HPM通訊

第四卷 第四期 目錄(2001年4月)

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

二十一世紀的《算經十書》

台師大數學系 洪萬生教授

郭書春與劉鈍在二十世紀即將結束前，總結了過去幾十年來相關學者之研究心得，重新校點、出版了《算經十書》，為二十一世紀的中算史學，奠定了更上層樓的深厚基礎。

本套書的重新校點 (1998)，固然主要得力於錢寶琮 1963 年校點的版本，不過，其規模卻大大地超前。前後這兩個點校版問世間隔不過三十五年，然而，在這段期間的後半，關於劉徽注研究所帶動的中算史學風潮，卻同時地惠及版本的校勘。在二十世紀八十年代之後，中國數學史研究視野，顯然由於國際學界（主要是歐洲漢學界）的刺激而拓寬，於是，重新還原 / 評價劉徽注乃至於其他古代數學文本，遂變成為十分『迫切』、但卻非常『前瞻』的學術領域。換句話說，中算史家的觀點拓寬或改變了，文本因而獲得了重新解讀的機會，於是版本學的相關知識活動，當然也就跟著熱絡起來了。

在中國大陸的數學史學界，郭書春、劉鈍以及其他少數幾位中、壯年數學史家，都是引領這一股學術風潮的指標性人物。他們兩位在二十世紀末完成了此一校點工作，似乎也為一個世代的學風，劃下了總算『苦盡甘來』的優雅句點。然則年輕世代的中算史家，究竟可以在這個基礎上開展出哪些『另類的』研究進路呢？

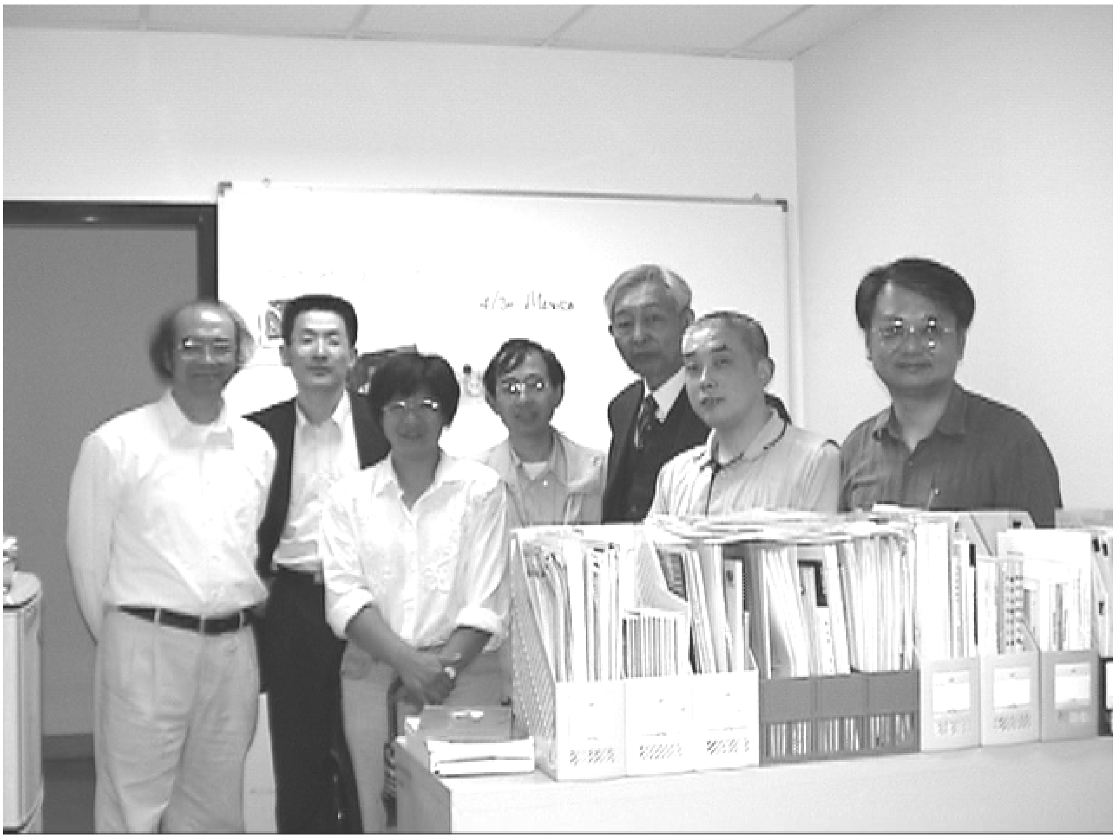
在此，請容許筆者提供一點『野人獻曝』！在本套書的校點說明中，郭書春曾多次提及不同文本的變異。這種現象如果拿來與《算數書》（約公元前 186 年）對比研究，或許我們可以對於中國傳統算書的體例及其社會文化的脈絡意義，提出比較深刻的歷史觀察。此外，算書在中韓、中日乃至於中越的文化交流過程中，扮演了相當重要的角色，因此，這幾個國家曾經出版過的中文數學典籍，應該也很值得深入研究。箇中原因，當不僅止於交流史的研究意義而已，有一些典籍譬如朝鮮李朝數學家南秉吉 (1820-1869) 的《劉氏勾股述要圖解》與《九章術解》，與《九章算術 • 劉徽注》的比較研究，應該可以豐富我們對《九章算術》及其劉徽注的理解，從而點出中算文本從手抄形式到印刷形式的演化意義。

最後，筆者有幸承郭書春與劉鈍兩位摯友之盛情邀約，為本套書的台灣版寫幾句話，實在與有榮焉。本書在台發行，受惠者當不只是專業史家，一般的數學教師，也一定可以從此一校點，讀出《算經十書》這種屬於全人類的數學遺產之二十一世紀意義來。對於擁有 HPM

（數學史與數學教學）關懷的讀者來說，本套書尤其提供了『貼近』古典文本的最佳機會，但願有心人士不要錯過！

附註一：郭書春、劉鈍校點的《算經十書（一)》、《算經十書（二)》（簡體字版），由瀋陽遼寧教育出版社於 1998 年初版。台灣繁體字版將由台北九章出版社近期發行。

附註二：所謂『算經十書』是指《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《五經算術》、《數術記遺》、《夏侯陽算經》與《緝古算經》。其中《數術記遺》是用以替代在宋代已失傳的《綴術》（祖沖之撰）。



三月二十七日下午李迪、韓琦與江曉原教授在李國偉教授的陪同下來訪，並與本系「數學文本討論班」師生座談。本照片中合照的還有孫文先夫掃。（張靜宜拍攝，洪萬生提供）

中國數學史新書介紹

台師大數學系 洪萬生教授輯

《孫子算經 / 張邱建算經 / 夏侯陽算經 導讀》

紀志剛 主編
武漢市：湖北教育出版社
1999 年 11 月出版
pp. 132 + iii
ISBN 7-5351-2391-0/O • 28
定價：人民幣 28.00 元

《孫子算經》、《張邱建算經》與《夏侯陽算經》是中國漢、唐之間三部數學典籍，唐初由李淳風收入《算經十書》。本書作者紀志剛博士出身內蒙古師範大學與（西安）西北大學，目前任教於徐州師範大學數學系。在本書中，紀志剛簡要地敘述了這三部算經的成書年代、歷史背景、考察了版本的嬗變，尤其側重於對算經中典型算題的剖析和重要算法的梳理，以揭示它們在中國數學發展中的地位與作用。

《南北朝隋唐數學》

紀志剛 著
石家庄：河北科學技術出版社
2000 年 2 月出版
pp. 390 + viii
ISBN 7-5375-11890-4
定價：人民幣 35.00 元

本書是劉鈍、王渝生主編的《中國數學史大系》中的一部。作者任教於徐州師範學院的紀志剛博士。在本書的〈前言〉中，作者指出：「本書以時間順序爲經，以重要人物、經典著作、代表性成就和重大事件等內容爲緯，縱橫交織，力求展出這一時期數學發展的宏偉歷程。」

《祖沖之科學著作校釋》

嚴敦傑 著
瀋陽市：遼寧教育出版社
2000 年 10 月出版
pp. 190 + viiii
ISBN 7-5382-5847-7/N • 14
定價：人民幣 15.00 元

本書是中國數學史家嚴敦傑 (1917-1988) 的遺作。嚴先生以嚴謹著稱於中國數學史界，本書的主要部分雖然於 1957 年即已完成，但該部分書稿一直壓在箱底，始終無法問世。現

在由郭書春負責，將上述書稿以及其他完成於 1974 年及其後幾篇文稿結集成爲本書。對於有心『貼近』祖沖之父子數學與科學文本的讀者，本書絕對不應錯過。

《數學史辭典》

杜瑞芝 主編
濟南市：山東教育出版社
2000 年 8 月出版
pp. 858 + xx
ISBN 7-5328-2845-X/O • 27

本書是中國學術界「第一部較爲系統、全面的綜合性數學史工具書，它的資料豐富，知識信息大，共收錄了中外數學、數學家、經典數學著作、數學學科史、數學哲學和數學方法論、數學教育、數學符號、數學名題和猜想、數學競賽與數學獎、數學學派、數學期刊、工具書、叢書、數學研究機構、學會、團體等十二個門類的有關歷史的辭條共 12280 個，計 126.7 萬字，正文之後附有數學名言（120 則）、數學大事年表、辭條漢字拼音索引和外文辭條索引。」

除了兔子之外---談斐波那契

台師大數學研究所博士班　蘇意雯

如果偶而我或多或少疏忽了任何適當或必要的事情，我懇求您的寬恕。因為沒有人能無過並在所有事物上都考慮周詳。—斐波那契

斐波那契一直都不是「斐波那契」，他於 1170 年生於比薩，在他的著作《花朵》（*Flos*, 1225）中，他稱他自己爲 Leonardo Pisano Bigollo。沒有任何直接證據顯示他的正式名稱與「斐波那契」這個名字有關。以「斐波那契」代替 Leonardo Pisano 似乎是 1838 年由數學史家 Guillaume Libri 開始，此後便約定俗成，沿用至今。事實上，如果你在當時要尋找斐波那契這個數學家，必定是徒勞無功的。

世人對斐波那契所知非常有限，在獻給中世紀學者 Michael　Scott 的《算盤書》（*Liber abbaci*, 1202）的開頭裡，斐波那契給了我們一段簡短的自傳，它是這樣寫的：

> 在我的父親被祖國比薩派任到布吉亞（Bugia）的海關為常常到那裡的比薩商人辦事時，我跟隨他到了那兒。父親要我學習印度-阿拉伯數碼和演算。我非常沉迷於學習以致於後來當我商務旅行至埃及、敘利亞、希臘、西西里和普羅旺斯等地時，我仍持續地研讀數學並參與當地學者的討論和爭辯。回到比薩後我以十五章的篇幅組成了此書，這本書裡包含了印度、阿拉伯和希臘的方法中我所認為最好的。我也放進了證明讓讀者和義大利人民有更進一步的了解。如果偶而我或多或少疏忽了任何適當或必要的事情，我懇求您的寬恕。因為沒有人能無過並在所有事物上都考慮周詳。

在這本著名的《算盤書》中，斐波那契使用了一般的字母代替未知數，例如 *res* 代替未知數，*census* 代替平方。雖然他並沒有用現代的方程式利用符號來運算，但隨著作品中的字句描述，我們可以直接轉換成現代的方程式，這讓人不禁對斐波那契在處理代數運算時所使用的心理視覺基模感到驚訝。同樣的，這種寫作方式也出現於另一本較少人知的著作《平方數之書》(*Liber quadratorum*)。斐波那契對不定方程式的興趣於《平方數之書》中展露無遺。《平方數之書》共含 24 個命題，斐波那契在 1225 年寫成並呈獻給神聖羅馬帝國皇帝－菲特烈二世（FrederickⅡ,1194-1250），史家認為這是斐波那契最高深的一本書，也足以代表斐波那契身為一位數學家的最偉大的成就（Sigler, 1987）。但是之後《平方數之書》就失傳了，人們只能從佩西歐里（Luca Pacioli）的《算術大全》(*Summa*, 1494）中看到書中的片段。一直到 19 世紀中葉史家才在米蘭的圖書館發現《平方數之書》的手抄本。

在《平方數之書》的序曲中，斐波那契首先說明了他寫這本書的緣由。當他回到比薩之後，遇到了宮廷哲學家 John of Palermo，此人向他提了一個問題，也就是書上的命題 17「找一個平方數，使其加 5 或減 5 都為平方數」。斐波那契找出問題的答案後，經過整理與反思，他發現解的本身以及很多其他的問題都可由平方數或與平方數有關的數產生。後來當他聽到宮廷那兒有消息傳來，那就是菲特烈二世對斐波那契的著作感到興趣（此書似為《算盤書》），曾加以閱讀並和學者討論。斐波那契馬上想起了前面的問題，並立刻著手寫成了《平方數之書》獻給菲特烈二世。這位帝王以好學著稱，他相當熱衷學術活動也予以大力贊助，所以在他的宮廷裡總是包圍著一大群飽學之士。在此，讀者不難想見斐波那契為何急於要獻書給皇帝了。

在序曲的最後，有一個很有趣的地方，那就是斐波那契照例寫了下面的一段話「如果任何地方有些許的不恰當，我懇求您的寬容。因為能夠記得每一件事而且永不犯錯的是神而不是人，而且沒有人能無過並在每個地方都縝密周詳。」這種表達形式是斐波那契之個人風格或是當時的時尚，還有待做進一步的考證。

從 HPM 上來考量，由於《平方數之書》裡面的命題有些有前後的關連，有些過於艱深富技巧，因此若教師想運用此文本於課堂教學，必須做些篩選。譬如命題 12：「若兩數互質其和為偶數，如果把兩數及其和三者的乘積再乘上大數減小數的值，所得到的數將是 24 的倍數」，筆者認為難度適中，就是個教學上不錯的選擇，謹供各位讀者參考。

參考文獻

洪萬生（2001），〈當斐波那契碰上孫子〉，《HPM 通訊》第四卷第一期，頁 1-2。
Fibonacci, Leonardo Pisano (1987), *The Book of Squares*. New York: Academic Press, Inc.
Grattan-Guinness, Ivor (1997), *The Fontana History of the Mathematical Sciences.* London: Fontana Press.
Sigler, L. E.（1987）, “Introduction: A Brief Biography of Leonardo Pisano（Fibonacci）’, in Fibonacci (1987), pp. xv-xx.

新到期刊介紹

台師大數學系 洪萬生教授輯

History of Pedagogy of Mathematics *Newsletter* No. 46 (March 2001).

這是國際 HPM 總會所發行的通訊，內容以相關資訊流通為主。本期內容有：(1) 美國版的

HPM 首頁介紹；(2) “Establishment of a History of Mathematics committee in Hungary”（新學會成立）；(3) “The Dangerous Hole of Zeno”（短文）；(4) “The Scientific heritage of Abu Sa’id Ahmad ibn Mohammad ibn ‘Abd al-Jalil al-Sijzi” (研討會報導)；(5) “A report of ICGK 22000, Kashan, Iran”；(6) “Indian Society for History of Mathematics”（學會會員招募）；(7) “Historical Modules Project”（HPM 會員 Victor Katz 與 Karen Michalowicz 的研究計畫之期終報告），以及 (8) “Focus Issue, Mathematics History, *Mathematics Teacher* vol. 93, No. 8, November 2000”（書評）；(9) “ICMI Study on History in Mathematics Education”（書評）等等。（對於本刊有興趣的讀者，可以聯繫洪萬生教授，他被授權在國內發放本刊之複本）。

The British Society for the History of Mathematics *Newsletter* 42 (Winter 2000)

這是英國數學史學會所發行的通訊。該會是目前國際數學史學界最活躍的團體，對於 HPM 的活動之參與，更是不遺餘力。本期內容中之 “Education section” 有關於如下之報導： (1) HIMED 2000 Exeter; (2) Rennes inter-IREM conference, May 2000; (3) HPM 2000 Taipei; (4) Opportunities for history, by Francis Chalmers; (5) PhD abstract, by Abdellah El Idrissi; (6) Education News; (7) ICMI Studies; (8) Education section abstracts。

《數學教育》(EduMath) 第十一期 （2000 年 12 月）

本刊是香港數學教育學會出版刊物 (An Official Publication of the Hong Kong Association for Mathematics Education)。本期要目有：〈香港數學教育史系列：香港數學之形成與開展〉（黃毅英）；〈現實情境作爲數學學習的起點：荷蘭經驗〉（黃家鳴）；〈由 0.999…談起〉（馮振業）；〈重視數學史在數學教育中的應用－從中國古算名題『雞兔同籠』的教學談起〉等等。

斐波那契的數論研究

台師大數學研究所碩士班研究生 葉吉海

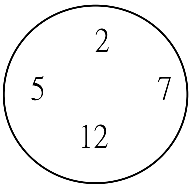
提到斐波那契就想到了兔子問題，但大家可能想不到他寫了一本有關數論的書—《平方數之書》。[1]

斐波那契在《平方數之書》中處理了許多代數的問題，他追隨阿拉伯人在算術的方法上

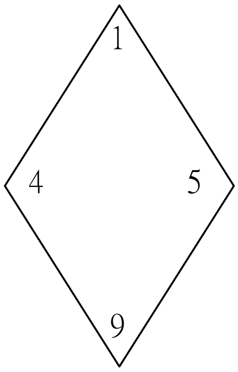
[1]《平方數之書》是一本英譯本，由L.E.Sigler從拉丁文本翻譯成英文，翻譯的母本是Leonardo Pisano所著的《*Liber quadratorum*》。（Leonardo Pisano即我們熟悉的斐波那契，有關斐波那契的生平請看名人櫥窗）L.E.Sigler從Boncompagni那裡取得《*Liber quadratorum*》的拉丁文手抄本，這本書在義大利米蘭市的Ambrosian圖書館沈寂了許久，後由Boncompagni找出。

建立起代數。本書共收集了 24 個命題，由於是文字敘述解題，所以大部分的命題篇幅都不小，有些還特別長。如：命題 6、14、22、24 等。斐波那契針對這些命題長篇敘述解題，真的很不簡單，但覺得讀者看完要懂可能就更不簡單了。

書中的命題論述夾雜著歐幾里得的風格，他以歐幾里得的幾何傳統呈現證明，且用一般的文字來表示不知道的量。雖然他沒有用現代的算式和符號來運算，但他的著作的內容卻可直接地轉譯成現代的算式。他處理論證所呈現的幾何表徵有線段和三角圖形等。至於使用的文字符號以「.□.」作為代表數目的幾何表徵，如：線段「.ab.」代表數目或直接以線段「.a.」代表數目；[2]三角形邊的比例關係表徵各數目間的比例關係。書中還有運用內含數字的圓形、菱形圖樣來「輔助」解題，如命題 14、17，但為何斐波那契提供這些圖示，我們迄今無法得知。



命題 14 之輔助圖形



命題 17 的輔助圖形

這 24 個命題的題型有些與歐幾里得的《幾何原本》相似，如：命題 3 等。也有些與丟番圖（Diophantus）的《數論》（*Arithemetica*）相似，如：命題 22 等。整本書的命題可分好幾個主題。如下所示：

兩平方數之和等於另一平方數	命題 1、3、5、7、8、23
兩數平方差關係	命題 2、21
某平方等於從 1 開始的奇數序列和	命題 4
恆等式$(a^2+b^2)(g^2+d^2)=(ag+bd)^2+(bg-ad)^2$ $=(ad+bg)^2+(bd-ag)^2$的證明與應用	命題 6、7、8、9
平方和公式[3]	命題 10、11
（m，n）＝1，mn(m+n)(m-n)是 24 的倍數	命題 12
平均數	命題 13
三數的平方 congruous 數	命題 14、15、16、17、18、19、20、22

斐波那契以擁有極多的數學知識—自己的和前人的—而名噪一時，今日由這本書看來，的確名符其實。對於某些命題用丟番圖的方法即可解決，但他提供了另一種方法來解題，如命題 14、22 等。此外，對這 24 個命題他除了給出證明之外，有的還給出實例，如：命題

[2]文字敘述線段「. ab. 」代表幾何線段 a b 或「.a.」代表幾何線段 a 。
[3] 平方和的公式有從 1 開始的連續整數和從 1 開始的奇數。

4、5、9、20、22、24 等。因此，這本書就像是一本教科書，斐波那契希望讀者透過他的陳述，能對數學有更深的了解和肯定。當然還包括對他提出挑戰的宮廷學者和神聖羅馬皇帝。

《平方數之書》在 1225 年完成，並題獻給神聖羅馬帝國皇帝腓特烈二世（Frederick II, 1194-1250），這是斐波那契最有深度的一部著作，也足證明他是一個傑出數學家。乍讀這本書以爲此書和歐幾里得的《幾何原本》一樣，有擦拭前人數學成果之嫌。但細讀過後，覺得此書可定位爲一「數學珍寶」，其內容爲利用前人的材料，加上自己獨特的見解，架構出獨樹一格的城堡。這也難怪斐波那契要將這本書視爲「珍寶」獻給腓特烈二世。

雖然《平方數之書》並不像《算盤書》那麼的受人重視，但由此書的確可以證明斐波那契不愧爲歐洲中世紀最偉大的數學家。

參考文獻

Fibonacci, Leoonardo Pisano (1987). *The Book of Squares*. New York: Academic Press, Inc.

.Heath, T.L. *Diophantus of Alexandria: a study in the history of greek algebra.* New York:Dover Publications,Inc.

Morris Kline 原著，洪萬生、林炎全、楊康景松譯(1983)，《數學史—數學思想的發展》上冊。台北：九章出版社。

Fibonacci, Leoonardo Pisano (1987). *The Book of Squares*. New York: Academic Press, Inc.

.Heath, T.L. *Diophantus of Alexandria: a study in the history of greek algebra.* New York:Dover Publications,Inc.

Morris Kline 原著，洪萬生、林炎全、楊康景松譯(1983)，《數學史—數學思想的發展》上冊。台北：九章出版社。

『數學史討論班』資訊

爲了延續『古代數學典籍研讀』（洪萬生開授，台灣師大數學系所）課程之火力，洪萬生特別徵得蘇意雯、蘇惠玉、蘇俊鴻、陳鳳珠、林倉億、黃清揚、葉吉海、楊瓊茹等（新舊）研究生之贊同，特別訂定每週二晚上點讀韓國數學文本，目標是共同撰寫研究報告，並藉以擴大國際數學史學交流的面向。我們選定研讀的第一本文本是南秉吉 (1820-1869) 所撰的《九章術解》，希望透徹瞭解著者對於劉徽注與其他中國算書（含西算中譯本）知識的吸收與轉化。

由於韓國古代數學典籍都以漢字書寫，而且其內容與中國古算關係密切，所以，字面層次的『點讀』問題不大。值得深入探索的，無疑是中韓如何比較，以及韓國數學『自主發展』的意義等等相關問題。換句話說，我們一開始的著眼點可以是交流 (transmission)，但其實更有意義的史學問題，則是數學知識如何轉化 (transformation) 的過程。科學文化的交流與轉化，除了可以跟國際知識活動接軌外，當然也深具本土意義，值得我們全力以赴！

籔內清教授主持京都大學人文討論班，學術成就斐然，雖不能至，心嚮往之。現在且讓我們『東施效顰』，希望踩出自己的腳印來。有志之士，盍興乎來！

名人櫥窗----Leonardo Pisano（Fibonacci）

Leonardo Pisano 在 1170 年生於義大利的 Pisa。他的父親是 Guilielmo，Leonardo 視自己爲 Bonaccio 的繼承者。Bonaccio 很有可能是 Leonardo 的祖先。1225 年，在他的 *Flos* 這本書中，他自稱爲 Leonardo Pisano Bigollo；1240 年，在一個 Pisa 的官方酬庸他爲財政顧問的檔案中，他也自稱爲 Leonardo Pisano Bigollo。很多人想去解釋 Bigollo 的由來，但都徒勞無功。值得一提，是 Fibonacci 這個綽號，可能是源於數學史家 Guillaume Libri 在 1838 開始對他如此稱呼。然而，沒有任何證據顯示 Leonardo 這樣稱呼他自己。

Leonardo 在非洲受過教育並遍遊歐洲和小亞細亞，中年之後，定居於 Pisa。西西里的腓特烈二世（Frederick Ⅱ of Sicily，1194-1250）和宮廷裡的哲學家們都非常崇敬他，現存他大部分的著作都是題獻給他們的。

Leonardo 在他的一部劃時代的鉅著《算盤書》（*Liber abbaci*）中，提供了一段自傳，內容如下：

我和父親會合是在他被派任 Pisa 的海關官員事務時，他讓我習得不可思議的印度阿拉伯數碼及其計算。我非常地喜歡這個知識，以致於在我前往埃及、敘利亞、希臘、西西里島和羅馬帝國領土以外的土地做生意的途中，還繼續研讀數學，而且樂於和當地的學者討論和論辯數學。回到 Pisa 我編輯了十五章節的《算盤書》，內容包含了我認爲最好的印度、阿拉伯、和希臘的方法。我還加上證明，以讓讀者和義大利人們能更瞭解其內容……。

Leonardo 對於《算盤書》交代清楚的意圖，在於引進阿拉伯數碼和算術的方法到義大利。他認爲阿拉伯數碼比羅馬數碼更優越運用於做生意和計算上。甚至在中東回教世界，阿拉伯數碼和計算只被數學家和科學家在他們的科學工作上使用。而不是被生意人和會計師所使用。史學家 S. Goitein 指出，是歐洲人回過頭來教阿拉伯生意人，阿拉伯數碼和計算對於生意和會計的優越性。

除了《算盤書》（*Liber abbaci*）(1202，1228) Leonardo 的數學著作還有 *Practica geometriae*(1223) ，《花朵》(*Flos* ，1225)，*Epsistola ad Magistrum Theodorum*(?)，《平方數之書》(*Liber qudratorum* ，1225)和一本已遺失有關貿易算術的著作 *Di minor guisa* 等。而有關 Leonardo 的後來的生活到死亡很不幸已不可考了。

1. **要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhy@pchome.com.tw**
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhy@pchome.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：**http://math.ntnu.edu.tw/~horng**

不一樣的組合數介紹

國立新店高中 蘇俊鴻老師

排列組合是研究一些基本的計數方法，對機率理論、系統分析、統計學及對局論等等，都是重要的基礎。在現行教材的安排上，不難看出教科書編者對組合概念的理解與教學上採用的策略是透過排列來學習，直接由排列數 P_m^n 引導出組合數 C_m^n 的公式。這樣的論述安排有其便利性，但非介紹組合數的唯一途徑。清代的中算家汪萊(1768-1831)在他的算學著作《衡齋算學》第四冊後半的〈遞兼數理〉中，透過對物件選取配對的觀察，找尋規律性，進而配合堆垛求和的方法，提出組合數 $C_m^n=\dfrac{P_m^n}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}\,(m\le n)$ 的一般性公式，一起來看看汪萊是如何辦到的！

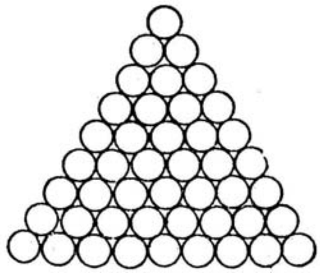
首先，汪萊透過觀察，發現平三角堆的總和與一次取出相異二物的組合數對應的規律性：

以一物為主而兼他物得若干數。至以又一物為主而兼他物即不復兼先為主之物，故所得必少一數。由此遞少遂成三角堆形。……以一物為主而兼他物得若干數，至以二物為主而兼他物，受兼之物已減為主之一，故所得必少一數，由此遞少故根數遞減。

由上文可知汪萊是利用選取的概念，先固定一物爲主，考慮與他物逐一配對的所有情形，接下來先前之物便捨去不用，再另選一物固定，考慮與剩下之物配對的所有情形，以此規則類推下去。以 $n=10$ 爲例，考慮二物相兼的情形，作一說明。

設有 a，b、c、d、e、f、g、h、i、j 等十個元素，依上述規則由 a 開始，因此與其他元素配對個數有九種，接著是 b，由於 a 不算，因此與其他元素配對個數有八種，接著是 c，……，組合的全部情形如圖一所示不難發現配對情形有九種(根數遞減)，每一種情形的個數恰與九層的平三角堆的各層數目一一對應，因此汪萊利用三角堆來求和，顯得自然而然，水到渠成。

Ⅰ	ab	ac	ad	ae	af	ag	ah	ai	aj	9
Ⅱ		bc	bd	be	bf	bg	bh	bi	bj	8
Ⅲ			cd	ce	cf	cg	ch	ci	cj	7
Ⅳ				de	df	dg	dh	di	dj	6
Ⅴ					ef	eg	eh	ei	ej	5
Ⅵ						fg	fh	fi	fj	4
Ⅶ							gh	gi	gj	3
Ⅷ								hi	hj	2
Ⅸ									ij	1



C_2^{10}　平三角堆

圖一：abcdefghi 十個元素一次取二個的全部情形，有沒有發現：
每個字母的配對個數恰與平三角堆的某一層個數相同。

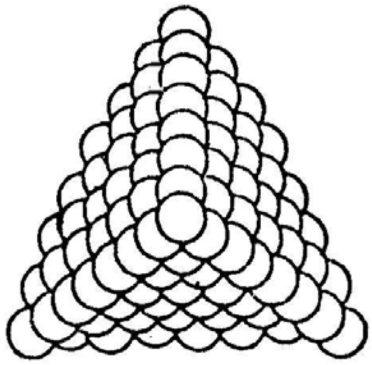
更進一步，汪萊說明一次取出相異三物的組合數，爲何與立三角堆之和相等的原因：

一物為主而兼他物成一根，各物遞減而進成一平三角堆，至二物為主，則此物與彼物相與為二物，以兼他物成一根，此物與彼又一物又相與為二物，以兼他物又成一根，由此遞減

而進，則一物為主已成平三角堆，各物遞減而進遂成立三角堆，由此遞進故乘數遞加。

汪萊的想法是先取二物(二物相兼)開始，其配對情形恰好與成一平三角堆相對應。再來考慮將平三角堆的每一層與第三物配對又可得出一平三角堆，最後再將其整合起來，恰與立三角堆的每一層數目一一對應。續以上例說明，寫出部份配對情形如下，請注意各層之配對情形，

Ⅰ	一	abc abd abe abf abg abh abi abj	
	二	acd ace acf acg ach aci acj	
	三	ade adf adg adh adi adj	
	四	aef aeg aeh aei aej	
	五	afg afh afi afj	
	六	agh agi agj	
	七	ahi ahj	
	八	aij	36
Ⅱ	一	bcd bce bcf bcg bch bci bcj	
	二	bde bdf bdg bdh bdi bdj	
	三	bef beg beh bei bej	
	四	bfg bfh bfi bfj	
	五	bgh bgi bgj	
	六	bhi bhj	
	七	bij	28
Ⅲ	一	cde cdf cdg cdh cdi cdj	
	二	cef ceg ceh cei cej	
	三	cfg cfh cfi cfj	
	四	cgh cgi cgj	
	五	chi chj	
	六	cij	21
		：	
Ⅶ	一	ghi ghj	
	二	gij	3
Ⅷ	一	hij	1



C_3^{10} 立三角堆

圖二：

abcdefghi 十個元素一次取三個的部份情形，有沒有發現：都是由十個取二物的情形再進行第三個元素的配對。並且配對個數恰與立三角堆的某一層個數相同。

均由上例二物相兼情形擴展而得。不過第九層爲 ij，無法與其他物相兼成三物，故捨去。因此立三角堆的根數(層數)必須再減一爲八。(如圖二)

事實上，我們由「十物遞兼分數圖解」可以看出，汪萊利用各種三角堆的和求出相對應的組合數 C_m^n：

> 以所設物數即為各立一數之數。減一數為三角堆之根，乃以根數求得平三角堆為二物相兼之數。又減一數求得立三角堆為三物相兼之數。又減一數求得三乘三角堆為四物相兼之數。如是根數遞減，乘數遞加，求得相兼諸數。……此遞兼之分數也。

配合汪萊所舉的「十物遞兼分數圖解」，此處我們以 $n=10$ 爲例說明上文，十件不同的物件中每次取一物的組合數就是物數 10=C_1^{10} (“所設物數即爲各立一數之數”)。十件不同的物件中

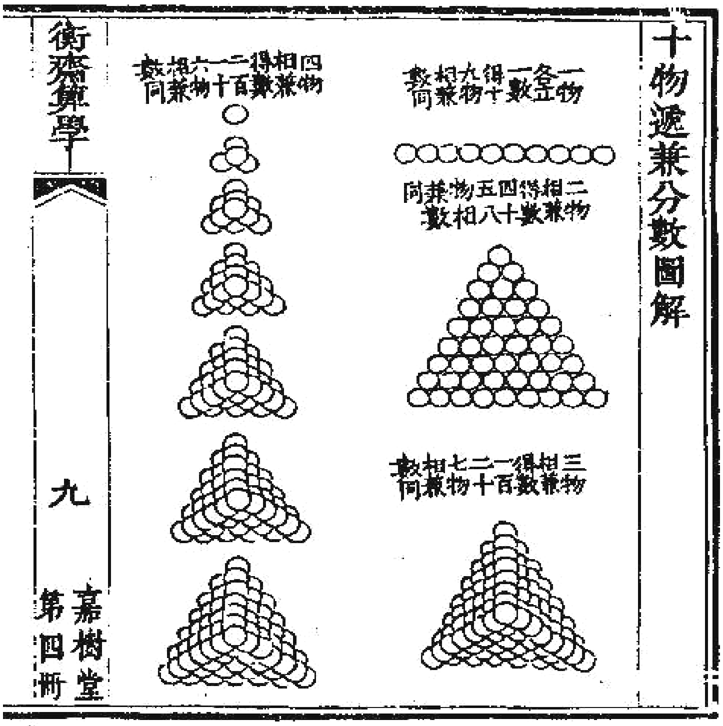
每次取二物的組合數(“二物相兼”)等於一個九層(根數 9=10-1)的平三角堆的總和

$(1+2+3+\cdots\cdots+9=\sum_{k=1}^{9}k=45)$。十件不同的物件中每次取三物的組合數(“三物相兼”)等於一個八層(根數 8=9-1)的立三角堆之和$(1+3+6+\cdots\cdots+36=\sum_{k=1}^{8}\frac{k(k+1)}{2}=120)$。

“如是根數遞減，乘數遞加，求得相兼諸數。” 汪萊類推下去，一次取四件的組合數(“四物相兼”)就等於 7 層(根數爲 7=8-1)的三乘三角堆之和，一次取 5 件(“五物相兼”)的組合數就等於 6 層(根數爲 6=7-1)的四乘三角堆的總和，………。如此一來，便可由各對應的三角堆的總和將各種組合數(遞兼分數) C_1^n ，C_2^n ，……，C_n^n 一一求出。再利用他在書中所給出的三角堆求積通法，我們就能得到

$$C_m^n=\sum_{k=1}^{n-m+1}\frac{1}{(m-1)!}k(k+1)(k+2)......(k+m-2)=\frac{n(n-1)(n-2)........(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

這與現在所學的組合數C_m^n計算公式一致。



圖三：
汪萊的「十物遞兼分數圖解」，出自《衡齋算學》第四冊。可以清楚看出汪萊是透過三角垛來計算組合數的。

汪萊將組合數定義成三角堆的和，使得組合與垛積術建立起關係，方法上是相當獨特的，在實際的教學中也是具體可行，帶給我們另一種體會組合概念的可能。此外在級數的教學中，我們也可以將汪萊的例子納入課外教材的補充，雖說汪萊所用的三角堆求和是屬於階差級數的範疇，但並不難理解。對於級數與其他數學領域的結合，提供一個良好的範例。由此也不難發現在豐富教材內容上，古代文本可以提供教學上更多的揮灑空間，這也是 HPM 努力的目標之一。