proceedings of the HPM 2000 Conference History in Mathematics Education Challenges for a New Millennium: A Satellite Meeting of ICME-9*, August 9-14, 2000, Taipei, eds. by Wann-Sheng Horng and Fou-Lai Lin, vol. II, pp. 113-118.
2. "History as a resource for the Mathematics Teacher," *International Schools Journal* 20 (2000): 51-60.
3. "800 Years of Mathematical Traditions," in John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson (eds), *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 2000, 1-27.
4. "Renaissance Oxford," in John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson (eds), *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 2000, 40-61 (with Robert Goulding).
5. "Georgian Oxford," in John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson (eds), *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*, Oxford: Oxford University Press, 2000, 150-167.
6. "James Joseph Sylvester," in John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson (eds), *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 2000, 218-239.
7. "John Wallis," in John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson (eds), *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*. Oxford: Oxford University Press, 2000, 96-115 (with Raymond Flood).
8. "Newton's Mathematical Language," in R. H. Dalitz and M. Nauenberg (eds), *Foundations of Newtonian Scholarship*, World Scientific Publishing, 2000, 145-159.
9. "The Role of History Of Mathematics Within a University Mathematics Curriculum for the 21st Century," *Teaching and Learning Undergraduate Mathematics* 12 (2000): 7-11.
10. "Mathematics Education," in *The History of Mathematics from Antiquity to the Present: a Selective Annotated Bibliography*, ed. Joseph W. Dauben, revised version on CD-ROM, ed. Albert C. Lewis. Providence, Rhode Island: The American Mathematical Society 2000, 642-653.
11. "Algorithms in the Pre-calculus Classroom: Who Was Newton-Raphson?" *Mathematics in School* 27, no. 4 (1998): 45-47.
12. "The Role of History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study 1997-2000," *Bulletin of the International Commission on Mathematics Instruction* 42 (1997), 9-16; and also in the *Newsletter of the British Society for history of mathematics* 33 (1997), 46-53 (with Jan van Maanen).
13. "James Joseph Sylvester: Poet," *De Morgan Association Newsletter* 5 (1997): 5-7.

14. "Empowerment through Modelling: the Abolition of the Alave Trade", in R. Calinger (ed), *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Washington: MAA 1996, 125-130.
15. "J. J. Sylvester and the Papers of 'Old Father Harriot,'" *The Harrioteer* (Sept 1996): 2-5.
16. "Revisiting the History of Logarithms," in Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, B. Johansson and Victor Katz, (eds), *Learn from the Masters!* Washington: MAA 1995, 39-48.
17. "The Mathematicians," in *Lit & Phil Bicentenary Lectures 1993*. Newcastle upon Tyne: Literary and Philosophical Society, 1994, 163-179.
18. "The Lull before the Storm: Combinatorics and Religion in the Renaissance," *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications* 11 (1994): 49-58 (with Robin J. Wilson).
19. "Women and Mathematics" and "Mathematics and Poetry," both in Ivor Grattan-Guinness (ed), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. New York: Routledge 1994, 1526-1532 and 1644-1649.
20. "A Saxon Mathematician," in John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson (eds), *Möbius and His Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany*, Oxford: Oxford University Press, 1993, 1-19.
21. "Newton and Mathematical Language," *Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales* 8 (1992): 95-104.
22. "Tone and the Teacher: Instruction and Complicity in Mathematics Textbooks," D. Pimm and E. Love (ed), *The Teaching and Learning of School Mathematics*, Hodder & Stoughton, 1991, 111-121.
23. "Using History in Mathematics Education," *For the Learning of Mathematics* 11, no.2 (1991): 3-6.
24. "African Slave and Calculating Prodigy: Bicentenary of the Death of Thomas Fuller," *Historia Mathematica* 17 (1990): 141-151 (with Paulus Gerdes).
25. "Platonic Rhetoric in Distance Learning: How Robert Record Taught the Home Learner," *For the Learning of Mathematics* 9, no.1 (1989): 2-6.
26. "Cartesian and Euclidean Rhetoric," *For the Learning of Mathematics* 8, no. 1 (1988): 25-29.



## 從 John Fauvel 教授之觀點看歷史多元文化論

台師大數學研究所博士班研究生 蘇意雯

### 一、摘要

本篇文章是 John Fauvel 教授於去年在台北舉辦的「數學千禧年—HPM 2000」研討會中所宣讀。其主要內容是探討 19 世紀東西方之數學教育，文中之「東方」專指印度而言。長久以來，西方教師都習於數學史就是以歐洲為中心的認知。但在最近幾年，諸如 George Joseph 《孔雀的尾巴》(*The Crest of the Peacock*) 等著作的發行，加上學校課堂中有越來越多的學童來自世界不同角落，各有不同的文化背景，使得歐洲的數學教師逐漸體認到，在數學發展上必須擁有全球性的觀點。

作者在陳述完此現象後，筆鋒一轉，提到如同一些東方人歡迎歐洲對他們國家輸入數學、科技等發展，過去也有一些歐洲的人士深深尊敬東方對數學的貢獻，也盡其所能促進對東方思想的了解。回想此類努力過程，現在正是數學教師尋找方法，讓學生有全面性文化觀點的時候。這也是作者寫作本篇文章的動機。

本文場景是在 1784 年印度的殖民地時期，威廉瓊斯爵士 (William Jones, 1675-1749) 創立了孟加拉亞洲學會，當時他初到印度擔任加爾各答的高等法院法官。之後的十年，瓊斯開啓了多樣的梵文研究。爲了更了解印度傳統，瓊斯焚膏繼晷，以致積勞成疾，最後不幸於 47 歲英年早逝。但是梵文的研究由一位年輕的同仁 Henry Thomas Colebrooke (1765-1837) 負起了薪火的傳承，他在 1817 年用英文翻譯出版了中世紀印度的四本偉大數學文本：婆羅門笈多 (Brahmagupta) 的 *Ganita* 和《粉碎法》(*Cuttaca*)，以及婆什伽羅 (Bhaskara) 的《美》(*Lilavati*) 和《根之探究》(*Bija-ganita*)。這些印刷翻譯本不僅對西方讀者，也對更廣大的印度自身，揭露了印度數學遺產的豐富、多產。特別是婆什伽羅的《根之探究》，顯示了印度代數傳統的威力。例如，Colebrooke 就認爲阿爾花拉子米之所以能發展出他的代數，主要的來源應是印度。因此，歐洲代數這棟宏偉之建築結構，理當肇基於印度的傳統。

當印度人認知到其古代數學遺產的同時，經由 Colebrooke 的工作，在印度的統治圈和學界有一個更大的政治性爭議正在開展。到底印度應該使用何種語言呢？是支持各地的方言，還是重新復興梵語，或者統一使用英語？何者對印度最爲有利？經過長久和激烈的論辯之後，在 1833 年，英文成了印度的官方語言。

接下來的篇幅，作者將討論在此情況下，印度的知識份子，如何發揚母語教學。此時登場的人物是 Yesudas Ramchundra (1821-1880)，他是德里學院 (Delhi College) 的教師。雖然醉心於西方的科學和數學，但他堅信只有使用本國的語言來教學，印度人才能真正吸收外來知識以爲己用。Ramchundra 相當努力用烏都語翻譯西方的科學書籍，並在期刊上以烏都語寫作介紹西方科技的科普讀物。(按烏都語是印度斯坦語的一種，爲巴基斯坦官方及印度回教徒所使用的語言)

弔詭的是，Ramchundra 卻用英文寫了兩本發揚印度數學傳統的著作。第一本是 *A treatise on problems of maxima and minima, solved by algebra* (加爾各答，1850)，描述現在習於用微積分來處理的題目可由婆什伽羅的《根之探究》所形成的傳統印度代數來處理。顯然本書並沒有完全被印度所接受，因爲用英文寫作，對那些隨著 Ramchundra 一起致力於推動母語教學的同伴真是情何以堪。再來是本書的風格與同時代的數學文本大同小異，都是重於解題卻乏於說明讓讀者能有所共鳴。而且在政治的環境中，復興印度數學的計劃也不爲當局所喜，

因為 Ramchundra 所工作的德里，是 1857 年「印度暴動」的核心地帶，於是他的研究工作也受了影響。雖然在 1863 年，他又用英文寫了另一本著作：*A specimen of a new method of the differential calculus called the method of constant ratio*（加爾各答，1863），但西方數學的印度化仍是一個未實現的夢想。

與印度相較，英國方面對 Ramchundra 的研究更感興趣。加爾各答教育委員會會長寄了一份影本，給傑出的英國數學教育家笛摩根（Augustus De Morgan）。笛摩根看了大受感動，也促成 1859 年在英國出版此書，並撰寫了一篇長序，其內容比 Ramchundra 在加爾各答版所闡述此計畫的理念和目的更為詳盡。笛摩根的興趣來自下述幾個理由：他自己於印度出生，對這個國家有份深刻的認同。再來他是當代最有歷史敏感度的英國數學家，也清楚了解 Ramchundra 的意圖，加上他本身又致力於發展代數學，所以，雖然這本書對印度教學並沒有真正達到作者所期望的貢獻，卻在英國開展出新的歷史扉頁。

Ramchundra 的書和計畫，吸引了英國人對印度思想和事務的興趣與注意，尤其是笛摩根的序言，更激起了相當程度的火花。在文末，John Fauvel 教授指出此現象，他描述了 19 世紀末，本書在印度及教學的雙重脈絡下，一位數學教育家如何看待此書。

「告訴印度人研讀笛摩根為 Ramchundra 所寫的序言，告訴他們那就是 Everest 山（譯按：為印度之名山）的聲音，正召喚印度覺醒和行動，以及復興過去的寶藏。」這是 George Boole 的遺孀 Mary Everest Boole 在其《印度思想及西方科學》（*Indian thought and Western science*）書中的一段話。她孀居的大部分時間都用於提醒人們 George Boole 的偉大著作不是一本技術的、機械的論文，而是一份有關思想律則的研究。Mary Everest Boole 視數學為建造文明之基礎，因此數學教師所負之任務就是其中最神聖的委託之一。她對印度人和印度思想深度的同情，使得她盡可能地理想化對它的了解，也盡可能地推廣 Ramchundra 的計畫甚至超越 Ramchundra 自身之所期望。

以上所描述的這些歷史事件所呈現的就是：過去重要的文化資產與今日現行知識間的相互交流。此處所強調的是我們可以明確地使用歷史去定位現在的活動，讓人們了解活動的背後正有著悠遠的文化傳承。例如，現在英國的小學和中學，就有一些教師利用稱為“吠陀法”的計算方法，讓學生參與古人計算的技術，這種學習的過程，可以體會到重新發現古代智慧的感受，相當值得鼓勵和提倡。

## 二、後記

猶記得去年暑假研討會時 John Fauvel 教授的颯爽英姿，沒想到今年五月就聽聞噩耗。「哲人日已遠，典型在夙昔」，Fauvel 老師儒雅博學的風範和對 HPM 的關懷，將永遠是我們這些後學未進所要學習的目標。

## 三、參考文獻

Fauvel, John (2000), "Multiculturalism in history: voices in 19<sup>th</sup> century mathematics education east and west", in Horng, Wann-Sheng and Fou-Lai Lin eds., *Proceeding of the HPM 2000 Conference* (Taipei: National Taiwan Normal University), pp.113-118.

Kline, Morris (1983), 《數學史 - 數學思想的發展》（上冊）（林炎全、洪萬生、楊康景松 譯），台北：九章出版社。

## 試評析 John Fauvel “Revisiting the History of Logarithms”一文

國立新店高中 蘇俊鴻老師

### 前言

本文要介紹的是 John Fauvel 的文章“Revisiting the History of Logarithms”，收錄在由 Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson, Victor Katz 所主編的《向大師學習》(Learn from the Masters!)，由標題不難看出這是篇與對數的發展歷史有關的文章。文章一開頭，John Fauvel 說明此篇文章寫作的動機：

我曾經向一位非數學出身的朋友談到我正在思考如何教「對數」，他的回答是“事實上沒有人再需要學習這個主題，現在我們已經有計算器和電腦。”“不，它仍然是非常重要。”我堅定地說，…

文中也反映「對數」這個主題在現今教學上所遭遇的困境，進而點出數學史在這個主題上可以著力的地方：

今天更進一步的困難是沒有計算器(calculator)或是電腦(computer)所無法處理的大數字，……從表面看來，對數發展時的那種最初的刺激已經從每個人的經驗中消失，教學上也難以再呈現。這可能導致教師在對數的教學上，切斷所有歷史性發展的定義，直接採用十八世紀數學家尤拉的定義，就是現在教科書上常見的定義：『給定一個正數當作底數，則一個數的對數，就是這個底數的次方與這個數相等時的指數/指標 (index)。』

(按：以現在的數學符號表示，就是  $b = a^c$ ，則  $\log_a b = c$ ) 但這樣的定義是無法帶給學生任何的啟蒙，利用這種定義方式解決上述的難題，卻至少造成兩種內在洞察的喪失：

(1) 藉由級數的探索，更深一層地了解究竟對數是怎麼一回事；(2) 學習對數如何由實用性的 (practical) 工具奇妙地轉變成理論性 (theoretical) 的工具

展讀至此，各位讀者想必也心有戚戚焉，在實際的教學上，現行教材中「對數」的定義就是採行前述尤拉的定義，對學生而言，除了留下『對數曾是在計算器或電腦未發明前，天文學家或是數學家所用來處理大數字運算的有用工具』的印象外，卻難以了解它是如何計算<sup>1</sup>，以及它是如何產生。換言之，我們很難說服學生為何必須學會這些早就被輔助的計算工具所取代的計算技巧。John Fauvel 的文章試圖告訴我們，數學史在這個困境中可能的幫助。現在就讓我們一起來看看。<sup>2</sup>

### 內容簡介

文章共分成幾個小節來討論，目次如下：(1) 巴比倫式的對數？(Babylonian Logarithms?)；(2) 算術級數與幾何級數的進一步比較 (Further Comparisons of Arithmetic and Geometric Progressions)；(3) 插曲：為何要掌握大數字？(Interlude: Why Handle Big Numbers?)；(4) 掌握天文學的/龐大的數字 (Handling Astronomical Number)；(5) 幾何上的運動學 (Motion in Geometry)；(6) 納皮爾的對數 (Napier's Logarithms)；(7) 從實用性的工具到理論性工具 (From Practical to Theoretical Tool)；(8) 符號的角色 (The Role of Symbols)；(9) 結論。由各小節主題的包羅萬象，不難看出作者本身的學識涵養相當豐富紮實；再從小節安排的順序，也能看出作者對於對數的歷史發展脈絡整理。讓人發覺在對數的討論上，我們可以切入的角度與面向，遠比我們所想像的多。接著來看看各個小節的內容吧！

首先登場的是一塊大約西元前 1800 年的巴比倫的古老泥板，它被發現上面具有「對

數」意涵的『數對』，如

15	2
30	4
45	8
1	16

(附注：由於巴比倫人是採用六十進位制，因此最後一行“1”應該是60。)

這些『數對』的目的何在？現在我們仍然無法知道確實的答案。根據對這個泥板解譯的學者Neugebauer和Sachs的猜測，可能與利息有關的財務計算（而且利率非常地高）。因此，有些教師就將這塊泥板的內容當成一個課堂討論的主題，並且讓學生與對數的概念作一番比較。John Fauvel 卻認為在這個史料可以提供給學生觀察的，反倒是某些特殊情形的『數目類型』(number pattern) 之例子，如果遽而認為巴比倫人已經具備有對數的理論或概念，則未免過於輕率。<sup>3</sup>眾所周知，納皮爾的對數運算的關鍵想法，是將算術級數（即等差級數）與幾何級數（即等比級數）的項一一作配對，從而將乘除運算『轉換成』加減運算。John Fauvel 接下來則告訴我們這個想法，阿基米德其實早在《沙之計算》(The Sand-Reckoner)一書中，已經提出一般性的敘述。但將這個想法用具體數字寫下的，則是文藝復興時期的法國數學家 Nicholas Chuquet (d. 1487)。在 1484 年，Chuquet 將巴比倫人的級數成果延拓，將 2 的次方由  $2^0 = 1$  寫到  $2^{20} = 1048576$ ，並且觀察出任兩個 2 的次方相乘的結果，會等於將指數相加所對應的數。<sup>4</sup>Fauvel在此處說明這個史料的啟發重點：兩個平行的級數之間運算關係的發現。我們改成以其他正整數為底數的例子仍然會成立，教師可以依照實際的需要來改寫。<sup>5</sup>

其實在十六世紀末期，人們最有效處理大數字乘法的方法，仍是借助三角學的幫忙，使用一種叫做prosthaphaeresis的技巧。這個技巧是將問題先轉換成三角函數的加減問題，利用和差化積與積化和差的關係來處理。Fauvel認為對於這個技巧處理過程的探索，能夠增進學生對三角函數如sin, cos, tangent, secant等更深刻的認識。而且這個技巧提供「如何利用加法來處理乘法」一個很好的示範，可以當成介紹對數主題的序曲。接著，就是納皮爾的對數理論的建立。1614 年，納皮爾將他花二十年計算出的對數表發表在《對數的奇妙準則》，至於理論的部份，則是 1619 年在他死後才發表。Fauvel認為納皮爾受到三種概念的影響 (1)算術級數與幾何級數的比較；(2) 將乘法看成加法；(3) 運動學的幾何性質。<sup>6</sup>雖然對於納皮爾如何利用計算對數的過程有助我們的了解，但Fauvel並不贊成教師把太多心力，放在論述太多有關納皮爾如何利用建構出對數表的過程（這樣會令學生恐懼不已！）。他希望將重點擺在納皮爾如何決定他的對數定義（與後來尤拉的定義並不相同），如何受到上述三個因素的影響。

對數的概念與定義在納皮爾的提出後，由於有效滿足計算上的需求，因此大受歡迎。連帶地，對數性質的進一步研究與推廣，就成為重要的研究主題了。Fauvel便認為對數提供我們一個絕佳的範例，說明數學名詞的概念是可以發生根本上的變化，甚至後來的定義更為人們所接受。1650 年代，曲線圖形底下的面積有對數的性質的這件事就被已被澄清，牛頓 (1642-1727) 便將這個研究結果寫在《Waste Book》(1664-65)。如果我們將A(p)當成雙曲線

$y = \frac{1}{x}$  與x軸所夾的面積（由x=1 到x=p），則 $A(pq) = A(p) + A(q)$ 。<sup>7</sup>接著麥卡多 (Nicolaus

Mercator, 1620-1687) 的對數研究，1668 年他找到著名的對數級數

$\log(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$ 。<sup>8</sup>因此，對數有三個本質上可互相交換的定義可以

使用：(1) 在納皮爾的方法中，對數可以看成是人造的數字(an artificial number)；<sup>9</sup>(2) 可以看成雙曲線底下的面積；(3) 可以看成是無窮級數。至此，對數在現代數學中決定性的概念大致發展完成。接下就等尤拉 (Leonhard Euler, 1707-1783) 對它的表示法作進一步的改良，1770 年左右，尤拉在他最暢銷的代數教科書《代數的完整介紹》(Complete Introduction to Algebra) 就寫下現今所流傳的定義形式。在對數的歷史發展中，指數形式的納入，使學生更能全面性了解對數，這也告訴我們一個好的表示法 (notation)，是有助於人們進行思考的。

在最後的結論中，Fauvel 指出：對數的發展，一直延續到十八世紀與微積分掛鉤，我們能發揮的空間還有許多，可以因應學生的階層設計適合的題材。對數的歷史發展，所提供給我們的啓示是：在教學上，我們可以嘗試針對不同的學生，提供不同等價形式的對數定義，讓學生了解對數的概念。

### 結論

在這篇文章中，讓我們知道對數的發展脈絡，以及它與數學其他領域的連結。唯一美中不足的是，限於篇幅的緣故，在文中多為概略性的敘述，本文只能當成一個對數發展的導覽指引，若要對內容更進一步了解，必須要再參考其他相關書籍。筆者導讀此篇文章的心得，在於：它讓我們看見一位博識的數學家，為我們示範如何將數學史料應用在教學上，應該擁有的態度與思量。對 John Fauvel 來說，數學史在教學上最大的貢獻在於，它提供教學者對數學主題多元性的思考的範例。至於史料的價值，則首重它在教學上所展現的意義，接著才去考慮教學上我們如何運用。此外，他也告訴我們：教師不應原封不動地將史料呈現出來，不妨適當地剪裁，以能讓學生在過程得到啟發並且產生興趣才是。

### 參考文獻

Swetz, Frank, and Fauvel, John, and Bekken, Otto, and Johansson, Bengt, and Katz, Victor (eds.)

(1995), *Learn from the Masters*. The Mathematical Association of America .

Katz, Victor (1995), "Napier's Logarithms Adapted for Today's Classroom", *Learn from the Masters*.

Katz, Victor (1993), *A History of Mathematics*. HarperCollins College Publishers.

Edward. C. H. 著，水木耳譯(1986)，《微積分的發展歷史》，凡異出版社。

Felix Klein 著，舒湘芹，陳義章、楊欽樑等譯(1996)，《高觀點下的初等數學》第一卷，九章出版社。

Maor, Eli 著，鄭惟厚譯(2000)，《毛起來說 e》，天下遠見出版股份有限公司。[10]

### 附註：

1. 如何用對數來計算，有興趣的讀者不妨參閱《毛起來說 e》，24-29 頁，書中舉了個利用對

數計算  $\sqrt[3]{\frac{493.8 \times 23.67^2}{5.104}}$  的例子。

2. 對數學習的困難，Felix Klein 在他的《高觀點下的初等數學》第一卷(九章出版社有中譯本，146 頁~159 頁)也曾討論過，他覺得現行中學的對數理論與大學的對數理論的講述形式差距過大，主要的原因自十九世紀開始，學校的數學教學與數學進展脫節。中學的對數講述便捷地採用尤拉的定義，忽略了對數理論的發展過程中與級數、複變數函數論、微積分等數學知識的牽連。他非常鼓勵由雙曲線下面積的探討中導出對數，他認為會更加簡單

與清晰。當然他的說法有其時空背景的因素，但仍然可以當成一個參考意見。

3. Maor 也是持相同的看法，見《毛起來說 e》，31-32 頁。
4. 對於 Nicholas Chuquet 有與趣的讀者，不妨參閱 Katz (1993), pp.320-322.
5. 此處 Fauvel 對於師資養成教育有著個人的期許，想進一步了解的讀者，請自行參閱。
6. 事實上，納皮爾的對數定義可以看成是兩個點沿著兩條不同的直線，各自做直線運動。請參閱 Katz (1993), pp.380-381.或是 Katz (1995).
7. 牛頓利用這個性質計算出一部份的整數的對數表。請參閱《微積分的發展歷史》，頁 179-182。
8. 牛頓也發現了對數級數，但由於牛頓個人的習慣使然，我們無法分辨究竟是誰最早發現。
9. 這個稱呼是納皮爾最早使用，後來才改成「對數」。

## 誰是牛頓-拉福生？

台師大數學研究所碩士班研究生 楊瓊茹

### 一、前言

所謂的牛頓-拉福生演算法 (Newton-Raphson Algorithm) 是指求解方程式  $f(x) = 0$  的根之疊代法，通常被稱為『牛頓方法』 (Newton's Method)。

首先，我們令  $s$  為  $f(x) = 0$  的根， $f(x)$  是在區間  $[a, b]$  二次可微的實值函數，它在  $x=s$  的泰勒展開式為：

$$0 = f(s) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c),$$

其中  $x_0$  落在區間  $[a, b]$ ， $c$  落在區間  $(a, b)$ 。若  $h$  很小，我們可以忽略  $\frac{h^2}{2} f''(c)$  這一項，則

$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 。若  $x_0$  很接近  $s$ ，則  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$  比  $x_0$  更接近  $s$ 。依此類推，最後我們可

以將此疊代算法公式化：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

此一等式即為求解  $f(x) = 0$  的『牛頓方法』。然而，這個現代化公式涉及了微分的觀念，是比較適合學習過微積分的學生操作演算。但就數學歷史經驗來看，此方法不是必要的。底下，我們將分別引述牛頓、海龍以及拉福生的解根方法。

### 二、文本內容

#### 1. 牛頓的方法

公元 1669 年夏天，牛頓 (Issac Newton, 1642-1727) 在劍橋寫下了如何求解方程式

$$x^3 - 2x - 5 = 0 :$$

假設  $x^3 - 2x - 5 = 0$  是可解的：並且令  $2$  小於所求的根，則取  $2 + p = x$  並且將它代入方程

式，結果產生新的方程式  $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ ，此根  $p$  為所尋求被加到商數的數：特別地（當  $p^3 + 6p^2$  在說明為很小而被忽略時） $10p - 1 = 0$  或  $p = 0.1$  是非常接近真正的值；因此，我在商數的地方寫下 0.1 並且假設  $0.1 + q = p$ ，將它代入  $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ ，如同之前，產生  $q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ 。而且因為  $11.23q + 0.0061 [=0]$  很接近實際的  $q$  或幾乎  $q = -0.0054$ ，我在商數的最下面寫下  $-0.0054$ 。同樣地，假設  $-0.0054 + r = q$ ，如同之前的方法代換，繼續運算到滿意為止。

## 2. 海龍的平方根方法

亞歷山大里的數學家海龍 (Heron, 第一世紀), 在他的幾何學著作《度量學》(Metrica) 中有個求平方根的簡單算法：

因為 720 無有理根，我們選取接近根的近似值。由於 27 的平方 729 最接近 720，將 27 除 720；得到  $26\frac{2}{3}$ ；加上 27；結果為  $53\frac{2}{3}$ 。取其一半；獲得  $26\frac{1}{2} + \frac{1}{3} (= 26\frac{5}{6})$ 。因此，720 的平方根將會很接近  $26\frac{5}{6}$ 。因為  $26\frac{5}{6}$  自乘得  $720\frac{1}{36}$ ；所以差為  $\frac{1}{36}$ 。如果我們希望差值小於

$\frac{1}{36}$ ，將  $720\frac{1}{36}$  取代 729，同樣的方法，我們將得到一個差值不超過  $\frac{1}{36}$  的近似值。

## 3. 拉福生的方法

拉福生 (Joseph Raphson, 1648-1715) 是倫敦皇家學會的會員，1690 年代早期，曾在劍橋與牛頓接觸過，並且是當時牛頓與萊布尼茲 (Leibniz, 1647-1716) 微積分優先權論戰的牛頓支持者。在 1690 年，他所著作的《通用方程分析》(Analysis Aequationum Universalis) 中，給出解方程式  $ba - a^3 = c$  的根  $a$  之方法：

假設  $g + z = a$ ，所以， $bg - g^3 + (b - 3g^2)z - 3gz^2 - z^3 = ba - a^3 = c$ ，

因此  $(b - 3g^2)z - 3gz^2 - z^3 = c + g^3 - bg$ ，

因此  $+z - \frac{3gz^2 + z^3}{b - 3g^2} = \frac{c + g^3 - bg}{b - 3g^2} = +x$ ，

由收斂定理，我們得到  $+z = +x + \frac{3gz^2 + z^3}{b - 3g^2}$ ，並且兩邊加上  $g$ ，產生

$g + z = a = g + x + \frac{3gz^2 + z^3}{b - 3g^2}$ 。但是這新的  $g = g + x$  比先前的  $g$  增加了  $x$ ，比  $a$  少了

$\frac{3gz^2 + z^3}{b - 3g^2}$ ，證明完畢。

## 三、結語

其實，牛頓和拉福生兩人的方法都沒有涉及微積分的概念。雖然拉福生所導出新的  $g$  值等於  $g + \frac{c + g^3 - bg}{b - 3g^2}$ ，和我們現代數學公式  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  是相容的，但拉福生本身並沒有洞察出這一點。

直到 1740 年，數學家辛普森 (Thomas Simpson, 1710-1761) 才指出用微積分表示的數學公式。對於教師而言，觀察牛頓和海龍這兩個方法的共同點，也是件很有趣的事。兩者都是經由特定的數值例子，教導一般化的方法，相較之下，許多現代教科書的方法則是採用現代抽象化的代數式。但是，對某些學生而言，必須經由舉例練習和嘗試應用到其他的算術例子。並且，或許他們對這些處理步驟有能力提出代數式的解釋之後，才能達

到比較深入的了解。

後記：本篇文章主要摘譯自 Fauvel, John (1998), “Algorithms in the Pre-calculus Classroom: Who was Newton- Raphson?”, *Mathematics in School* **27**, No. 4 : 45- 47.

### 參考資料

Fauvel, John (1998), “Algorithms in the Pre-calculus Classroom: Who was Newton- Raphson?”, *Mathematics in School* **27**, No. 4 : 45- 47.

Cajori, Florian (1911), “Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation”, *The American Mathematical Monthly* **18**: 29-32.



## 『數學教師專業發展』課程介紹：『數學史與數學教學』

台灣師大數學系 洪萬生教授

九十學年度第一學期，我將協同十四位中學數學教師（/研究生），在台北市文山社區大學（校址：台北市木柵國中）開授『數學史與數學教學』課程，其『綱要』及相關資料如下。非常歡迎中小學數學教師前來報名參加。此一課程內容，採自國科會特別研究計畫 NSC 89-2511-S-003-031- (88/08/01-90/07/31)，由筆者協同一群中學數學教師（包括上述這十四位教師）執行。現在特別利用社區大學開課機會，來推廣此一研究成果。有志之士，盍興乎來！

一．課程名稱：數學史與數學教學		學分數： <input type="checkbox"/> 1 學分 <input type="checkbox"/> 2 學分 <input checked="" type="checkbox"/> 3 學分		
		(6 週)            (12 週)            (18 週)		
二．授課教師：洪萬生協同十四位數學教師		三．現職：洪萬生為台灣師大數學系教授		
四．教師個人簡介： 洪萬生教授是國內唯一專業數學史家，在台灣師大數學系所開授「數學史」、「數學哲學」及「數學史與數學教學」等課程。每年發行《HPM 通訊》十期，推廣 HPM 研究成果。				
五．課程時間：每週三晚上 7:00 - 9:50				
六．課程理念介紹：(以淺顯易懂的介紹方式,讓學員瞭解教師理念與方向) 利用「學習工作單」的設計，以主題單元方式介紹數學史，並強調它與數學教學之關聯。又本課程可以納入數學教師專業成長課程之一，因此，將替數學教師申請進修學分認證。				

## 七. 課程大綱：(請盡量詳細說明,讓學員瞭解一學期的授課內容)

週數	主題	內容簡介
1.第一週 9/5/2001	課程介紹	洪萬生主持，並介紹所有合作任課的教師。
2.第二週 9/12/2001	數學與文化 — 阿拉伯的遺產問題	蘇意雯主持： 數學的社會文化面向，兼及 algebra 的語源
3.第三週: 9/19/2001	天元術 VS. 借根方	林倉億主持： 天元術與借根方如何在十八世紀中國脈絡中互動
4.第四週: 9/26/2001	希臘、阿拉伯與中國的代數方程之幾何解法	陳鳳珠主持： 數學方法論比較的歷史意義
5.第五週: 10/3/2001	三角函數的歷史	蘇惠玉主持： 歷史讓三角變鈍了嗎？
6.第六週: 10/17/2001	和角公式	董芳成主持： 三角函數值表如何編造？
7.第七週 10/24/2001	中國古代的測量	蘇俊鴻主持： 數學與實用
8.第八週 10/31/2001	圖說一體	陳啓文主持： 歷史中“proof without words”之意義
9.第九週 11/7/2001	『盈不足術』及其交流	黃清揚主持： 數學知識交流之意義（一）
10.第十週 11/14/2001	韓信點兵	楊瓊茹主持： 數學知識交流之意義（二）
11.第十一週 11/21/2001	尺規作圖	葉吉海主持： 希臘文化脈絡中的數學。
12.第十二週 11/28/2001	等比數列	王文珮主持： 如何利用『數學史』來引導教學
13.第十三週 12/5/2001	數學史中的多面體	彭君智主持： 追溯多面體的源頭
14.第十四週 12/12/2001	機率小史	陳敏皓主持： 向歷史『追討』機率問題如何形成的答案

15.第十五週 12/19/2001	餐旅數學與數學史	林裕意主持： 數學的美食主義
16.第十六週 12/26/2001	完結篇	洪萬生與合作開課者共同主持 驗收「學習工作單」
六． 課程進行方式與教學方法： 一小時講解、一小時討論、一小時實作活動。		
七． 成績評量標準：(社大評量方式通常以 <u>優等</u> / <u>通過</u> / <u>未通過</u> 來表示，標準則由教師自訂) 1.上課出席率與參與程度。 2.學習工作單或心得報告之品質。		
八． 推薦書目：(約 1 ~ 3 本，請說明其用途為教科書或參考書籍) 《HPM 通訊》、《孔子與數學》、《快樂學習正方形、圓形與三角形》(參考書籍)。		
九． 選課要求：(請註明清楚對學員選修該課程的優先或必要要求條件,以利教學的進行) 限中小學數學教師，再考慮有高中數學程度者。		
十． 預定招生人數：(一般人數為 40 人，因為預算的關係，請先預估最大人數規模) 40 人為限。		
十一． 收費：(請註明課堂教學所需添購教材／教具之費用) 每人每週 A4 影印紙 20 張		
十二． 是否開放旁聽： <input checked="" type="checkbox"/> 開放 備註： <input type="checkbox"/> 不開放 備註：		
十三． 教學設備：投影機		
十四． 教師願意開放給學員或其他教師的聯絡方式：(例如 e-mail 或電話....) <a href="mailto:horng@math.ntnu.edu.tw">horng@math.ntnu.edu.tw</a>		

附註：

蘇意雯：國立台灣師範大學數學系所博士班學生，並任教於北市成功高中。

林倉億：國立台灣師範大學數學系所碩士班學生。

陳鳳珠：國立台灣師範大學數學系所碩士班學生。

蘇惠玉：現任教於北市西松高中，國立台灣師範大學數學系所碩士班畢。

董芳成：現任教於北縣海山高中，國立台灣師範大學暑期數學教學碩士班學生。

蘇俊鴻：現任教於北縣新店高中，國立台灣師範大學數學系所碩士班畢。

陳啓文：現任教於北市成淵中學，國立台灣師範大學暑期數學教學碩士班學生。

黃清揚：國立台灣師範大學數學系所碩士班學生。

楊瓊茹：國立台灣師範大學數學系所碩士班學生。

葉吉海：國立台灣師範大學數學系所碩士班學生。

王文珮：現任教於桃園清溪國中，國立台灣師範大學暑期數學教學碩士班學生。

彭君智：現任教於北市景興國中，國立台灣師範大學暑期數學教學碩士班學生。

陳敏皓：現任教於宜蘭蘭陽女中，國立台灣師範大學暑期數學教學碩士班學生。

林裕意：現任教於北市開平中學，並擔任數學科召集人。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 [suhy@pchome.com.tw](mailto:suhy@pchome.com.tw)
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 [suhy@pchome.com.tw](mailto:suhy@pchome.com.tw)
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>