HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）
編輯小組：林榮生（西松高中） 黃振順（西松高中） 蘇意雯（成功高中）
邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）蘇俊鴻（新店高中）
洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新北高中）謝佳叡（台灣師大數學系） 林倉億（台師大數學系研究生 ） 陳鳳珠（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第四卷 第二、三期合刊 目錄（2001 年 3 月）

Andrew Wiles vs. 華蘅芳：治算心得的譬喻

台灣師大數學系教授 洪萬生

自從 Andrew Wiles （安德魯 • 懷爾斯）在 1994 年成功地將『費瑪最後定理』 (Fermat's Last Theorem) 變成為一個真正的『定理』之後，有關他的為學風格，便逐漸匯聚了科普寫作的焦點。出版界那兩本即時問世的《費瑪最後定理》，當然是大家耳熟能詳的例子，不過，兩書的作者卻不曾試圖比較懷爾斯與其他偉大數學家的風格。最近，Paul G. Shotsberger 在《數學教師》(Mathematics Teacher) Vol. 93, No. 8（2000 年 11 月）中發表了一篇 "Kepler and Wiles: Models of Perseverance"，針對這兩位數學家的不畏挫折與堅持到底的勇氣，提供了一個簡單但十分深刻的對比， 值得一讀。

在本文中，我們也打算『附庸風雅』，對比懷爾斯與華蘅芳 (1833-1902) 的治算心得。首先，讓我們先引述懷爾斯的一段極生動的自白，其中比喻了他孤獨地在證明『費瑪最後定理』七、八年間的艱苦摸索過程：

> 設想你進入大廈的第一個房間，裡面很黑，一片漆黑。你在傢俱之間跌跌撞撞，但是逐漸你搞清楚了每一件傢俱所在的位置。最後，經過六個月或再多一些的時間，你找到了電燈開關，打開了燈。突然，整個房間充滿了光明，你能確切地明白你在何處。然後，你又進入下一個房間，又在黑暗中摸索了六個月。因此，每一次這樣的突破，儘管有時候，只是一瞬間的事，有時候要一兩天的時間，但它們實際上是這之前的許多個月裡在黑暗中跌跌撞撞的最終結果。沒有前面的這一切，它們是不可能出現的。

另一方面，在一百多年前，中國晚清數學家華蘅芳在研讀李善蘭 (1811-1882)、偉烈亞力 (Alexander Wylie) 所譯的《代數學》 (*Elements of Algebra*，A. De Morgan 原著) 時，也有一段『困而學之』的心路歷程。華蘅芳在接受李善蘭贈送的譯本之後，隨即「披閱數頁外，已不知其所語云何也！」他承認：「蓋其格格不入者，猶之初讀《(測圓）海鏡》時也。」(按《測圓海鏡》是中國十三世紀數學家李冶集大成『天元術』的經典作品。) 於是，他向李善蘭請教，後者卻回應說：「此中微妙，非可以言語形容，其法盡在書中，吾無所隱也。多觀之，則自解耳，是豈旦夕之工所能通曉者哉。」在這種情況下，華蘅芳只有苦思冥索一途了：

> 余信其言，反覆展玩不輟，乃得稍有頭緒，譬如傍晚之星，初見一點，旋見數點，又見數十點、數百點，以致燦然布滿天空。是余之於代數，其明也以漸，非如天元之術，不悟則已，一悟則豁然開朗也。然後知代數之術，其層疊曲折多於天元，故其致用之處，

亦比天元更廣。

誠然，比較上述這兩段自白，的確是有一點『不倫不類』，這是因為懷爾斯總結了二十世紀的數學風華，至於華蘅芳固然是晚清傑出數學家，然而，他的數學成就卻只能放在中國的歷史環境中來加以考察，才能呈現比較有趣的意義。不過，這兩位數學家對於最終領悟相關數學知識之精妙所用的比喻 (metaphor) － 『黑暗的大廈』與『傍晚之星』，卻有異曲同工之妙，值得我們共同來珍惜。

最後，華蘅芳何以能夠『頓悟』中國『天元術』，但卻只能『漸悟』西方『代數學』？我們迄今無從得知。『天元術』這種中國傳統列方程式的方法，從學習認知的觀點來看，是否在『認識論』層面上，根本不同於西方代數學，絕對是 HPM 無法迴避的重要問題，但願將來我們可以交出一點研究成績。

參考文獻：

Aczel, Amir D. (1998). 《費馬最後定理》(中譯本)，台北：時報文化出版公司。

Singh, Simon (1998). 《費瑪最後定理》(中譯本)，台北：台灣商務印書館。

洪萬生（待刊稿），〈華蘅芳學算心得的啓示〉。

華蘅芳 (1885). 《學算筆談》。

Horng, Wann-Sheng (1993). "Hua Hengfang (1833-1902) and His Notebook on Learning Mathematics – *Xue Suan Bi Tan*", *Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal* 2(2): 27-76.

Shotsberger, Paul G. (2000). "Kepler and Wiles: Models of Perseverance", *Mathematics Teacher* 93 (8): 680-681.

數學課堂上的另類話題

台師大數學教學碩士班研究生 陳啟文

談到語言與文字，無庸置疑的，兩者不僅是人類的偉大資產，亦是歷史、文化傳承的重要利器；除了記錄過去人類祖先前仆後繼、可歌可泣的奮鬥史實外，也傳達了現在人與人溝通交流的意念與情感。

曾幾何時，英文字母的「Q」變成對食物很有咬勁、極富彈性的最佳寫照，無獨有偶地 3Q 也在某些非正式的場合出現，成了時下你我皆懂的俏皮話語? 也不知道什麼原因使「大哥大」變成行動電話的代名詞，而「酷」字竟成為「cool」的新翻譯? 於是，不管是對計程車司機文雅且貼切的「運將」稱呼，或是現在年輕人所謂「機車」的不雅話語等等，諸如此類林林總總的詞藻，皆是在特定的時空背景下，多元文化下的衝擊產物，凡此難免引起身處 "*e*" 世代的你我一定的好奇與注意。正如 90 年 1/29 的中國時報人間副刊上斗大的標題「不經一事、不長一字」一文所明示的一樣，在每個字的成形背後，的的確確有著許多故事情節，常能引人入勝，浸淫其中。作者在文中曾提到去年激烈的美國總統選戰「膠著」一詞，以美語來說就有 standoff(相持不下)、dilemma(進退兩難)、gridlock(交通堵塞)等許多用法，而原表

示打孔機上鑽出來的碎紙片 chad 這一罕見詞彙，竟也出籠，粉末登場，用來代替各州郡的選票設計不良、選舉人打錯候選人、或是手弱無力，在選票上打不出孔等問題，一時之間 chad 問題成為電視及報紙爭相採用的字眼。因此一個新詞彙的產生自必是另一股社會文化的注入下的結果，想要了解並使用此一新詞彙，唯有對語言、文字的發展脈絡多予推敲與思索，方有所得。

以中國文字為例，藉由象形、指事、會意、形聲、轉注、假借的六大造字技巧，文字的創造不僅可以綿延不絕，亦能保有文化傳承的特有雋美。如果花點心思探索文字的奧祕，將可發現每個字的成形背後饒富其趣；在了解每個成語、辭彙所隱含的歷史典故後，亦會令人發思古之情。當然我們更相信，一位肩負啓蒙教育的國文老師一定不會放過這些豐富的文化資產與歷史史料，相反地這些正是他們可以大書特書的教學資源。如此，我們可以預料學生在當下流行的雜誌、或傳播媒體上看到「⿰⿱不一羕ㄅㄤˋ」字時，不需說明自當理解而莞爾。

再以英文來說，由於每個辭彙皆有其根源所在，或源自拉丁語系，或延續希臘語系…等等，在經過各種文化的洗禮、交流與淬鍊後，有些保有原來風貌，有些變得更精緻和貼切，因此想要記憶單字、片語，那麼透過對歷史文化的了解，來探討字根與字義將是每個想學好英文者的不二法門。若某位英文老師總是會將 one , two , three , four,…與 uni-,bi-,tri-,tetra-,…的不同，予以簡介，並引用名牌服飾 unicorn 的 uni 與 corn，日常交通工具 bicycle 中的 bi 與 cycle 或是數學中 triangle 的 tri 與 angle…等做說明，如此之目的無它！旨在教學課堂上希望引起學生的學習動機及興趣，傳授應有語言知識，並期望學生在日後遇見了看似相同的字形、字根時，皆能主動出擊，利用工具書來區分其異同之處。話說數年前，猶記 IBM 與 Apple 這兩個眾所皆知的兩大電腦品牌中，「 IBM 曾被用來檢示新出品的辭典或電子辭典是否如業者所標榜的最新版」，而「Apple 一字也被安排在名片〈阿甘正傳〉中讓主角誤認其友人目前正經營蘋果生意，而引來觀眾笑聲」。若能在適當之課程中，將此類生活話題，引入教學情境，訴說其原委，相信對於教學與學習語言亦具裨益。

同樣地，數學既是人類生活下的產物，所使用的詞彙自必和生活上的字彙一樣，無法與歷史文化切斷淵源；其蛻變亦必和歷史文化的演進並行而交織。在課堂上，學生面對新課程，新事物，正如數學家面臨新的問題一樣，唯一不同的是，前者是新手，而後者卻是專家，因此當他們在學習時，老師的介入是必要的。在此我們可以說，在適當之課程，引進數學詞彙，讓學生產生學習動機，並且把它當作接受數學訓練中的開端及探索，將是一項不錯的的教學策略。尤其透過師生同時分享數學詞彙的演進，將更能豐富學生的語言知識及對數學脈絡的認知。當然可能的話，也可以將數學辭彙與日常生活或其他學科之字辭相結合，例如：數學上的直線之斜率，若賦予單位，即是日常生活購物的「單價」，存款的「單利」，也是物理學上所謂的「速度」、「彈力常數」、「歐姆數」…等。如此，藉由語言文字的探討，學生在多了一條自然的學習路徑之餘，也能夠多些人文面向，以及對文化關懷，相信這對他們數學知識的建立以及人格的陶冶是正面的。

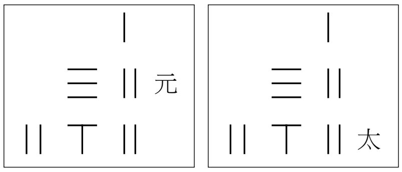
數學所蘊含的豐富詞彙，不勝枚舉，只要有心探索，自有斬穫，不僅能發現其引用之根源，亦能領悟其背後之哲學思維，例如，「代數學」一詞是 1859 年中國清代數學家李善蘭

(1811~1882)和英國人偉烈亞力(A.Wylie,1815~1887)合譯棣莫甘(A. De Morgan,1806~1871)的 Elements of Algebra，所定名的。李善蘭認爲這一門數學的特點是：「以字代數或不定數，或未知已定數。恆用之已知數或因太繁，亦以字代之。」。而在 1873 年清代數學家華蘅芳(1831~1902)與英國人傅蘭雅(J.Fryer,1839~1928) 亦在合譯的《代數術》卷首中指出：「代數之法，無論何數，皆可任以何記號代之。…」，因此現在「代數」一詞便是指運用文字符號來代表數字的一種方法。

而英文Algebra一字乃源自於阿拉伯帝國數學家阿爾・花拉子模(al- Khowarizmi)所寫的一本代數書的標題，其拉丁文的譯名爲Hisab al- jabr w'al muquabalah。其中ai- jabr一字在該書裡，意指還原或移項，即把方程式 $5x-6=3-2x$兩邊同加 $2x$變成 $7x-6=3$，而w'al muquabalah則指兩邊對消，意思是把 $7x-6=3$ 變成 $7x=9$。由於後來w'al muquabalah逐漸被人遺忘，而***al-jabr***便成爲擁有阿拉伯文及拉丁文語源的algebra。值得一提的是***al-jabr***在被引進西班牙時被改寫爲***algebrista***，意思是「接骨師」，到了十六世紀，義大利字的algebra還是指「接骨技術」，關於這一點，阿拉伯中世紀歷史學家Ibn Khaldum曾比較「解代數方程式」和「接骨技術」時指出：

「The various elements are ' confronted', and ' broken' portions are ' set ' and thus become ' healthy '」如果我們將 algebra 解讀爲將兩頭物件加以結合處理的工作，那麼解方程式時，對等號兩邊做還原、對消的工作與接合斷裂成兩邊之骨頭的工作似乎就是一樣的動作，將使之變得更好更棒('healthy')。是否合理? 就不得而知了。

談到一元一次方程式，指的是僅含一個變數且其最高次數爲一次的多項式方程式。回溯中國古代算數與代數，從一世紀東漢時期開始，中國古代數學家即能熟練地利用籌算處理加、減、乘、除、開平方及立方等運算，後來也提出了解聯立一次方程之解法，直到李冶(1192~1279)提出「天元術」方使解方程式更爲便利。所謂的「天元術」中所謂的「元」，指「本來」、「原來」，如《春秋繁露・重政》「是以春秋變一謂之元，元猶原」。因此不難想像「天元術」中將未知數設爲「元」來處理，即如現在的解問題一樣如：「立天元爲一爲某某」就是「設x爲某某」的意思，然後根據題意所給的條件，列出等式，依籌算得到一端爲零的方程式。

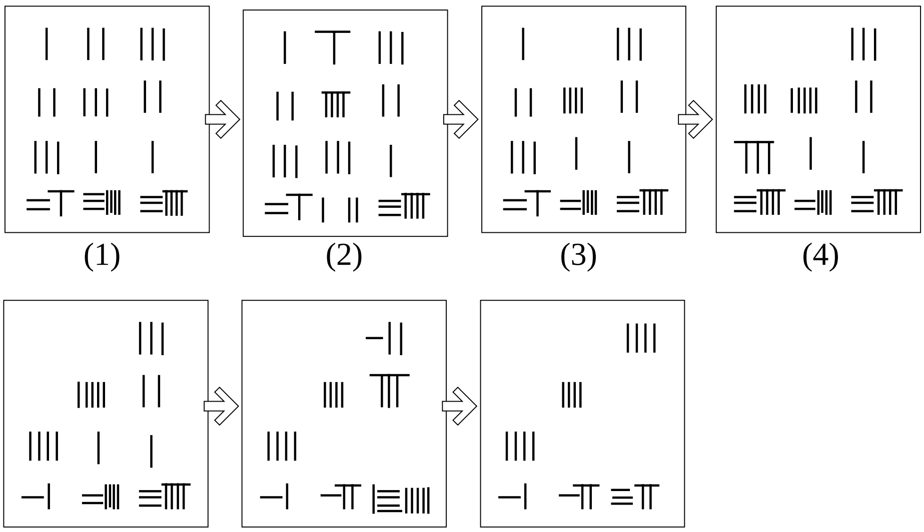


以上圖兩個籌式爲例，「元」字左側是一次項之係數，有時在常數項旁記一個「太」字即表示$x^2+32x+252=0$ 。

至於「方程」中的「方」，猶併也；「程」，爲度量之總稱，如《荀子・致仕》「程者，物之準也」；如果將兩字合併，則可當作設立一定的準式以爲法則，如《管子・明法解》「法者，天下之程式也，萬事之儀表也」。數學史家郭書春認爲「方程的本義就是併而程之。細言之就是把諸物之間的數量關係並列起來，考核其度量標準。」(郭書春 1998)，以其見地最爲明確，可看出「方程」就是把每一個數量並列，如現在所列的線性聯立方程式，再利用現今所謂行運算加以求解，即得所稱之「方程術」。今舉一利用「方程術」解題如下：

「今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？」

籌算如下面七個步驟：



(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

而最後得到的式子(7)，以現在方式表示為：$\begin{cases} 4x = 37 \\ 4y = 17 \\ 4z = 11 \end{cases}$ 因此，

答曰：上禾一秉九斗四分斗之一，中禾一秉四斗四分斗之一，下禾一秉二斗四分斗之三

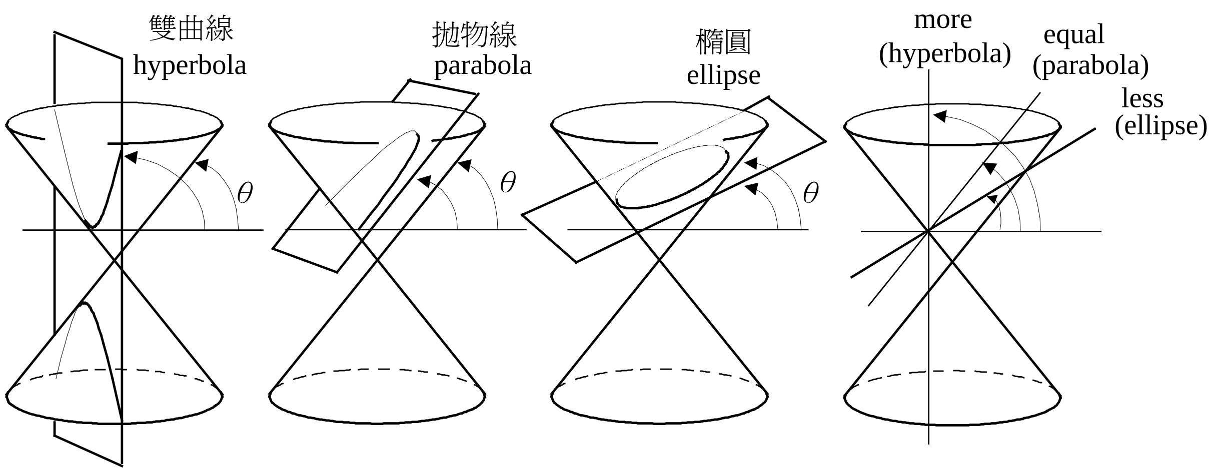
雖然在古中國將「equation」當成「相等式」，但由於清朝李善蘭與偉烈亞力在合譯棣莫甘的《代數學》時，將「equation」譯為「方程」，而華蘅芳與傅蘭雅在合譯《代數術》時，將「equation」譯為「方程式」，因而沿用至今。不過為何把解聯立方程之「方程」當譯名？可能是他們把解equation的還原對消與解聯立方程式的消「元」運算視為同樣技巧，而做這樣的譯名，相信這應是合理的猜測吧！

接著我們來看一看已為研究圖形之總稱：「幾何」一詞吧！該詞原見諸古算書典籍，如「九章算術」中：

「今有田廣十五步，縱十六步，問田幾何？…」，該「**幾何**」為古代算數書上問題結尾常用的詞語，旨在詢問「數量多少」；而 1606~1607 年由義大利人利瑪竇(Matteo Ricci,1552~1610) 以及上海人徐光啓(1562~1633)合譯的前六卷《幾何原本》中稱：**「比例者，兩幾何以幾何相比之理」**並解釋說：**「兩幾何者，或兩數，或兩線，或兩面，或兩體，各以同類大小相比，謂之比例。」**可見他們所謂「幾何」指的就是數和量。再由引言：**「曰原本者，朋幾何之所以然。」**，所以「幾何原本」意謂數與量的原理。因而清以後「幾何」一詞即流行至今成為專門的術語。

至於西方的數學Geometry一詞，原指埃及尼羅泥每年春季氾濫，埃及人爲重新測量土地而發展出的方法，而這種技術傳到希臘，便由表示地球的Geo(earth)，以及表示測量的metron (measure)，這兩二個字合併而成。只不過英國人艾約瑟(Joseph Edkins 1825~1905) 猜想當時採用「幾何」一詞，可能與Geometry中的Geo之發音有關，其可靠性也就見仁見智。但爲何他們會找到〝幾何原本〞來做書名，並以此表示該書之內容，乃以極爲嚴密的邏輯，窮究數與量之原理? 相信艾氏之看法是有其幾分道理，且耐人尋味！

中學課程中，圓錐曲線是十分重要單元，它是雙曲線、拋物線以及橢圓的幾何觀點與代數式的連結點。中文部分實可望文生義，了解物件之**圖形表徵**，但在英文部分 hyperbola(雙曲線)、parabola(拋物線)以及 ellipse(橢圓) 此三字，從字母表面根本看不出個玄虛，若單從一般從字典，亦只能發現 Hyper-表「超過」、「多」之意；para-表「平行」之意；而 ellipsis 爲「省略」之意。究其根源，我們可以知道 hyperbola(雙曲線)、parabola(拋物線)以及 ellipse(橢圓)這三個字是由對圓錐曲線十分投入的 Apollonius 所提出，不過他也是借用畢達哥拉斯學派當初



(圖一)　(圖二)　(圖三)　(圖四)

處理矩形貼合於一線段之問題時，所使用「超過」、「重合」或「短於」的三個術語，即 hyperbole、parabole 及 ellipsis，說得更明白一些就是 more、equal 及 less 之意。

利用上圖可以看到：

(1) 當一截平面傾斜超過(more than)圓錐的傾斜角 θ 其截面爲雙曲線，如圖一。

(2) 當一截平面傾斜等於(equal to)圓錐的傾斜角 θ 其截面爲拋物線，如圖二。

(3) 當一截平面傾斜少於(less than)圓錐的傾斜角 θ 其截面爲橢圓，如圖三。

若與亞里斯多德(Aristotle, 384~322 B.C))在修辭學上爲演講之良窳，建立的三個標準加以比較：

(1) 演說內容離題或誇大即稱 hyperbole。

(2) 演說內容與主題符合且貼切即稱 parable。

(3) 演說太短或未掌握重點即稱 elliptical。

除了呈現該字根之字義外，更可以說數學家在對物件命名上之哲學觀點，也頗值得推敲、玩

味。

最後我們來談談影響人類最深遠的字π。在古中國很早以前就已知道圓周率爲三的近似值，一般認爲到了南北朝方由祖沖之(429~500)進一步求得約率$\frac{22}{7}$，密率$\frac{355}{113}$，自此後世史家莫不視之爲偉大成就，且爲文「歌功頌德」一番。而在西方，乃於 1647 年由Wiliam Oughtred首次取古希臘字 περιφερεια(圓周)，διαμετρος(直徑)第一個字母，在《數學指南》(Clavis Mathematicae,1631) 一書中以$\frac{\pi}{\delta}$代表圓周率，而在 1706 年英國人瓊斯(William Jones,1675~1746)，在《新數學引論》(Synopsis palmariorum matheseos,倫敦出版)243,263 頁上首次創用π代表圓周率。(梁宗巨,1998)

其實，若能在數學課堂上「適當地」引用現有的眾多史料，介紹人類從過去採用實驗法、幾何法，到現在利用分析理論、計算機技巧，試圖揭開π的神秘面紗，一睹其風情萬種的面貌所做的努力，指陳「π」一詞如何的與人類生活密不可分，且與歷史、文化、及科技之演進並行，相信不僅教學相長，而且學生也會獲益匪淺。或許也可以課堂上詼諧的引用一則聲稱「感冒時打噴嚏發出來的〝哈啾〞聲，是「**世界共通的語言**」之廣告詞，告訴學生果真如此！那麼π更可以說是臨駕其上且當之無愧。

以上所談，僅爲浩翰的數學辭藻之一環，其他尚有許多主題可供深究，例如，可公度量與有理數rational number中ratio(比率)之關連；「函數」一辭與Function一字之原有面貌；坐標軸中四個「象限」與周易八卦之緣起；或如「Zeno」問題到無窮記號〝∞〞之故事…等等，俯拾皆是，均可當做本篇的標題所示「數學課堂上的另類話題」，如此，不僅可使學生望而生畏的數學活動更具人性化、生活化，而且也豐富了學生的數學知識，相信這對其學習其他學科亦能發揮應有之功效。

但是如何將古代文本與現有數學史料予以整合，以及如何將已熟悉的數學詞彙資源，配合學生已有的先備知識，將之融入於數學教學上，的確需要一些經驗及技巧的，不過，如果有更多的人願意投入這類的教學活動，並且分享心得，相信你我一堂傳統的數學課，將會增色不少。

參考資料:

李儼、杜石然(1997) ,《中國古代數學簡史》,台北：九章出版社。
林聰源(1995), 《數學史−古典篇》,凡異出版社。
洪萬生(1999) ,《孔子與數學》,台北：明文書局。
梁宗巨(1998), 《數學歷史典故》,台北：九章出版社。
郭書春(1998),《九章算術》,遼寧：教育出版。
《大辭典》(1985), 台北：三民書局。
《Mathematics Teacher》Volume93,Number,November 2000。

數學的語言－化無形為可見

台師大數學研究所博士班研究生　蘇意雯

一、前言

本文主要在於介紹 **Keith Devlin** 的 *The language of mathematics : making the invisible visible*。本書由紐約 W. H. Freeman and Company 於 2000 年出版，筆者是於美國舊金山機場書店購得。由於當時往拉斯維加斯的飛機誤點三小時，筆者有多餘時間在機場閒逛時翻閱到這本書。一看到本書的書名就激起了筆者的興趣，什麼是數學的語言？在任教的過程中，筆者發現有為數甚多的學生為數學所苦，在從小到大的數學學習中，他們找不到任何的趣味，甚至也看不到數學的任何用途。若真的要說數學有用，大概也是幫助考上理想大學的工具罷了。筆者認為，對於前述這些想法，本書就是一本相當好的解答，作者利用深入淺出的方式，把數學對人類生活上的運用及影響，以分門別類的方式，為讀者娓娓道來。

本書作者嘗試描述數學為人類文化一個豐富而生動的部分，因此他設定本書適於一般讀者，即閱讀本書的讀者不需要有任何的數學知識或背景。不過，由於書中免不了涉及了一些數學內容，因此筆者認為此書還是需要有高中程度的數學能力，對於即將進入大學的新鮮人而言，本書是再適合不過了。因為閱讀本書後，同學可對於大學以前所學的數學和之後所要學習的新知識做一番統整比較及預習。同樣的，對於中學數學教師而言，本書亦是一本很好的補充資料。這是一本優良的數學普及圖書，相當值得向各位讀者推介。

二、內容簡介及評論

作者 Devlin 主要是著眼於打破一般人對「數學就是探討『數』的一門學問」這種誤解。全書內容分為八章，分別是：

第一章 Why Numbers Count
第二章 Patterns of the Mind
第三章 Mathematics in Motion
第四章 Mathematics Gets into Shape
第五章 The Mathematics of Beauty
第六章 What Happens When Mathematics Gets into Position
第七章 How Mathematicians Figure the Odds
第八章 Uncovering the Hidden Patterns of the Universe

以下筆者將為讀者一一簡要介紹各章的內容。

第一章主要是討論「數」，作者介紹了數的起源及遠古文明的計數，然後是符號的演進，畢氏定理、不可公度量數的發現進而質數的探討以及同餘概念的介紹，當然在探討數的歷史時無可避免的會提到費馬最後定理，作者也介紹了數學歸納法。簡而言之，第一章就是數論發展的簡介，作者以數學知識為主體，數學史為輔，在各主題之間穿插了一些讀者耳熟能詳的數學史和數學家。從第一章中，讀者就可領會作者充滿歷史旨趣的撰述風格。

第二章著重的是心靈的類型，當然就是邏輯的探討。於是由亞里斯多德的邏輯型式起始，到尤拉以尤拉圓對演繹法提供了幾何的思考方式，思考的型態逐漸變換到代數的型式甚至進入簡單的幾何型式，作者希望藉此讀者能再次感受到數學的威力。接著是布爾（George Boole 1815-1864）的思維，他提出了運用代數到人類理性研究的方法。當時的數學家已逐漸明瞭代數的符號可支配數字以外之實體，以及代數

的方法可被應用到普通算術之外的領域。布爾的貢獻讓人們再次感受到，在數學中，考慮的通常不僅僅是你對事件的看法，而是你說明它的方式。接下來的篇幅是邏輯的一些概念和進展，Hilbert 計畫的源起和落幕，邏輯的黃金時期以及 Chomsky 對語言的革命性理論。Chomsky 開啓了「尋找公理，以用來描述語言的句法結構」之先河，他運用代數捕捉語言的一些類型，展示出語法句子的抽象類型是數學化的，至少，可藉著數學作最佳的描述。除此之外，語言中還另有玄機，那就是在章末，作者所舉的例子---隱藏在我們文字章句中的另類指紋。

每個人的用字遣詞都有固定模式，因此當一篇文章不知作者爲何許人時，只要給予足夠長的文章，數學家就可以判定出作者。1962 年，美國數學家 Frederick Mosteller 和 David Wallace 就使用了這項技巧，解決了《聯邦主義者》(The Federalist) 各篇章由誰主筆的問題。這份文稿共含 85 篇文章，在 1787 年到 1788 年由 Alexander Hamilton、John Jay 和 James Madison 所出版，他們的目標是要說服紐約州的人民認可新的憲法。這份文件對於憲法藍圖的架構，佔有舉足輕重的地位，但由於每一篇文章都沒有標明其作者爲何，因此引起歷史學家的關注。最後，由歷史上的線索考察，大家同意其中的 51 篇由 Hamilton 所著，5 篇由 Jay 執筆，14 篇屬於 Madison。剩下的 15 篇中有三篇公認爲集體著作，另外的 12 篇卻始終無法辨別作者究竟爲 Hamilton 或是 Madison。這時，就輪到數學家上場了。Mosteller 和 Wallace 的目標是尋找書寫中的數字的類型。他們檢查了兩人在一個句子中平均的字數以及常用字如「by」、「to」、「this」等等使用之頻率，終於解開迷團，找出了作者 Madison。由此可知，數學不僅如伽利略所觀察到的---是大自然的語言；數學也可以用於幫助人們了解自我。

平心而論，作者在本章中花了很多心思以及力氣，爲讀者介紹邏輯這門學問。但對於一個邏輯的初學者或者是門外漢而言，可能就會覺得本章有些枯燥。由於第一章是大家耳熟能詳的數論，第二章就跳至略嫌艱深的邏輯，對這樣的安排，筆者覺得可以稍作修改。

第三章談的是在運動中的數學，這也是大家頗爲熟悉的議題，因此整個內容又活潑起來。從 Zeno 的悖論到微積分的發展，作者對萊布尼茲和牛頓的「誰先發明」公案也有精采的描述。接下來是一些無窮級數的例子，其處理方式都是高中生相當熟悉的。斜率的介紹到微分的引進，作者也舉例說明了利用微分方程可描述相當多生命的本質。延續積分之後的是實數及複數的探討，關於這方面在數學史上也佔有舉足輕重的地位，但作者並沒有多所著墨，是美中不足之處。

第四章是探討形狀中的數學，很顯然的，本章就是以介紹幾何知識爲主。因此從土地測量到《幾何原本》，柏拉圖五個正多面體的介紹以及圓錐曲線、三大幾何難題以及非歐幾何、射影幾何等作者都有詳盡的安排。第五章是美感中的數學，也就是對稱型式的數學研究。當然無可避免的，對稱群的觀念就適時的被引進了，接著是 Galois 登場，因爲他發現了一個方程式是否可以根式求解在於此方程式之對稱性，對群論的發展貢獻相當卓越。再接下來就是堆垛的問題，從二維到三維，作者巨細靡遺的爲大家介紹一些數學家對這問題的貢獻。由於本書的宗旨是在強調數學的實用性，因此與現實有關的雪花和蜂巢的型式也是介紹的重點。值得一提的是，本書隨著各章節的需要，附有許多精采的插畫及圖片，頗值得讀者欣賞及參考。

第六章是討論數學與位置之關係，主要是爲讀者引進拓樸學的概念，從七橋問題到尤拉公式以及莫比爾斯帶（Möbius band），作者都有清楚的介紹。還有，想知道在數學上，如何辨別咖啡杯和甜甜圈嗎？作者在本章中也會給你滿意的答案。第七章是有關機率問題的處理，這也是一般人對於爲何數學與生活有關，最容易聯想到的部分。對於本章中的數學史部分，作者描述的相當精采，對於大數法則、貝氏定理、數學期望值等一些重要的機率觀念也有詳細的解說。唯一的瑕疵是巴斯卡三角形的介紹部分略顯不足，並沒有充分顯現此三角形的真義。但瑕不掩瑜，章末對於

數學對日常生活的運用，以及一些現代數學家的理論，例如 Black-Scholes 公式，都能深深地吸引讀者的注意力。

Black-Scholes 公式是由 Fischer Black 和 Myron Scholes 於 1970 年創造，而由 Robert C. Merton 所發展。由於此貢獻，Scholes 和 Merton 連袂獲得 1997 年的諾貝爾獎，此時 Black 已於 1995 年辭世。這個公式可以告訴投資人以何種價格投資金融衍生商品，例如國內現在最風行的股票。利用數學去評量金融衍生商品，這種概念相當具有革命性，因此 Black 和 Scholes 在出版其研究成果時，著實也遇到不少困難。他們首次的嘗試是在 1970 年，卻被芝加哥大學的《政治經濟學期刊》及哈佛的《經濟和統計評論》雙雙拒絕。直到 1973 年，在芝加哥大學一些重量級人士施壓於編輯之下，《政治經濟學期刊》才出版了這份論文。

反觀企業界就不會如學術象牙塔般短視，在出版後六個月，德州儀器已經把這個公式納入其最新的計算機裡，並在《華爾街期刊》上，以半頁的廣告為這項新特色大作宣傳。於是，在現代危機管理上，包括保險、股票操作和投資等，人們已可用數學去預測未來。在金融市場上的名言是：你能承受的風險愈大，所能獲得的潛在利潤也愈高。運用數學沒有辦法規避風險，但是它能告訴你將承受多少風險，而幫助你決定一個合宜的價格。數學之用可見大矣！

最後一章是探討數學和宇宙的關係，這包含了天文學、力學、電磁學等等。就如同作者在文末所言，隨著宇宙的運行，數學也是一直前進的，而探討宇宙所蘊含的數學模式也將永不停歇。

綜觀全書，筆者認為，藉著本書作者的生花妙筆，可讓大家了解「數學是什麼？」、「數學何用？」。噴射機為何能在空中飛行？我們沒有看到任何支撐，是數學上白努利的方程式做了解釋。物體落下是因為重力，但重力只是一個空洞的名詞，必須藉著牛頓的數學賦與它意義。這就是本書副標題「化無形為可見」的意含。另外，Devlin 在書中，也費了相當多的心思安排一些數學知識結構，因此，閱讀本書除了讓讀者領略數學之美外，在數學知識的增進上應也有所幫助。此外，作者在章內主題的探討上，以歷史進路安排，帶領讀者貼近數學文化的豐富樣貌，相當引人入勝，這種編排方式或也可對照於教師授課的參考，其實，這也正是 HPM 的目標。這樣的一本好書，讓我們期待它的中譯本儘速問世。

利瑪竇小傳

台師大數學研究所碩士班研究生 黃清揚

明季利馬竇徐光啟兩公造像圖

明萬曆三十八年（公元一六一〇年），耶穌會士利瑪竇（Matteo Ricci）於北京病逝，此時耶穌會在中國的信徒已達二千五百人（傅衣凌，433 頁）。利氏是來華成功進行傳教活動之第一位耶穌會傳教士，其居華二十八年，來華目的雖為傳教，但攜來的西洋天算，卻對中國數學的發展產生一定的影響力。

生平概述

利瑪竇一五五二年（嘉靖三十一年）十月六日出生於義大利的馬切拉塔（Macerata），十六歲（1568）時其父送他到羅馬學習法律，

三年後（1572）入顯修會神學校（Collegio Romano）就讀，並在丁先生（Christophorus Clavius,1537-1612）門下學習數學。一五七七年（萬曆五年）利瑪竇請願來華傳教，於一五八二年（萬曆十年）抵廣東香山墺，先學習中文。次年（1583）入廣東肇慶，與羅名堅（Michele Ruggieri,1543-1607）會見兩廣總督郭應聘，獲准定居「遷花寺」，陳列西洋器物、書籍、地圖，介紹西方的科學文明，博取官紳士民好感，以利傳教。萬曆十七年由肇慶往韶州，建立首座教堂，二十二年（1594）由韶州而南雄而南京。二十三年（1595）北行到南京，折回南昌，建立第二座教堂，改穿儒服，自稱「西士」。利瑪竇於南京識徐光啓。二十六年（1598）隨新補禮部尙書王忠銘等至北京。二十七（1599）年被遣回南京，在南京建立第三座教堂。萬曆二十八（1600）年再入北京，入貢方物，神宗欽賜官職，並賜第於順承門（後改名宣武門）外居住。在北京與徐光啓共譯《幾何原本》六卷，與李之藻共譯《同文算指》等書。是爲西洋曆算輸入中國之始。利瑪竇於萬曆三十八年閏三月十八日（1610 年五月十一日）病逝。

時代背景

利瑪竇來華期間，正是明王朝史上的重要關鍵期。神宗（萬曆）即位之初，首輔張居正的輔佐，使明朝的統治一度出現中興的景象。但萬曆十年（1582）張居正病死，在富豪強貴的攻訐之下，張居正死後兩年被清算，改革被罷除。從此以後，萬曆已經實際掌握了政府的大權，但廢長立幼事件與皇帝本身的性格使得萬曆採取長期不理政事，不見朝臣達二十餘年。

萬曆中後期明朝一直處在嚴重的內憂外患之中。外患方面，倭寇在東南沿海地區的侵擾失敗後，便轉向北侵朝鮮。萬曆二十年（1592）六月，日本豐臣秀吉率水陸軍凡二十萬人進入朝鮮，明派兵入援，後於二十二年（1594）九月與侵朝日軍簽訂停戰合約。萬曆二十五年（1597）二月，日軍再次侵入朝鮮，恰豐臣秀吉於二十六年七月九日病死，明朝得以擊潰日軍。明朝雖得勝，但卻暴露其政治腐敗及政府機制的低能。經過此次戰役後，明朝的邊防更加虛弱，政治更趨危機。而此時更大的外患來自北方，女真族部落首領努爾哈赤在白山黑水間發難，相繼控制了東北女真的全部勢力。對明朝在遼東的統治勢力，形成了嚴重的威脅。與此同時，爲了防禦北方邊患，明朝也非常需要關於火砲方面的知識。

內政方面，宮廷的奢侈浪費給國家財政增加莫大負擔，臨時性的田賦加派不時出現，水旱災頻仍卻不管理和倡修，因而導致長期的災荒以及接連不斷的人民騷動。但值得注意的是，嘉靖、萬曆時期農業生產力提高，推動了商業和手工業的發展，使得這一時期商品經濟的繁榮，形成了一個高潮。而東南沿海地區民間的私人海上貿易因突破官方禁令亦在此時迅速發展。

嘉靖、萬曆時期代表社會經濟變化的特徵之一便是思想的開創和變革，代表人物爲李贄（1527-1602）。李贄本身爲儒家的信徒，由於對官僚政治不滿，所以絕意仕徒，進而寫書批評政治。他的著作，著眼在把讀書人的私利與公眾的道德相融合，而解釋經典則全憑個人的直覺和見解，再加上本身的經歷，使他對問題的了解更爲深刻。因此，著作廣受讀者的欣賞。但這卻與當時的正統儒家觀念格格不入，並爲他招來殺身之禍。黃仁宇《萬歷十五年》有段話寫得很深刻：

如果知識份子放棄了正統的儒家觀念，則王朝的安全會立即受到威脅。知識份子在政治上是政府中的各級官員，在經濟上是中等以上的地主，正統的儒家觀念是維繫他們的紐帶，除此而外，再無別的因素足以使他們相聚一堂，和衷共濟。（278 頁）

1602 年，李贄在獄中自刎而死。但其對正統儒教的挑戰直接或間接影響明末的某些思想家和文學家，「士大夫多喜其書，往往收藏」（顧炎武：《日知錄》卷十八）（傅衣凌，428 頁）。在這種背景之下，不難想像因西方天主教的傳入，有人主張儒耶結合的思想了。也因此，天主教的傳入才能開展其第一步。

另外在算學曆法方面，當利瑪竇到達中國時，明朝所採用的曆法爲大統曆與回回曆。前者直接依據元郭守敬等人的授時曆（1280），極少改動；後者爲公元十三世紀由阿拉伯國家傳入，爲回民應用的曆法。經過長期沿用且甚少修改，到明末這些曆法已有差時，特別明顯的是日月蝕的預告，但欽天監官員無法修改。《明史記事本末》中記載「明神宗萬曆二十四年（1596）按察司簽事邢雲路奏：大統曆刻差宜改。欽天監正張應候等疏詆其誣。禮部上言應從雲路所請，及令督欽天監事，仍博訪通曉立法之士酌定，未果行。」（李儼、錢寶琮，261 頁）。耶穌會傳教士利瑪竇在此時看到這一點，適時介入，企圖利用改曆結交知識份子，獲得皇帝的信任，來實現傳教目的。而本身對天文學修養不足，曾屢函羅馬耶穌會，請派精通此學之教士前來（王萍，9 頁）。

傳教與西學翻譯

十六世紀爲耶穌會傳教士來華活動最顯著的時期，但在利瑪竇之前並未取得有效成果。利氏來華後耶穌會士採取「尊孔聯儒」的策略，把交往的範圍從一般民眾轉向士大夫階層（傅衣凌，433 頁）。他們的傳教策略是通過科技知識來傳播天主教義，許多高官名流與之往來酬答。著名的有徐光啓（1562-1633）、李之藻（1565-1632）等人。向中國學者講說傳授之餘，利瑪竇亦兼事著作及譯書。除了宣揚天主教義之《天主實義》、《二十五言》、《畸人十篇》等作品外，更有講求天文曆算之書，如《幾何原本》、《同文算指》、《萬國輿圖》、《乾坤體義》、《測量法義》等書。其中以《幾何原本》與《同文算指》爲最。

《幾何原本》六卷爲利瑪竇根據丁先生的十五卷拉丁文評注本《幾何原本》（十四、十五卷爲後人所補）與徐光啓共譯，由利氏口授，光啓筆授，歷時三年，於萬曆三十五年（1907）成書付梓。值得注意的是，徐光啓本欲將全書一次譯完，但利瑪竇主稍待，此記載於＜譯《幾何原本》利瑪竇序＞：

> 太使（徐光啟）意方銳，欲竟之。余曰止，請先傳此，使同志者習之，果以為用也，而後徐計其餘。太使曰然。是書也，苟為用，竟之何必在我。遂輟譯 而梓，是謀以公布之，不忍一日私藏焉。[1]

[1] 利氏之考量，其實是有私心，因爲利瑪竇的宗旨不在於傳播數學。就在籌備譯《幾何原本》的過程中，利馬竇在 1605 年 5 月 10 日向羅馬報告中稱：現在只好用數學來攏絡中國的人心。（李儼、錢寶琮，262 頁）

這使得徐光啓感慨道：「續成大業，未知何日？未知何人？書以俟焉。」（見譯《幾何原本》徐光啓跋）。此感慨亦果真應驗，直到清末（二百五十年後）李善蘭（1811-1882）與偉烈亞力（Alexander Wylie,1815-1887）合作才完成此一工作。[2]站在傳教士的眼光來說，《幾何原本》六卷爲第一部譯爲中文之西方科學書籍，利氏若能讓中國學者重視此書，即可將西學的地位確定，對於傳教事業影響甚大。故利瑪竇的謹慎確有其道理。

《同文算指》爲利瑪竇授，李之藻演。全書根據丁先生的《實用算術概論》（Epitome Arithmeticae Praticae,1583）與程大位的《算法統宗》（1592）而編譯，成書於萬曆四十一年（1613）。全書分爲「前編」、「通編」、「別編」共三編。在自序中李之藻說道：

> 「前編」舉要，則思已過半；「通編」，稍演其例以通俚俗，間取《九章》補綴而卒不出原書之範圍；「別編」，則測圜諸術，存之以俟同志。

書中內容主要記載西法筆算，並採用中西算術之精華，自加減乘除以至開方，無所不備，並附有習題。此書爲介紹歐洲筆算的第一部著作，是歐洲近代數學傳入中國的開始，對往後來的算術有深遠的影響。

評價與結語

綜觀來看，利瑪竇之所以能成功傳教，原因在於其融合儒家思想，介紹西方科學，博取士大夫階層之好感，進而獲取朝廷之傳教許可。再加上利用改曆此一大好機會，作爲傳教以及其他活動的重要關節。此種情勢下，利氏認爲西方天算之學終有被中國採用的一日。而認同西學的士大夫與後來的傳教士所走的路的確應驗了利氏的想法，利瑪竇的影響可見一般。但我們也必須清楚這些只是利瑪竇的手段，並不是其最想要的。雖然西方天算終爲中國接受，但相對的，耶穌會最終目的－傳教卻未嘗順利。

參考書目

王萍（1980），《西方曆算學之輸入》，台北：中研院近史所。
李儼（1980），《中國算學史》，台北：台灣商務印書館。
李儼、杜石然（1992），《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。
李儼、錢寶琮（1998），《李儼錢寶琮科學史全集》第五卷，瀋陽：遼寧教育出版社。
黃仁宇（1995），《萬曆十五年》，台北：台灣食貨出版社。
郭書春主編（1993），《中國科學技術典籍通彙　數學卷》第四、五冊，鄭州：河南教育出版社。
傅衣凌主編，楊國楨、陳支平著（1999），《明史新編》，台北：昭明出版社。
Engelfriet, Peter M. (1998). Euclid in China: the Genesis of the First Translation of Euclid’s Elements books Ⅰ-Ⅵ （Jihe yuanben;Beijing, 1607）& its Reception up to 1723. Leiden / Boston / Koln: Brill.

[2]不過，他們所根據的母本都是尚待查證編者之英文版本。

阿波羅尼奧斯問題

三民中學 楊建泰老師

問題是由公元前 3 世紀下半葉古希臘數學家阿波羅尼奧斯提出的幾何作圖問題，載於他的《論接觸》中，惜原書已失傳。後來公元 4 世紀學者帕波斯記載了其中所提出的一個作圖問題：設有 3 個圖形，可以是點、直線或圓，求作一圓通過所給的點(如果 3 個圖形中包含點的話)並與所給直線或圓相切。當中共有 10 種可能情形，其中最著名的是：求作一圓與 3 個已知圓相切，常稱爲阿波羅尼奧斯問題(***Apollonius*'*problem***)。據說阿波羅尼奧斯本人解決了問題，可惜結果沒有流傳下來。

1600 年法國數學家韋達在一篇論著中應用了兩個圓相似中心的歐幾里得解法，通過對每一種特殊情況的討論，嚴格陳述了該問題的解。後來牛頓、蒙日、高斯等許多數學家都對這一問題進行過研究，得到多種解決方法。其中以法國數學家熱爾崗約於 1813 年給出的解法較有代表性。以上所說都是通常的尺規作圖法。如果放寬作圖條件限制，則有多種簡捷的解法。

阿波羅尼奧斯〔Apollonius of Perga〕約公元前 262—約前 190，古希臘數學家、天文學家。生於小亞細亞南岸的佩爾格。年青時求學於亞歷山大，跟隨歐幾里德的後繼者學習。後來在那裏教學並在天文學研究中漸有名氣。一度到過小亞細亞西岸的帕加馬，在那裏的學校和圖書館工作過，結識歐德莫斯等人。阿波羅尼奧斯常和歐幾里德、阿基米德合稱爲亞歷山大前期三大數學家。

阿波羅尼奧斯的主要成就是建立了完美的圓錐曲線論，總結了前人在這方面的工作，再加上自己的研究成果，撰成《圓錐曲線論》八大卷，將圓錐曲線的性質網羅殆盡，幾乎使後人無插足的餘地。《圓錐曲線論》是一部經典巨著，可以說是代表了希臘幾何的最高水平。自此以後，希臘幾何便沒有實質性的進步。直到 17 世紀的帕斯卡和笛卡兒，圓錐曲線的理論才有所突破。以後便向著兩個方向發展，其一是解析幾何；其二是射影幾何，兩者幾乎同時出現。然而這兩大領域的思想和基本原理，都可以在阿波羅尼奧斯的工作中找到萌芽。

《圓錐曲線論》現存前四卷希臘文本和其次三卷的阿拉伯文本。書中首先証明了三種圓錐曲線都可以由同一圓錐體截取而得，改變了過去要用三種不同的錐體截取的方法，繼而給出拋物線、橢圓、雙曲線，正交弦等名稱，取代了過去的直角圓錐曲線、鈍角圓錐曲線和銳角圓錐曲線的叫法。

他的其他著作有《截取線段成比例》、《截取面積等於已知面積》、《論切觸》、《平面軌跡》、《傾斜》、《十二面積和二十面體對比》、《無序無理量》和《取火鏡》等。其中《論切觸》中給出『阿波羅尼奧斯問題』，即作一個圓與三已知圓相切。《取光鏡》証明了拋物面鏡的聚焦性質。他還在天文學中有建樹，証明了求行星留點的方法，將幾何學應用於天文研究。

和阿基米德比較，阿波羅尼奧斯注意圖形的幾何性質，而後者側重數值計算，使之成爲積分的先驅。

西松高中 蘇惠玉老師

爲什麼是阿基米德開平方法？

高中理科下冊〈1-3 平方根的近似值〉中提到：阿基米德在求圓周率需要開平方，用到的是下列的不等式：

$$w \pm \frac{p}{2w \pm 1} < \sqrt{w^2 + p} < w \pm \frac{p}{2w}$$

辦公室的同仁問我：阿基米德是在什麼樣的情形使用的？

事實上，阿基米德只給出$\sqrt{3}$的近似值：

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

他並沒有做任何的解釋，說明這些近似值是怎麼得到的。惠爾慈（Hultsch）利用與希臘幾何學家同樣的分析方法，來說明阿基米德應該是如何得到這樣的近似值的。若將這兩個近似值分析及變化一下，就可以知道其關連性。$\frac{265}{153} = \frac{1325}{15 \cdot 51}$，而$\frac{1351}{780} = \frac{1351}{15 \cdot 52}$，所以可得

$$\frac{1325}{51} < 15\sqrt{3} < \frac{1351}{52}$$

而這等價於

$$26 - \frac{1}{51} < 15\sqrt{3} < 26 - \frac{1}{52}$$

但是，

$$26 - \frac{1}{52} = \sqrt{26^2 - 1 + (\frac{1}{52})^2} > \sqrt{26^2 - 1} = 15 \cdot \sqrt{\frac{676 - 1}{225}} = 15\sqrt{3}$$

因此，惠爾慈仿照希臘方式，可得到這一不等式：$w \pm \frac{p}{2w \pm 1} < \sqrt{w^2 + p} < w \pm \frac{p}{2w}$。T. L. Heath 認爲，毫無疑問地，阿基米德實際上也發現並證明了同樣的結論。他認爲下列的事實確定了這個假設的可能性：

(1) 海龍(Heron，公元 1 世紀)的某些近似值說明，他知道並且經常用公式 $\sqrt{w^2 + p} \approx w + \frac{p}{2w}$。

(2) 阿拉伯人阿爾卡西（Alkarkhi，公元 11 世紀）吸收了希臘原始原始資料之後，使用了公式$\sqrt{w^2 + p} \approx w + \frac{p}{2w + 1}$

事實上，在更早的巴比倫人找平方根的近似值時，就已經用到了這樣的式子了。例如找$\sqrt{17}$的近似值時，因爲 4 比$\sqrt{17}$小，而$4 \times \frac{17}{4} = 17$，所以$\frac{17}{4}$應該比$\sqrt{17}$大。因此，

$\sqrt{17}=\sqrt{4^2+1}\approx\frac{1}{2}(4+\frac{17}{4})=4+\frac{1}{2\cdot 4}$。而在目前所知中國最古老的數學書《算數書》的 53 題：

> 田一畝方幾何步？曰：方十五步三十一分步十五。術曰：方十五步不足十五步，方十六步有徐（餘）十六步。曰：并贏（盈）、不足以為法，不足子乘贏（盈）母，贏（盈）子乘不足母，并以為實，復之，如啟廣之術。

此題爲求解方田一畝的邊長。其中一畝等於 240 步，240-225(15^2)=15 和 256(16^2)-240=16，解法爲 $\frac{15\times16+16\times15}{16+15}$。此爲平方根近似値的另類解法，『等價於』逼近公式

$\sqrt{w^2+p}=w+\frac{p}{2w+1}$。(例如，$\sqrt{240}=\sqrt{15^2+15}=15+\frac{15}{15+16}=\frac{15\times16+16\times15}{15+16}$)。

因此，Heath 認爲，幾乎不可能是偶然地有公式 $w\pm\frac{p}{2w\pm1}<\sqrt{w^2+p}<w\pm\frac{p}{2w}$，這個式子給我們提供了想要的東西，從而得到阿基米德 $\sqrt{3}$ 的兩個近似値及其相互的關連。

參考文獻

Heath, T. L. (1912), 《阿基米德全集（The Works of Archimedes）》，朱恩寬，李文銘等譯，陝西科學技術出版社。

Bunt, L. H. *et al* (1988), *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, INC.

洪萬生(2000), 〈《算數書》初探〉，待刊搞。