HPM通訊

第四卷 第五期 目錄(2001年5月)

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

參加一九九六年 HPM 研討會有感

台灣師大數學系　洪萬生教授

本文原發表於 1996 年 9 月 15 日《科技報導》。謹重刊於此，紀念英年早逝的 John Fauvel 教授 (1947-2001)。他是 HPM 國際學界的最佳使者，由於他的前瞻視野與大力支持，才有『HPM 2000 Taipei』的誕生。我們永遠懷念他！

HPM 是國際數學教育委員會 (ICMI, International Commission on Mathematics Instruction)下屬的一個研究群，它的原名叫「數學史與數學教學之關係研究群」(International Study Group on the Relationships of History and Pedagogy of Mathematics)，目的是在結合數學史與數學教學，以便提升數學教育的成效。除了經常舉行比較小型的區域研討會之外，HPM 還與 ICME (International Congress on Mathematics Education) 同步，每四年暑假舉辦一次國際性大型研討會。

一九九六年的 ICME-8（亦即第八屆 ICME）月前已經在西班牙 Sevilla 市舉行（七月十四日～七月二十一日），至於 HPM（作為 ICME 的 satellite meeting）則選在鄰近的葡萄牙舉行，時間是七月二十四日至七月三十日，地點則是葡國北部距離 Porto 海港五十多公里的山城 Braga。由於該城曾是古羅馬人統治的重地，至今仍保存 300 多座天主教堂，因此，素有『葡萄牙的羅馬』之稱。

會議特色

本次研討會是 HPM 與「歐洲區大學暑期數學史與數學教育研習班」(European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education) 合併舉行，其特色是有很多中小學數學教師與會。由於負責籌辦的地主是 Minho 大學數學系與葡萄牙數學教師學會(The Portuguese Association of Teachers of Mathematics, APM)，因此，該小學數學教師以及師範體系學校的數學系學生，尤其踴躍參加，令人印象深刻。

總計大會報名有來自 33 個國家和地區的 549 人，其中葡國就占了 311 人；此外，以葡語為官方語言的巴西也報名了 71 人。不過，歐美主要國家如法國（37）、美國（19）、英國（15）、荷蘭（12）、西班牙（11）、義大利（10）、加拿大（7）、瑞典（7）與德國（5）等，都有具代表性學者參加（括弧所示數目為參加人數）。事實上，如 Ubiratan D’Ambrosio、Evelyne

Barbin、Gert Schubring、Alejandro Garciadiego、Paulus Cerdes、Otto Bekken、John Fauvel、June Barrow-Green、Leo Rogers、Jan van Maanen、Charles Jones、Frank Swetz、Victor Katz 等，都是十分活躍的學者。

其中有多位還是 *Historia Mathematica* 編委會同仁，我們 1993 年在西班牙 Zaragoza 慶祝該學報創刊二十週年時已經見過面，此次再會格外親切。譬如說吧，任教於莫三鼻給 (Mozambique) 教育大學的 Paulus Gerdes，是非洲數學聯盟 (African Mathematical Union) 下屬數學史委員會 (Commission on the History of Mathematics in Africa) 主席，在民族數學 (ethno-mathematics) 的研究成績斐然，與巴西的 Ubiratan D’Ambrosio 同是第三世界的學界領袖，這次他特別帶來很多研究著作在會場展示。因爲筆者向他表示將在台灣開展民族數學研究，所以，承他贈送所展示的英文著作。

會議過程

大會各項會程的安排，共有大會演講 (Plenary Lecture)、通俗演講 (Introductory Lecture)、論文發表 (Papers)、工作坊 (Workshops)、小組專題討論 (Panels) 與特別會議 (Special Sessions) 多種，其中大會演講只邀請里斯本科學院的 F. R. Dias Agudo 演講 “Pedro Nunes and the lessons of an epoch”。Nunes（1502~1578）是葡萄牙十六世紀的重要數學家，曾任教 Coimbra 大學，並在 1532 年出版 *Libro de Algebra*。有異於同時代其他代數著作，Nunes 完全以抽象化的方式處理代數。演講者以 Nunes 的業績作爲歷史的教訓，藉以勉勵數學教育工作者應該努力的方向。

「通俗演講」除概述幾個文明的數學成就，介紹一些數學分支如三角、數論、機率、組合學、非歐幾何的歷史之外，也泛論了一些風雅的通識專題如數學與音樂、藝術乃至文化的關係。由於聽眾包括很多中小學教師，因此，演講者大都以導論的方式呈現。此次蕭文強（香港大學）應邀演講 ”Mathematics in Ancient China”，但因故無法出席，遂由他的弟子馮振業（香港教育學院）代打，表現出色。John Fauvel 與筆者極力慫恿他改行作數學史，看起來他是有一點心動。

至於筆者本人提交論文 ”Euclid versus Liu Hui : A pedagogical reflection”，則在「論文發表」這一項目中發表。在這一篇報告中，筆者以三個例子，分別是輾轉相除法、圓面積公式與錐體體積公式、對比歐幾理得和劉徽的不同但互補的進路，最後強調比較數學史可以在數學教學方面所帶來的啓發。由於拙文直接引述《幾何原本》與《九章算術》等典籍的第一手史料，一些與會學者遂跟筆者討論數學史在 HPM 中的份量或地位（status），筆者告訴他們說 HPM 可以算是數學史的應用；因此，只要對數學教育有任何幫助，數學史家應該都很歡迎教師分享他們的研究成果才是。事實上，牛頓是否被落地的蘋果打到？二十一歲的 Galois 是否在決鬥致死前夕完成不朽的論文？數學教師怎麼編造這些故事根本無傷大雅，要緊的是引起學生的學習動機或興趣。

論文舉隅

在「論文發表」這一項目中，還有多篇報告値得介紹，其中如 Amira Cooper 的 “Integration of the Historical Development of Mathematics in Mathematics Teaching in the High School Using Individual Reading”，就提出了很容易模仿的研究方法。再如下列論文：

1. Ian Algernon Issacs, “A Historical Approach to Developing the Cultural

Significance of Mathematics amongst First Year Pre-service Primary School teachers";

2. Greisy Winickiu Landman, "Regula Falsi: Some Reflections of Elementary School Teachers";
3. Indira Chacko, "Traditional Counting Systems and Its Places in the Papua New Guinean Culture";
4. Iran Abreu Mendes, "Conceptions and Attitudes of Mathematics Teachers towards the History of Mathematics as a Pedagogical Device";
5. Luis Radford. "Quadratic Equations: Re-inventing the Formula. a teaching sequence based on the historical development of algebra";
6. Abdulcarimo Ismael, "Traditional Games and the Concept of Probability: Implications for teaching";
7. George Charles Krajesik, "Observations about Teaching Mathematical Definitions and Concepts to Nonnative Speakers of English in Papua New Guinca";
8. Giuliano Testa. "Conies, a teaching experience";
9. Coralie Daniel. "Teachers' Responses to Students Who Discover Mathematics for Themselves".

等等也都是十分有趣的研究心得。不過，在「工作坊」這一項中有很多研究成果直接與 HPM 有關，所以，時間衝突時往往只有割捨前者。

就「工作坊」這一項中，筆者主要參加 Franco Favilli, Jama Musse Jama 的 "Teaching Mathematics in Somalia" 與 M. G. Koen M. Pillot 的 "How to Integrate the History of Mathematics in the Education of Teachers: Some examples"，前著介紹了索馬里亞的數學課程內容及其產生的文化衝擊，後者則呈現了荷蘭 Katholieke Leergangen 訓練中學數學教師課程中的數學史教學實施情況。

此外，在即將結束之前，筆者也參加了 Jan van Maanen 所主持的「特別會議」: "How can we be sure that HPM works? Studying the effectiveness of history as a tool to teach mathematics"，這一議題對 HPM 的發展極爲緊要。因爲不如此，則國際學界的資源很難進一步整合或協調，同時教育主管部門也較容易輕忽 HPM 研究的意義。可惜，一個小時聽下來，筆者發現所謂的「實證研究」(empirical study) 並不很多，儘管數學史對數學教學的幫助的確是有目共睹。不過，要求 HPM 的研究者提出比較有效或時髦的「證據」，則是呼聲愈來愈高。四年後的 HPM 研討或可望有更豐碩的成果出現。

與會心得

對筆者而言，HPM 研討會是第一次參加。儘管多年來在台灣師大數學系教授「數學史」時，總是強調它與數學教育的關聯，然而，教學負擔與數學史專業研究占去太多時間，無暇分心關懷 HPM 課題。筆者 1994 年 7 月 18~20 日在國科會的贊助下，為本系籌辦「數學史與數學教學之關聯」研討會，邀請國外 Joseph Dauben、Ivor Grattan-Guinness 與蕭文強擔任講員，國內學者魏慶榮、張海潮、朱建正、蔡聰明、傅大為、徐光台、傅麗玉、郭重吉、邱守榕、張靜嚳、林炎全、林崇熙、周進洋，本校二、三十位同仁以及中學數學教師一百多位共襄盛舉。會後，同仁及中學教師無不反應熱烈，都盼望有機會再參加類似的學術活動。或許正是他們的鼓勵，遂激起我積極參與 HPM 活動的念頭。

此次與會最大的收穫，莫過於多方面了解 HPM 研究的一些具體策略。尤其是觀摩了很多可以應用在教學上的研究成果，印象十分深刻。譬如說吧，上述 Amira Cooper 的論文，就是研究以色列高中教師設計與課程有關的數學史材料充當課外讀物的教學策略，而發現到學期末學生對數學的態度有了顯著的改變。試觀國內學生數學表現無論優或劣，大部分都不約而同地痛恨數學，現在或許是我們提供一點學習動機的時候了。

最後，必須感謝國科會的旅費贊助。在出發前，John Fauvel（剛卸任的 HPM 主席）得知筆者已報名，一直希望我也前往 Sevilla，在 ICME-8 中提交 HPM 相關學術報告。但筆者因暑修班有「數學史」課程，不能請假太久，無法答應。不過，事先倒未曾預料 John Fauvel 與 Jan van Maanen（HPM 新任主席）會與筆者商量公元 2000 年 HPM 的籌辦事宜。由於 ICME-9 已決定由日本立教大學（Pikkyo University）的公田藏（Osamu Kota）教授承辦，因此，在鄰近的台灣舉行它的衛星會議 HPM 是一個適當的選擇。筆者當時承諾 John Fauvel 與 Jan van Maanen：如果國內同事、朋友以及相關政府部門都支持的話，那麼，筆者將責無旁貸接下這個任務。希望這件事儘快定案，好讓我們共同擬訂一些研究計畫，在四年後 HPM 研討會上爭一口氣。

這次研討會亞洲國家學者參加者寥寥可數，除公田藏、馮振業與筆者外，只有另一位來自馬來西亞的 Mhaini Mohomed。至於原因究竟，或許與數學史家不成氣候有關，連帶地 HPM 也不可能受到應有的重視。因此，若公元 2000 年我們決定主辦 HPM 研討會，那麼，我們必須儘快鼓吹與贊助相關的研究，並努力在亞洲地區帶動風潮，以便四年後在我們自己搭建的學術舞台上，展現由我們所主導的研究成果。

後記：本文在此呈現的版本，已略有修訂。謝謝助理張靜宜小姐協助打字。

遺產問題與阿拉伯數學史

台師大數學研究所博士班 蘇意雯

一、前言

遺產分配，是回教世界的一個特色。本文將依照題目難易，節錄三題有關阿拉伯遺產的問題。眾所周知，阿爾・花拉子米 (Al-Khowarizmi) 在阿拉伯數學中佔有舉足輕重的地位。可是有關他的代數著作之譯本，通常都去掉了前面的序言，因為在前面的這些文句中，有一些回教的祈禱文，也描述了穆罕默德的預言。這對信奉基督教的翻譯者而言，真是情何以堪。在 Rosen 的阿拉伯文本的譯本中，除了序言的補足外，我們還看到了很多關於法律的問題。阿爾・花拉子米舉例說明了代數如何可以應用於其民族的遺產法則，又再一次的強調了代數的重要。以下就是這三題文本的介紹。

二、 文本及其解說

第一個題目是簡單的遺產分配，只要考慮繼承人即可：

> **一位婦女過世，留下她的丈夫，一個兒子和三個女兒，本目標是要用分數表示每一位繼承人各能分得的資產。**

阿爾・花拉子米把扣除掉丈夫所分得資產後後所剩下的$\frac{3}{4}$分成五個部分，兩份給兒子三份給

女兒們。因爲 4 和 5 的最小公倍數是 20，所以這份資產可以分成 20 等份，丈夫得 5 份，兒子取 6 份，每個女兒分得 3 份。（Berggren，1986）

第二題加入了把財產遺贈給陌生人的情況，請看下例：

一位婦女過世，留下她的丈夫，兒子和三個女兒，但是她也遺贈給一位陌生人總資產的 $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}$，計算每一位繼承人各能分得的資產部分。

因爲 $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\leq\frac{1}{3}$，所以可以直接分配。如前一個問題，所分得法定資產的公分母爲 20。在陌生人的部分（$\frac{1}{8}+\frac{1}{7}=\frac{15}{56}$）取走之後，剩下 $\frac{41}{56}$ 的資產。於是陌生人所得與家庭成員共得部分的比爲 $\left(\frac{15}{56}\right):\left(\frac{41}{56}\right)=15:41$。因此，對於整個資產，陌生人將得到 15 份對比於自然繼承人的 41 份。爲了計算方便我們把兩數都乘上 20，所以總數爲 20（15+41）＝20×56＝1120 份，而陌生人拿了 20×15=300，繼承人共得了 20×41=820。在這一部份，丈夫得了 $\frac{1}{4}$，就是 205，兒子是 $\frac{6}{20}$，就是 246，另外每一個女兒獲得 123。（Berggren，1986）

第三題就更複雜了，因爲這個問題還牽涉到了借貸的情況：

有一人過世，身後留下二子，並且要把資本的三分之一遺贈給一位陌生人。而他共留下了 10 dirhems 以及對於其中一子 10 dirhems 的要求（按：此意即其中有一子欠父親 10 dirhems）。

計算：你要求的是從債務中所取得的總值，把此值（原文用 thing 來表示，用特定的文字代表未知數，這也是阿爾・花拉子米的一項特色）加上 10 dirhems 的資本，於是總和變成 10+thing。減去總和的 1/3，因爲他把財產的 $\frac{1}{3}$ 贈與出去，即 $3\frac{1}{3}$ dirhems 和 $\frac{1}{3}$ 的 thing，所以剩下 $6\frac{2}{3}$ dirhems 和 $\frac{2}{3}$ 的 thing。把這些分給兩個兒子，每一個人分到的部份是 $3\frac{1}{3}$ dirhems 和 $\frac{1}{3}$ 的 thing。這與剛才所要找的值相等。從 thing 裡減去其 $\frac{1}{3}$，剩下 $\frac{2}{3}$ 的 thing 與 $3\frac{1}{3}$ dirhems 相等。再來你只要藉著增加相同的 $\frac{1}{2}$ 補足 thing 即可。因此，你增加了 $3\frac{1}{3}$ dirhems 的 $\frac{1}{2}$，然後得到 5 dirhems，這個就是代表從債務中取得的 thing。”

這個問題用現代的代數符號，可表示爲 $\frac{2}{3}(10+x)=2x$，其中 $10+x$ 是所遺留的財產總數（考慮留下的現金和可從債務中獲得的金額），x 爲每個兒子所能分得之遺產。所求出來的 5，是可從債務中得到的最大數值。因爲在這個問題中所含的法律觀點就是－如果一子欠父親的債務大於其所能分配之遺產，那麼在分家產時他並不需要再拿錢出來，讓兩者一筆勾銷即可，所以我們只需考慮所得之金額與償還之金額相等的情形。反之，在本題中，若兒子只向父親借 4 dirhems 而不是 10 dirhems，那麼他將可分得 $\frac{2}{3}$ dirhems 的現金。因爲 $\frac{1}{3}(4+10)=\frac{14}{3}$，

$\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}$。而另一子和陌生人都可得 $4\frac{2}{3}$ dirhems。（Karpinski, 1915）

三、阿拉伯的遺產律則

回教的遺產分配制度，有一定的準則。阿拉伯世界存在把財產遺贈予陌生人的習俗，另外遺贈所得不可超過全部遺產的三分之一。如果超過了，則必須經過繼承人們的同意。萬一只有部分的人同意，那麼那些同意者便要平均分攤超出三分之一的部分。在扣除陌生人所得的遺產後，其餘的部分為配偶可分四分之一，剩餘的四分之三由兒子和女兒以 2 比 1 的比例分配。當遇到兒子向父親借貸的情形，在分配上，這個兒子最差的情況就是拿不到遺產，即是以所得遺產與借貸的錢數抵銷，並不需向其他繼承人償還不足的金額。

四、數學與中國文化

像上述的遺產分配，對照於中國的古算書，並不曾出現過類似的問題，至於為何會有這種差異？筆者認為此應與文化脈絡有關。因為在中國，周朝繼承商朝確立的嫡長子制度，周天子由嫡長子世代相襲。至於在貴族方面，其政治身分雖是由長子繼承，但包括土地在內的家產，則由家中男嗣共分（沈大德、吳廷嘉，1998）。在戰國以前的農家頗多三代同居，而且兄弟不分家，同居共財。但在秦漢之後的家庭，成年已婚兄弟多在父母生前就各分家產，自立門戶。如何分產自是由長輩做主。在江蘇儀徵青浦的西漢末年墓，出土平帝元始五年（西元 5 年）的竹簡《先令券書》，就提到立券人朱凌之母對財產的分配是「公文年十五，去家自出為姓，遂居外，未嘗持一錢來歸。嫗予子真、子方自為產業。子女仙君、弱君等貧，毋產業」（按：朱凌、子真、子方、公文為其子，仙君、弱君為其女）。與漢代不同，唐朝家庭結構已婚兄弟同居共財為其特色，而父母過世後，兄弟幾都平分家產。唐之後亦然。這種慣例行之久遠，除非父母先立遺囑，但也不脫其窠臼，只不過有時長孫亦可算一份，或是嫡長子可得二份。例如在宣統辛亥增修《吳中葉氏族譜》卷六十四＜雜誌丙故事＞引《雍正舊譜》收錄的宋世分書云：

> **山頭巷住人葉廿八同妻某氏，請到親族楊三十一秀、徐十八秀、葉廿四秀等，寫立遺囑，老身正室某氏生長男葉椿、次男葉柏、三男葉桂、七男葉樞、側室某氏生四男葉槐、五男葉榆、六男葉梅。七男俱已娶妻完聚，不幸葉梅早卒無後，老身仰賴祖宗遺蔭，頗成家業，今將現在房屋山地家私什物作十分：除葉柏出贅外，葉椿嫡長得二分；餘四子各得一分；葉桂早卒，遺孫葉堂孤苦，同葉梅妻氏共又得一分；餘三分老身養贍送終并應門戶，待老身天年之後，所遺三分照前均分。此係出于至公，並無私曲，亦無更分不盡之財。既分之後，榮枯得失，聽由天命，所有家私明寫分書之上，永遠為照。（杜正勝，1992）**

五、結語

由上述例子可見，數學問題離不開社會文化歷史脈絡。事實上，數學是某脈絡中的知識活動，也擁有豐富的歷史文化向度，在各類數學知識呈現的萬般風情之背後，正蘊含了深刻的歷史意義。教師授課時，若能讓學生體會到數學的這個面向，也就是朝著 HPM 的目標又邁進了一步。

參考文獻

李文林主編（2000），《數學珍寶－歷史文獻精選》，台北：九章出版社。
沈大德、吳廷嘉（1998），《中國傳統社會結構探析》，台北：南天書局。
杜正勝（1992），《古代社會與國家》，台北：允晨文化

洪萬生（2001），〈當斐波那契碰上孫子〉，《HPM 通訊》第四卷第一期，頁 1-2。

劉鈍（1997），《大哉言數》，瀋陽：遼寧教育出版社。

Berggren, J. L. (1986), "The Islamic Dimension: Problem of Inheritance", in *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (New York：Springer-Verlag.), pp. .63-67. .

Grattan-Guinness, Ivor (1997), *The Fontana History of the Mathematical Sciences.* London: Fontana Press.

Karpinski, L. C. (1915, "Preface and Additions Found in the Arabic Text of Al-Khowarizmi's Algebra", in *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi* (New York: The Macmillan Company), pp. 45-48.

Algebra 的語源

台師大數學研究所碩士班 楊瓊茹

在清康熙皇帝時，英文字「algebra」曾被音譯為「阿爾熱八達」，直到西元 1859 年，中國清代數學家李善蘭與偉烈亞力 (Alexander Wylie) 合譯英國數學家狄摩根 (A. De Morgan) 的代數著作 *Elements of Algebra* 時，首次將「algebra」定名為「代數」，其意思是運用文字符號來代表數字的一種數學方法。今日，代數這門學科已成為數學的一大分支，從初等代數擴展到線性代數、矩陣代數、抽象代數，在這豐富的發展下，回過頭來看看 algebra 這個字是怎麼來的？它原本是什麼意思？倒也是件十分有趣的事，以下就請容許我將 algebra 作一番說文解字吧！

大約在西元 825 年，阿拉伯帝國的數學家阿爾・花拉子米 (Mohammed ibn Musa al-Khwârizmî)寫了一本數學書，此書的拉丁文譯名為*Al-kitâb al-muẖtasar fî hisâb al-jabr wa-l-muqâbala*[1] ，英文「algebra」便是源自此書名中的「*al-jabr*」，其意思是指「還原」和「移項」(將負項移至等式的另一邊成為正項)，例如將 $3x+2=4-2x$ 轉換成 $5x+2=4$ ；而書名中最後一個字「*wa-l-muqâbala*」指的便是「比較」和「化簡」(將等式兩邊相同的正項同時減去相同的量)，例如將 $5x+2=4$ 轉換成 $5x=2$ ；而「*hisâb al-jabr wa-l-muqâbala*」這個標題也曾被譯為「還原與對消的科學」。

然而，Solomon Gandz 卻提出另一種說法。早在西元前 1600 年左右，居住在兩河流域的亞述人和巴比倫及埃及有密切的政治、經濟往來關係，自然也熟悉巴比倫及埃及的數學，在當時，亞述人稱「方程式」為「Gabr」，後來阿拉伯人接受這些知識，將「Gabr」音譯為「al-jabr」，而「wa-l-muqâbala」是與「Gabr」意義相同的阿拉伯字，但流傳到阿爾・花拉子米時，阿拉伯人已經忘了它原本的意思了。

另一個的非數學意義的語源是當「*al-jabr*」這字被引入西班牙時，被改寫成「algebrista」，指的是「接骨師」，在當時西班牙的理髮店的招牌寫著 Algebristay y Songrador，其意思是接骨師和放血專家，可見當時的理髮店也容許一些醫療服務。查閱《牛津英文字典》(Oxford English Dictionary)，也明白告訴我們在十六世紀左右的西班牙及義大利，algebra 的意思是接骨技術。

有趣的是，Udai Venedem 對 algebra 的語源提出了兩個讓人耳目一新的方向：

1. algebra 這字源自於一位傑出的什葉派回教徒 Jabir 的名字，
2. algebra即是Abu Sahl Dunash ibn Tamim(950 年左右)所指的印度土盤算法[2] (hisab al ghubar)中的al ghubar一字。ghubar是塵土粉末的意思。

但Udai Venedem 也認爲這些說法，嚴格說來並沒有必然性。

在說明這麼多關於 algebra 的來龍去脈後，究竟哪一個才是歷史的真相？或許我們沒有確切的答案，但倘若經由 algebra 一字，我們能拼湊出一點歷史的圖像，看到數學文化間的聯繫、交流與變化，甚至學習對不同文化的尊重、包容及欣賞，這本身不就很有意義嗎?

參考文獻

洪萬生 (1999)，《孔子與數學—一個人文的懷想》。台北：明文書局。

李文林主編 (2000)，《數學珍寶》。台北：九章出版社。

Victor J. Katz (1993), *A History of Mathematics.* New York: Harper Collins College Publishers.

Solomon Gandz (1926), "The Origin of the Term 'Algebra'" , *American Mathematical Monthly,*Vol 33: 437-440.

J. A. Simpson and E. S. C. Weiner (1989), *Oxford English Dictionary.* New York: Oxford University Press.

http://forum.swarthmore.edu/epigone/historia_matematica/tehzhermzhel
[HM]The origin of the word "algebra" by Udai Venedem.

---

[1] *al-jabr* 和 *wa-l-muqâbala* 是由阿拉伯文直接音譯成拉丁文。

[2] 七、八世紀，印度人在地面或盤上舖一層細沙，用竹籤在上面做計算。

史都克（Dirk Jan Struik, 1894-2000）：堅毅的數學家、數學史家與馬克思主義者

台師大數學系碩士班研究生 黃清揚

數學家很長壽；這是一個健康的職業。長壽的原因在於愉悅的思維。數學與物理學都是可讓人非常愉悅的。 — Dirk Jan Struik

前言：M+M+M=100

上面這個式子並不是計算題，也不是什麼偉大的數學公式，而是爲了慶祝史都克（Dirk Jan Struik,1894-2000）教授 100 歲生日刻在某個禮物上的公式。有趣的是，三個M分別代表了婚姻（Marriage）、數學（Mathematics）及馬克思主義（Marxism）。史都克教授已於去年（2000）10 月 21 日在麻州家中平靜地過世，得年 106 歲。他是美國麻省理工學院（簡稱M.I.T.）

數學榮譽退休教授，也是相當著名的數學史家，經典著作爲《簡明數學史》（*A Concise History of Mathematics*）。[1]由於他在數學史上佔有一席之地且經歷過許多重要的年代，本文將是要介紹史都克不平凡的一生。

出生、求學及工作

史都克 1894 年 9 月 30 日出生於荷蘭鹿特丹，爲家中的長子，父親是當地中學老師，從父親那裡他遺傳到對數學及歷史的喜好。1912 年，他進入萊登大學主修數學及物理學。在上大學後才真正開啓他活躍的思想，因爲從理論物理學家Paul Ehrenfest（1880-1933）教授的教學中，史都克了解到數學及科學的精神，認爲那是充滿生氣並持續發展的領域，而以前所學到的知識對比之下則是靜態的。後來繼續學業，1922 年史都克以研究張量方法對黎曼流形的應用（Application of tensor methods to Riemannian manifolds）拿到博士論文，一年後（1923）娶捷克斯洛伐克籍的Saly Ruth Ramler（1894-1993）爲妻。[2]值得一提的是Saly Ruth Ramler也是一位有造詣的數學家，她則是在布拉格的查理斯大學（Charles University）著名數學家G. Pick及G. Kowalewski指導下於 1919 年拿到博士論文。

1924 年到 1926 年，史都克利用洛克斐勒獎學金（Rockefeller Fellowship）與他的太太到歐洲其他國家學者研究及合作，其中包含許多二十世紀著名的數學家與科學家諸如 Tullio Levi-Civita（1873-1941）、Richard Courant（1888-1972）及希爾伯特（David Hilbert,1862-1943）。也是在這個時候史都克對數學史漸感興趣，並在哥廷根圖書館中研究文藝復興時代的數學家。

獎學金終止後，史都克發覺他在荷蘭找不到合適的工作，且在歐洲沒有很多的機會，所以接受了 Norbert Wiener（1894-1964）的邀請至 M.I.T.。並於 1934 年入籍成爲美國公民。後來就待在 M.I.T.做他的研究直到退休。

M.I.T.歲月：馬克思主義與數學

史都克早年就已經對馬克思主義有初步的興趣，大學前的中學數學老師 G. W. Ten Dam 多少在這方面提供了一些訊息。在大學期間，他組織了一個公開的學生研究團體來研究社會主義，並且成爲著名的左翼青年運動 *De Zaaier* 的成員。1915-1916 期間，也就是在大學畢業前，史都克努力的想回答一個困難的個人問題：如何調和數學與馬克思主義者的信念。後來他寫道：

> 也就是在那些時候我開始問我自己，是否應永久的參與政黨活動或是繼續數學的專業，跟隨Wijnkoop及Van Ravesteync或我的教授Kluyver及Ehrenfest，成為專業的社會主義者（professional socialist）或是社會主義式的專家（socialist professional）。[3]

雖然後來沒有成爲專業的社會主義者，但他的治學態度可從這裡找到端倪。當時歐洲有一個重大的事件就是俄國的布爾雪維克革命，1917 年布爾雪維克在彼得格勒領導十月革命,

---

[1]《簡明數學史》（A Concise History of Mathematics），1948 年出版，被翻譯超過十八種語言，1987 年英文四版中史都克加上了二十世紀前半的章節。這本書筆者手上有一本，是在大學四年級時於書店（羲和書屋）閒逛發現的，當初好奇於作者爲何能在薄薄 200 多頁的書中將數學史呈現給讀者，於是便買了下來。而這本書也在筆者當兵時陪伴我度過無聊寂寞的觀測所（馬祖北竿）歲月。

[2]捷克斯洛伐克：正式全稱捷克和斯洛伐克聯邦共和國。原包括捷克共和國和斯洛伐克共和國的聯邦國家，首都布拉格。1992 年協議分爲兩共和國，1993 年 1 月 1 日生效。

[3] 轉引自Alberts,1994：283

建立了第一個蘇維埃政府。在這背景下，史都克對回答自己的問題有了較深刻的省思。他尋找到調合馬克思主義與數學的方法，這方法不在於整合兩者而是在它們之間找到平衡點。而這種觀念獲得較廣泛的支持則是在 1930 年代。[4]1931 年在倫敦所舉行的國際科學及科技史會議（International Congress of the History of Science and Technology）中Boris Hessen以此為題發表了演講後，史都克得到了許多的靈感，這種進路也促使史都克與其他的馬克斯主義者在 1936 年發行《科學與社會》（*Science and Society*）期刊。

對史都克來說，數學史不是定理、證明及解決問題這類知識的堆砌，而是長期社會及心智努力的過程下的產物，社會-經濟的架構是唯一影響數學發展方向與步調的因素。所以史都克明確地反對將數學史定調於導致”結論（solution）”或”發現”的觀念與環境－柏拉圖式的路線（Platonic lines）。與其他數學史家不同的是，他認為在社會中勞動力量的了解對認識與處理數學史的工作是不可或缺的，也就是社會脈絡與數學知識的產生有很大的關係。他利用辨證法與歷史唯物主義做為分析工具，檢視與了解數學的思想。《簡明數學史》（*A Concise History of Mathematics*）與《美國科學的形成》(*Yankee Science in the Making*) 兩書便是這種脈絡底下的產物，並且還相當成功呢。

史都克雖選擇成為社會主義式的專家，但社會主義幾乎從來沒有干預到他的數學專業（除了 1951-1955 影響到教學外）。而他在數學史的進路則很明顯的受到社會主義信念的影響，並創造『數學社會學』（Sociology of Mathematics）這一學門，[5]提供科學與數學史家新領域的探索。晚年他更將觸角延伸到更寬廣的數學史-民族數學（ethnomathematics）上，其目的在將數學與文化起源（包含社會與生產脈絡）及數學教育與社會正義（social justice）連結起來。

麥卡錫主義下的干擾[6]

前面提到過在 1951-1955 年，史都克在M.I.T.的教學受到影響而中斷。主要美國在二次大戰後，有一股反共產主義的浪潮。在這浪潮下產生了麥卡錫主義，因為史都克具有馬克思主義的背景。而史都克並不掩飾他的馬克思主義觀點，諸如支持西班牙共和派對法西斯主義者弗朗哥將軍的戰役、為美國－蘇聯友誼協會工作、支持激進的工會主義等等。1944 年在他的幫忙下，波士頓成立了以革新為方向（progressive-oriented）的短期學校（Samuel Adams School, 1944-1948）。在麥卡錫主義盛行的年代（史都克後來將這期間的氣氛描述為『一半是德國納粹的回憶，一半是愛麗絲夢遊仙境式的回憶』），[7]1949 年麻州政府遂指控他三項煽動性言論的罪名，而且M.I.T.做了留職停薪的處分。

在這期間有許多朋友相當支持他，如 M.I.T.的校長 Killian 及學校成員。以哈佛大學的

---

[4] 30 年代被某些人稱為英國知識份子的『紅色年代』，特別是在劍橋，一批左翼科學家的活動格外引人注意。這些人中的代表人物有遺傳學家霍爾丹（J.B.Haldane,1892-1964）、生理學家霍本（L.Hogben,1895-1975）、數學家萊維（H.Levy,1889-1975）、物理學家貝爾納（J.D.Bemal,1901-1971）和李約瑟。（劉鈍，＜剪不斷的"李約瑟情節"＞，《中華科技史同好會會刊第二卷第一期》（2001 年 3 月）63-66）

[5] 這類討論請參閱史都克另一本著作《美國科學的形成》(*Yankee Science in the Making*)

[6] 麥卡錫(1909-1957)，美國共和黨政治家、檢察官。生於威斯康辛大丘特。1945 年當選為參議員。1950 年代初他信口指控有 250 名共產黨員滲透到美國國務院。1953 年他成為權力很大的常設調查小組委員會主席。虛張聲勢地他採用反復盤問、含沙射影手法傳訊許多無辜官員和公民,後來甚至與軍方發生直接衝突。這種反共的迫害行為當時被稱為「麥卡錫主義」。後遭到參議院譴責,而不能再為所欲為。卒於馬里蘭州貝賽斯達。

[7] “Half reminiscent of Nazi Germany, half of Alice in Wonderland.”轉引自Rowe,1994：263

George Sarton 爲首的抗辯委員會，則爲他籌到超過 10000 美元的保釋金。在當時這個案件相當轟動，史都克接到無數的演講邀請，他與太太 Ruth 因此巡迴全國宣揚他當時的理念－言論自由。另外一方面，他在本身的專業上也沒空下來，這期間出版了 *Lectures on Classical Differential Geometry*（1950），以填補教學的空白。後來最高法院接受他的請求認爲麻州反煽動性言論的法律（anti-sedition laws）是違憲的，因而在 1956 年 M.I.T.恢復了他的終身教職。四年後史都克 65 歲屆齡退休。

結語

回顧史都克教授的一生，可說他就是 20 世紀歷史的縮影。將數學、數學史與馬克思主義融於一身並尋找到平衡點是他治學的方法，多年來驅動他的動力則是冷靜且理智的好奇心，而驚人的記憶力又是他另一個特點。在學術上他將數學與科學史帶向不同的進路而且持續的給出影響力，受到影響的學科則包含了數學、數學與科學哲學、數學史及數學與科學史。也因爲他的付出，我們對這些學門的了解才有更豐富的認識。

參考文獻：

Alberts, Gerard (1994), “On Connecting Socialism and Mathematics: Dirk Struik, Jan Burgers, and Jan Tinbergen”, *Historia Mathematica* **21:** 280-305.

Rowe, David E. (1994), “Dirk Jan Struik and His Contributions to the History of Mathematics”, *Historia Mathematica* **21:** 245-273.

Struik, Dirk J. (1987), *A Concise History of Mathematics*, New York: Dover, 4th rev.ed.

劉鈍（2001 年 3 月），＜剪不斷的"李約瑟情節"＞，《中華科技史同好會會刊第二卷第一期》63-66。

編輯小語

在去年我們舉辦的「HPM2000」研討會中，Fauvel老師的大師風範讓我印象最爲深刻！他所帶給我們這些年輕小輩的學術上與智慧上的衝擊，是無人能比擬的。五月裡，我們痛失了引領我們這些小輩的一位mentor，我們所能做的，僅是在通訊上做一個紀念專輯而已。下一期將是John Fauvel老師的紀念專輯，有意願發表隻字片語的讀者們，請將您的文字e-mail給我們：suhy@pchome.com.tw。

三角函數公式的托勒密方法

西松高中 蘇惠玉老師

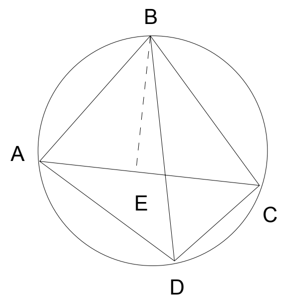
托勒密的生平所知不多，較爲著名的是他的許多重要著作。例如，在他的《地理學（Geography）》中所繪製的地圖中，畫出了經緯線，同時，討論了製作地圖所需的透射學的技巧。他還寫過有關天文、音樂和光學的著作和試著去證明歐基理得的平行公設。他最著名的書爲 *Mathematical Collection*，全書共十三冊，完整的包含了當時希臘人對宇宙的模型和描述，如同《幾何原本》一般，他將之前所有的成果收集在這一本書中，可以說是希臘天文學的集大成，在十六世紀哥白尼的學說被廣爲接受之前，是最有影響力的天文學作品。幾世紀之後的阿拉伯稱此書爲 *al-magisti*，意即 the greatest，以區分其他內容較少的天文作品。從此，這本書就被稱爲 *The Almagest*。

在托勒密的 *The Almagest* 的第一冊中，記載了托勒密如何做出他的弦表，給出圓心角及其相對應的弦長。托勒密爲了要製作他的弦表，證明了一連串的幾何命題，從他對正弦的定義（圓心角所對的弦長），或是餘弦的定義（圓心角之補角所對之弦長，他稱之爲半圓的剩餘，remainder of the semicircle），可以得到現今所謂的和角、差角、半角公式，其中，以托勒密定理（圓內接四邊形對角線的乘積等於對邊的乘積和）作爲證明的工具。

托勒密定理

有一圓及圓內接任意四邊形 ABCD，連接 AC 及 BD。證明

矩形 AC,BD=矩形 AB,DC+矩形 AD,BC.



作角 ABE，使得

角 ABE=角 DBC

加上共同的角 EBD 後，

角 ABD=角 EBC

但是，角 BDA=角 BCE [Eucl. III, 21]，因爲他們對同一弧。所以三角形 ABD 與三角形 BCE 相似，所以

BC：CE :: [1]BD：AD [Eucl. VI, 4]

所以，矩形 BC,AD=矩形 BD,CE

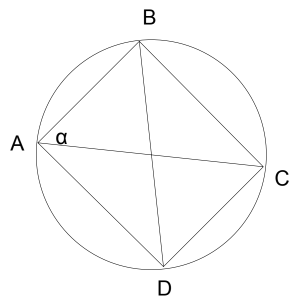
同時，因爲角 ABE=角 CBD，且角 BAE=角 BDC，所以三角形 ABE 與三角形 BCD 相似，所以

AB：AE :: BD：CD

所以，矩形 AB,CD=矩形 BD,AE，

且因爲 矩形 BC,AD=矩形 BD,AE

所以，矩形 AC,BD=矩形 AB,CD+矩形 BC+AD [Eucl. II, 1]

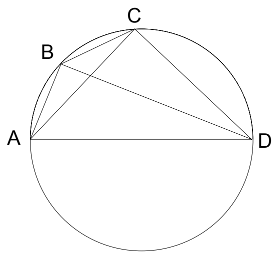


此即爲有名的「托勒密定理」：任意圓內接四邊形中，對角線的乘積=兩雙對邊的乘積和。在這個定理中，若將圓內接四邊形特殊化成圓內接長方形，對角線 AC 爲直徑=1 時，若 $\angle BAC = \alpha$ ，則可以輕易的得到 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$這個重要公式。

差角公式： $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

半圓形 ABCD，AD 爲直徑，從 A 點畫兩條弦 AB、AC，給定這兩條弦的長度，以直徑 120 來表示；連 BC。則 BC 可求。

連接BD，CD。則很明顯的，他們的長度可知，因爲他們爲半圓的剩餘（remainder of the semicircle）所對的弦。[2]因爲四邊形ABCD爲圓內接四邊形，所以，



矩形 AB,CD+矩形 AD,BC=矩形 AC,BD

因爲矩形 AC,BD 已知，且矩形 AB,CD 已知，所以，剩下的矩形 AD,BD 可知。且 AD 爲直徑，所以 BC 可求得。

托勒密這個命題的意義，在於給定兩個角度及其所對的弦長，可以求得兩角度之差所對的弦長。這個命題，即是我們常看到的差角公式：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 。若 AD 爲直徑=1，$\angle BAD=\alpha, \angle CAD=\beta$，則 BC=sin(α - β)，且 BD=sin α ，AB=cos α ，CD=sin β ，AC=cos β 。由上述的「托勒密定理」，即可得到$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 。

半角公式：$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

設 ABC 爲半圓，AC 爲直徑。給定弦長 CB，D 平分此弧。連 AB，AD，BD 及 DC。從 D 作 DF 垂直 AC。則，CF=1/2(AC-AB)。

作 AE=AB，連接 DB。因爲 AB=AE，且 AD 爲公共邊，且角 BAD=角 EAD[Eucl. III, 27]，所以，底邊 BD=底邊 DE[Eucl. I, 4]

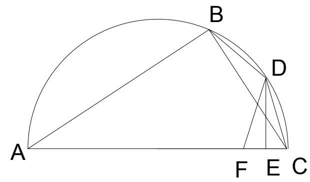
但是，弦 BD=弦 CD，所以，弦 CD=DE。

因爲在等腰三角形 DEC 中，DF 爲從頂點到底邊的垂直線，

所以，EF=CF [Eucl. I. 26]。但是，

CE=（AC-AB），

所以，CF=1/2(AC-AB)。



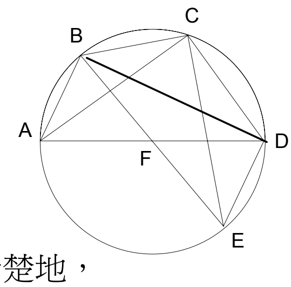
所以，因爲弦 BC 已知，所以，半圓的剩餘所對的弦 AB 亦可知。

所以 CF=1/2(AC-AB)也可知。但是，因爲 DF 畫在直角三角形 ACD 中，所以直角三角形 ACD 相似於直角三角形 DCF[Eucl. VI, 8]，所以，AC：CD :: CD：CF。即矩形 AC,CF=正方形 CD。但是矩形 AC,CF 已知，所以 CD 上的正方形可知，所以，弧 BC 的一半所對的弦 CD 的長度可知。

托勒密證明完這個命題後，說明了如何得到一半角度所對的弦長。即若直徑 AC=1，$\angle BAC=\alpha$ ，則 BC=sin α ，AB=cos α ，從上述的命題知道 CF=1/2(AC-AB)=1/2(1- cos α)。但是，直角三角形 ACD 與直角三角形 DCF 相似，所以，$CD^2=AC\times CF$ ，即

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)$ 。

和角公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$



有一圓 ABCD，直徑爲 AD，F 爲圓心。從 A 連續的切出兩弧 AB、AC，連接 AB、AC。給定此相對的兩弦 AB、AC 的長度。連接 AC。則 AC 可得。

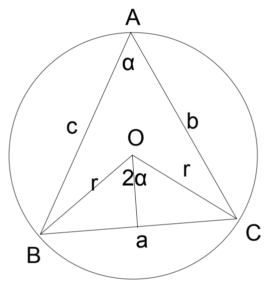
過 B 點畫圓的另一條直徑 BFE，連 BD、DC、CE 和 DE。由此，很清楚地，因爲 BC 已知，所以 CE 可知。且因爲 AB 已知，所以 BD 和 DE 可得。由我們所已經證明的，因爲 BCDE 爲圓內接四邊形，BD、CE 爲其對角線，對角線所組成的矩形等於由對邊所組成的矩形和。所以，因爲矩形 BD,CE 和 BC,DE 可知，所以，矩形 BE,CD 可得。但是，BE 亦爲直徑，所以剩下的 CD 可得。所以，半圓剩餘所對的弦 AC 可得。

如此，如果給定兩角度及其所對的弦，由這定理可知，這兩個角度的和所對的弦亦可得知。

托勒密的這個命題，從兩已知角度所對應的弦長，求得兩角度之和所對應的弦長，即是我們所謂的和角公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。若直徑 BE=AD=1，$\angle ADB=\alpha, \angle BDC=\angle BEC=\beta$，則 BD=cos α，CE=cos β，BC=sin β，DE=sin α，所以，而由「托勒密定理」知，BD×CE=CD×BE+BC×DE，即 $\cos\alpha\cos\beta=CD+\sin\alpha\sin\beta$，所以，CD=cos($\alpha+\beta$)= $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。而 AC=sin($\alpha+\beta$)亦可求得。

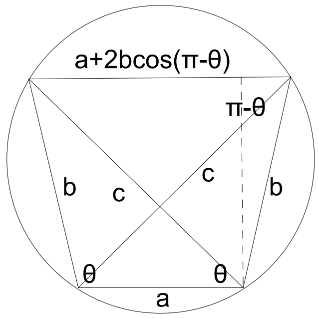
附註：我們可以從托勒密的方法得到正弦定理及餘弦定理的證明，簡單易懂，可以當作教學上的參考。

正弦定理：



一圓半徑為 r，圓心為 O，圓內接三角形 ABC 中，設 α 為銳角，則 $\angle BOC=2\alpha$，自 O 做 BC 邊的中垂線，則 $\sin\alpha=\frac{a/2}{r}=\frac{a}{2r}$，所以，$\frac{a}{\sin\alpha}=2r$。同理 $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$。

餘弦定理：



如圖，ABCD 為圓內接梯形，由托勒密定理可知：

c×c=b×b+(a+2bcos(π - θ))×a，即

$c^2=b^2+a^2-2ab\cos\theta$。[由 Sidney H. Kung 所給出]

[1] 在希臘時期，無法直接將a: b看成是一個數 $\frac{a}{b}$，他們將比例相等看成是一種「類比」，以「∷」來表示。

[2] 此為托勒密對餘弦函數的定義。

參考文獻

Ptolemy, C. (c. 100-178 C. E.), *The Almagest*, in *Greek Mathematics Volume II: From Aristarchus to Pappus*, with an English translation by Ivor Thomas.Cambridge: Harvard University Press.

Ptolemy, C. (c. 100-178 C. E.), *The Almagest, in Great Books of The Western World Volume 15,* translated by R. Catesby Taliaferro. Chicago: Encyclopaedia Britannica, INC.

Euclid (1956), *The Thirteen Books of The Elements*, translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath, New York: Dover.

Katz, V. (1993), *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Nelson, R. B. (1993), *Proofs Without Words—Exercises in Visual Thinking*. Washington DC: MAA.

Maor, E. (1998)，《毛起來說三角》(胡守仁中譯)。台北：天下文化。

有多大？

台灣師大數學研究所碩士班 葉吉海

在不同的時空背景，對於大小的描述也不盡相同。有具體的描述，也有只能意會的形容。接下來的文章是筆者透過時下綜藝節目人物福州伯的穿針引線，並以擬人化的手法，將古今諸多對於「大小」的觀點串連起來。

角色：福州伯、酋長、甲骨文、《漢書‧律曆志》、《周髀算經》、《詩經》、《算法》、《數術記遺》、《孫子算經》、印度人、阿基米德。

有一天福州伯在講鬼故事，[1]講到恐怖的地方，便說「有多恐怖？」，招牌動作便隨著出來「架恐怖」。[2]談到大小，便說「有多大？」招牌動作來不及做出，旁邊酋長見狀便大叫：「ras！ras！ras！這麼大」。[3]福州伯還來不及回過神來，甲骨文也說：「這麼大」。[4]

《漢書‧律曆志》則悠哉地說：「**數者，一、十、百、千、萬也，所以算數事物，順性命之理也**」。隨後《周髀算經》引《河圖括地象》之數據便說：「**十萬曰億也**」。[5]《詩經》聽後說：「**萬萬為億**」。[6]

福州伯聽了快瘋了，為何十萬為億、萬萬也為億？《算法》出面緩頰說：「**億之數有大小二法，小數以十為等，十萬為億；大數以萬為等，萬萬為億也。**」[7]福州伯這才稍稍瞭解原來在漢代以前，對於數的大小，萬以上有十進制與萬進制。

《數術記遺》接下去說：「**黃帝為法，數有十等。及其用也，乃有三焉。十等者，億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載。三等者，為上、中、下也。其下數者，十十變之，若言十萬曰億，十億曰兆，十兆曰京也。中數者，萬萬變之，若言萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京也。從億至載，終於大衍。上數者，數窮則變，若言萬萬曰億，億億曰兆，兆兆曰京也。下數淺短，記事則不盡。上數宏廓，世不可用。故其傳業，惟以中數耳。**」[7]

《孫子算經》聽了應和說：「**凡大數之法，萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京，萬萬京曰垓，萬萬垓曰秭，萬萬秭曰壤，萬萬壤曰溝，萬萬溝曰澗，萬萬澗曰正，萬萬正曰載**」。就是《數術記遺》中所說的中數記法。

《算學啓蒙》補充說，還有更大的：「于載以上，有『**極**』、『**恆河沙**』、『**阿僧祇**』、『**那由他**』、『**不可思議**』、『**無量數**』」。[8]

底下的印度人聽了哈哈大笑，隨口就說了「**不可說、不可說轉、不可說不可說、不可說不可說轉**」就比《算學啓蒙》說的還大。[9]

後來阿基米德聽不下去了，覺得他們脫離現實太遠了，就把他數沙的心得說了出來「**以恆星天為界的球體內所容沙粒的數目比第八級單位數的一千萬倍為小**」。[10]

最後福州伯一頭霧水地用他招牌動作做總結，「**有多大，這麼大**」。

註解：

[1] 福州伯即時下綜藝節目人物。

[2]「有多恐怖？」、「架恐怖」用閩南語發音。

[3]根據A..C.Haddon在 1889 的研究報告指出，位於澳洲東北岸約克York半島和新幾內亞島之間的托列斯海峽（Torres Strait）西部有一部落在數數時，1：urapun；2：okosa；3：okosa- urapun；4：okosa- okosa；5：okosa-okosa- urapun；6：okosa- okosa- okosa。大於 6 的數都叫ras。

[4] 現已發現的甲骨文中最大的計數單位是萬，最大的數字是三萬，「」等於現今3萬。

[5] 趙爽注《周髀算經》中引《河圖括地象》之數據時就稱：「十萬曰億也」。

[6] 毛萇注《詩經》以「萬萬為億」。

[7] 《禮記 • 內則》“降德于兆民”疏引：「《算法》：億之數有大小二法，小數以十為等，十萬為億；大數以萬為等，萬萬為億也。」故當時注經，二法并用。

[8] 元代朱世傑《算學啟蒙》大數記法。

[9] 唐譯《華嚴經》卷四十五，大數記法單位最後四個。

[10] 阿基米德將數分成10^8週期，每一週期再分成10^8級。第一週期，第 1 級：從 1 到10^8的數，第 2 級：從10^8到10^{16}的數，第 3 級：從10^{16}到10^{24}的數，……，第 8 級：從$10^{8(10^8-1)}$到10^{810^8}（令為P）的數；第二週期，第 1 級：從P・1 到P・10^8的數，第 2 級：從P・10^8到P・10^{16}的數，……，第10^8級：從P・$10^{8(10^8-1)}$到P・10^{810^8}（或P^2）的數；……；第10^8週期，第 1 級：從P^{10^8-1}・1 到P^{10^8-1}・10^8的數，……，第10^8級：從P^{10^8-1}・$10^{8(10^8-1)}$到P^{10^8-1}・10^{810^8}（即P^{10^8}）的數。

參考資料

Bunt, Lucas N.H, Phillip S.Jones andJack D.Bedient (1989), *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc。

劉鈍（1997），《大哉言數》，瀋陽：遼寧教育出版社。

杜石然主編 (1998)，《李儼、錢寶琮科學史全集》第二、十卷，瀋陽：遼寧教育出版社。

紀志剛 (2000)，《南北朝隋唐數學》，石家庄：河北科學技術出版社。

梁宗巨（1995），《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

Heath.T. L.（1998），《阿基米德全集》（中譯），陝西：科學技術出版社。

1. 要訂閱請將您的大名，地址，**e-mail**至 **suhy@pchome.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請**e-mail**至**suhy@pchome.com.tw**
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng**