HPM通訊

第四卷 第十二期 目錄（2001年12月）

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

『古代數學文本在課堂上的使用』研究心得

台師大數學系 洪萬生教授

在 1999 年 8 月 1 日至 2001 年 7 月 31 日兩年期間內，我有幸榮獲國科會贊助，執行特別研究計畫『古代數學文本在課堂上的使用』，茲將期終報告部份內容改寫披露於此，敬請大家指教！

本計畫構想來自筆者承諾籌辦 HPM 2000 Taipei – “History in Mathematics: A challenge for the new millennium” (ICME-9 之 HPM 衛星會議)。為了鼓勵國內學者與中學教師在這一次盛會中現身，筆者特別利用這一計畫，訓練參與的中學教師以發展教案的方式，在課堂上適當地融入古代數學文本，並指導敦促他（她）們將報告提交大會正式發表。

在本計畫執行的第二年，有鑑於參與人員對『教案』的撰寫略見疲態，筆者遂決定增列『學習工作單』與 “Work Card” 之設計，藉以維持他（她）們的士氣與動量。另外，也要感謝本所『教學碩士班』一些研究生的中途加入，他（她）們以非常豐富的教學經驗，帶來了很多實質的回饋，提升了這些成果廣泛應用的可能性。

由於參與人員都（曾）任教於中學或職校，因此，我們共同完成的 29 篇報告總是洋溢著教學關懷。更值得欣慰的，是他（她）們已經深刻地體會了『貼近』古典文本的意義。一方面，這些文本在課堂上的恰當使用，讓他（她）們的學生充分暴露在數學的人文趣味之前，為數學教育的價值打開了一個嶄新的面向。另一方面，也由於他（她）們深入探索這些文本中的『數學知識』之『在脈絡意義』，因此，也有機會見證人類『認知』與歷史文化之不可須臾離之。

這 29 篇報告中不僅包括了『教案』，還包括了『學習工作單』、“Work Card”，乃至於『虛擬演講稿』，可以說是琳瑯滿目，呈現了多元表達的形式，為本計畫最想達成的人文關懷，提供了最佳註腳！事實上，這也是本計畫的目的！我們期待中學教師對於我們所完成的報告，都可以輕易上手，讓 HPM 的理想可以實現。

就 John Fauvel and Jan van Maanen 所編著的 *History in Mathematics Education: An ICMI Study* (2000)之第九章 “The use of original sources in the mathematics classroom”（由 Hans Niels Jahnke 主持撰寫）所綜合之內容而言，本計劃作為一個將文本引進教室的具體實踐方案，可

以說是一個「政治正確」的選擇。在此一計劃的執行過程中，筆者始終以數學史學對待文本的標準來要求參與者，希望他（她）們謹記：只有切實把握文本，才能在以「歷史方法」解讀學生的學習特性時，不致於走冤枉路。在這一方面，參與者的數學史學之修養顯然提升甚多！不過，由參與者所提供的「教案」中，我們也發現他（她）們對於教學策略中的 “Analysis of a source and cognitive debates”（上引書 p. 314）中著墨不多，此外，對於「文本」的介入課堂活動可能引發的認知困擾也不夠警覺，這些都必須在以後有機會執行類似計劃時謀求改進之道！同時，由於配合實際教學進度，所以單元分布過分集中，可能對於不黯數學史學的教師，造成一些資源取得不易的困擾。

不過，由於參與研究人員都已經完全體會『貼近』古代數學文本所帶出的踏實感覺，所以，如果我們打算開始規劃 HPM 結合認知學習的研究，目前的時機應該是比較成熟了。至於我們的憑藉，無非是本計劃所培養的 HPM 團隊已經成形，他（她）門不僅通曉 HPM 學門的國際規格，而且在中外數學史學方面的素養，也在向專業水準拉齊之中。假以時日，他（她）們必然會成爲在國際 HPM 發聲的台灣團隊！

本計畫獲得張靜嚳教授（國立彰化師範大學科教所）、林炎全教授（國立臺中師範學院數理教育系），與洪碧芳教授（僑光技術學院資管系）的協助，以及蘇意雯、蘇惠玉、蘇俊鴻、邱靜如、顏富明、陳鳳珠、林倉億、唐書志、洪秀敏、謝佳叡、廖惠儀、彭君智、李信仲、葉吉海、黃哲男、方吉雄、洪誌陽、陳彥宏、白家結、林裕意、黃清揚、楊瓊茹、林月娟、王文佩、董芳成、郭慶章、陳啓文、陳敏皓、王連發、阮錫琦、陳威男、吳任哲、陳冠良、洪明賢、張靜宜等人的熱情參與，謹此表達誠摯的謝意。當然，國科會的大力支持，也必須在此再度申謝。

最後，我們還想追溯本刊的創立與發行，並且對它的影響說幾句話。從一九九八年十月開始，我們利用國科會贊助承辦HPM 2000 Taipei之名義，發行《HPM台北通訊》（後改爲現名），由蘇惠玉（北市西松高中數學科教師）義務擔任主編，每年發行十期（其中二、三月；八、九月合刊，作者一律不發稿費），每期以A4（開式）紙張印行，頁數在 8-20 之間。限於經費，我們只能以限量的平面印刷形式（非賣品）流傳。不過，我們也佈置了下列網址：http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng，開放給所有人免費閱覽、列印使用。本計畫第二年的經費，也對這一份刊物的印製與發行，提供了不可缺少的協助。

此一刊物不僅惠及國內有志於 HPM 教學的師範院校教授與中小學數學教師，同時，也在海外華人 HPM 社群（如香港蕭文強、鄭振初；上海張奠宙；加州李信明）獲得了極大的迴響。此外，由於我們也關注數學史學本身，因此，漢簡《算數書》（不晚於公元前 186 年）的釋文一公諸於世（2000 年 9 月），我們的編輯群立刻進行了校勘與研究，在最快的時間內發行了『《算數書》特刊』（第三卷第十一期，2000 年 11 月）。這一特刊廣受中國數學史家（譬如郭書春、郭世榮與彭浩等）重視，說明我們的 HPM 團隊已經擁有全方位的研究視野了。

參考文獻

Berggren, J. L. (1990). “Proof, Pedagogy, and the Practice of Mathematics in Medieval Islam”, *Interchange* 21 (1): 36-48.

Calinger, Ronald ed. (1996). *Vita Mathematica*. Washington, D. C.: MAA.

Fauvel, John & Jan van Maanen eds., (2000). *History in Mathematics Education: An ICMI Study*.

Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers. 特別是第 5、9 兩章。

Grattan-Guinness, Ivor ed. (1987). *History in Mathematics Education*. Paris: Belin.

The Inter-IREM Commission (1997). *History of Mathematics / History of Problems*. Paris: ellipses.

IREM de Montpellier ed. (1995). *First European summer University Proceedings*. Lunel: Presses de Lunel.

Katz, Victor ed. (2000). *Using History To Teach Mathematics*. Washington, D. C.: MAA.

The Mathematical Association (1998). *Mathematics in School* Vol. 27, No.4 (September 1998): History of Mathematics - extra special issue.

NCTM (2000). *Mathematics Teacher*. Vol. 93, No. 8 (November).

附錄

筆者在執行本計畫期間共完成 21 篇相關學術論文、HPM 推廣文章 17 篇，並指導參與本計畫之人員向 HPM 2000 Taipei 提交英文報告 6 篇、中文報告 5 篇。最後，再與他（她）們合作開發，完成 29 篇報告。謹陳列如下，敬請大家不吝批評與指教！

學術論文：

1. 2000.〈《書目答問》的一個數學社會史考察〉,《漢學研究》第十八卷第一期：153-162。
2. 2000. "Disseminating Mathematics in Late Nineteenth-Century China: The Case with Wang Kangnian and the *Shi Wu Bao*", *Historia Scientiarum* Vol. 10-1: 46-57.
3. 2000.〈《算數書》初探〉,《師大學報・科學教育類》45 (2): 77-91。
4. 2000.〈《算數書》的幾則論證〉,《台灣歷史學會會訊》第十一期：44-52。
5. 2000.〈《無異解》中的三案初探：一個HPM的觀點〉,《科學教育學刊》第八卷第三期：215-224。
6. 2000.〈數學典籍的一個數學教學的讀法：以《赤水遺珍》爲例〉,《中華科技史同好會會刊》第一卷第二期：35-43。
7. 2000.〈清代數學家汪萊的歷史定位〉,《新史學》第十一卷第四期：1-16。
8. 2001.〈數學史教學與數學觀的改變〉，刊於本系『數學資源中心・生活數學館』。
9. 2001.〈貼近《幾何原本》與HPM的啓示：以『驢橋定理』證明爲例〉，刊於本系『數學資源中心・生活數學館』。
10. 2001.〈數學家書寫歷史：兼評John Stillwell的《數學與它的歷史》〉,《數學傳播》25 卷 2 期：54-74。
11. 2001.〈從一封函札看清代儒家研究算學〉,《科學月刊》第三十二卷第九期：797-802。
12. 〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs. 何國柱〉，預定刊於《漢學研究》。
13. (Submitted). "Reading into Mathematical Texts: a multicultural perspective".
14. (Submitted). “Sino-Korean Transmission of Mathematical Texts in the 19th Century: A HPM reflection”.
15. （投稿中）〈華蘅芳的學算心得的啓示〉
16. （投稿中）〈朝鮮儒家讀九章：以趙泰耈〈九章問答〉爲例〉。
17. （待定稿）〈南秉吉《九章術解》之校勘研究〉（與楊瓊茹等合撰）。

HPM推廣文章：

1. 1999.〈康熙皇帝與符號代數〉,《HPM台北通訊》第二卷第一期：1-3。
2. 1999.〈羅浮宮：科學與藝術的結晶〉,《HPM台北通訊》第二卷第二、三期合刊：1-2。
3. 1999.〈『專業數學教師發展』之研究的他山之石〉,《HPM台北通訊》第二卷第五期合刊：1-5。
4. 1999.〈HPM隨筆（二）：數學史與數學的教與學〉,《HPM台北通訊》第二卷第四期：1-3。
5. 1999.〈HPM隨筆（三）：數學哲學與數學史〉,《HPM台北通訊》第二卷第六期：1-5。
6. 2000.〈『貼近』古典，向大師學習！〉,《HPM通訊》第三卷第一期：1-4。
7. 2000.〈數學教師成長的範例〉,《HPM通訊》第三卷第二、三期：1-2。
8. 2001.〈當斐波那契碰上孫子〉,《HPM通訊》第四卷第一期：1-2。
9. 2001.〈Andrew Wiles vs. 華蘅芳：治算心得的比喻〉,《HPM通訊》第四卷第二、三期：1-2。
10. 2001.〈二十一世紀的《算經十書》〉,《HPM通訊》第四卷第四期：1-2。
11. 2001.〈參加一九九六年HPM研討會有感〉,《HPM通訊》第四卷第五期：1-4。
12. 2001.〈歷史與科學的平衡：導讀《加利略—科學史上第一位物理學家》,《科學月刊》第三十二卷第三期：270-272。
13. 2001.〈科學與人文的對話：一個科學史家的觀點（上）〉,《科技報導》九十年三月十五日：8-11。
14. 2001.〈科學與人文的對話：一個科學史家的觀點（下）〉,《科技報導》九十年四月十五日：14-15。
15. 2001.〈數學郵票中的歷史風華：評《『票』游數學王國》〉,《科學月刊》第三十二卷第八期：722-723。
16. 2001.〈很過癮的閱讀經驗：推介《從亞理斯多德以後》〉,《科技報導》九十年十月十五日：24-26。
17. 2001.〈報導與真相：以『破圓周率神話』爲例〉,《HPM通訊》第四卷第十期：1-2。

研討會論文：

1. 1999. “Li Shanlan: The greatest mathematician in nineteenth-century China”, presented to The Ninth International Conference on the History of Science in East Asia, Singapore , 23-27, August, 1999.
2. “Sino-Korean Transmission of Mathematical Texts in the 19^{th} Century: A HPM reflection”, presented to HPM 2000 Taipei Conference – “History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium”, National Taiwan Normal University, August 9-14, 2000.
3. 2001. “Sino-Korean Transmission of Mathematical Texts in the 19^{th} century: A case with Nam Pyong-gil’s *Kugosul Toyhae*”, presented to the XXI International Congress of History of Science, Mexico City, 8-14 July, 2001.
4. 2001. “An Eighteenth-Century Sino-Korean Dialogue on Mathematics: He Gouzhu versus

Hong Chong-ha", presented to the XXI International Congress of History of Science, Mexico City, 8-14 July, 2001.

5. 2001.〈朝鮮儒家讀九章：以趙泰耇〈九章問答〉爲例〉，提交第九屆國際中國科技史會議，十月九日~十二日，香港城市大學。

專書及其他論文：

1. 1999.《孔子與數學》（修訂一版），台北：明文書局。
2. 2000.〈全真教與金元數學：以李冶（1192-1279）爲例〉，王秋桂主編《金庸小說國際學術研討會論文集》（台北：遠流出版社），頁67-83。
3. 2000. "The Influence of Euclid's Elements on Xu Guangqi and His Successors", Jami, Catherine and Peter Engelfriet & Gregory Blue eds., *Xu Guangqi (1562- 1633), Scholar and Statesman: Melting Western Knowledge into the Chinese Mould* (Leiden / Boston / Koln: Brill), pp. 180-198.
4. 2000. "Euclid versus Liu Hui: A Pedagogical Reflection," (modified version of No. 23 article), Victor Katz ed., *Using History of Mathematics in Teaching Mathematics* (Washington, D.C.: MAA.), pp. 37-48.
5. 2000. "The Pythagorean theorem in different cultures", Fauvel, John and Jan van Maanen eds. *History in mathematics education* (Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2000), pp. 258-262.
6. "Li Shanlan", to appear in *the Encyclopedia Britannica*.
7. "Hua Hengfang", to appear in the *Encyclopedia Britannica*.

研究小組成員所完成的研究報告：

1. 邱靜如：〈埃及數學在分數四則運算上的應用〉。
2. 邱靜如：〈古代數學文本在課堂上的使用：方根的意義〉。
3. 邱靜如：〈數學史在課堂中的使用：一元二次方程式〉。
4. 李信仲：〈《九章算術》在正負數運算上的啓發〉。
5. 顏富明：〈古代數學文本在課堂上的應用之教學活動報告（單元：商高定理）〉。
6. 顏富明：〈古代數學文本在課堂上的應用之教學活動報告（單元：圓心角、圓周角與弦切角）〉。
7. 陳威男：〈動手玩數學：從模型製作、操作中學習數學知識（立體體積推導）。
8. 顏富明：〈捷徑問題與巴斯卡三角形〉。
9. 蘇惠玉：〈古代數學文本在課堂上的使用：圓〉。
10. 蘇惠玉：〈古代數學文本在課堂上的使用：『巴斯卡三角形』〉。
11. 蘇俊鴻：〈數學史如何融入數學教學：以組合數爲例〉。
12. 蘇意雯：〈古代數學文本在課堂上的使用：機率〉。
13. 林裕意：〈餐飲數學教學的經驗分享：從『協同教學』和『一個 HPM』的觀點〉。
14. 王文珮：〈Work Card 教學設計：數的運算〉。
15. 唐書志：〈學習工作單設計：簡單的幾何圖形〉。
16. 黃清揚：〈猜一猜：歐拉公式〉。

17. 王文珮：〈Work Card 教學設計：等比數列〉。
18. 陳鳳珠：〈Work Card 教學設計：三角函數〉。
19. 洪誌陽：〈數學歸納法的工作單〉。
20. 董芳成：〈『三角函數的和差角公式』工作單〉。
21. 蘇惠玉：〈托勒密《大術》(The Almagest) 在三角函數教學上的應用〉。
22. 陳啓文：〈古代數學文本在課堂上的使用：以工作單爲工具〉。
23. 蘇意雯：〈『數學與文化』工作單教學設計〉。
24. 彭君智：〈『歡樂 123：奇幻園地』影帶 HPM 教學〉。
25. 洪明賢：〈畢氏定理探源〉(虛擬演講稿)
26. 吳任哲：〈利用『驢橋定理』探討國中教師之數學教學〉(虛擬演講稿)。
27. 陳敏皓：〈機率小史〉。
28. 陳冠良：〈數學與人們的距離〉(虛擬演講稿)。
29. 林裕意：〈餐飲數學：營養分析計算〉。

計算天才－阿爾 ・卡西($Jamsh\bar{\imath}d\ \ al-K\bar{a}sh\bar{\imath}$)

台師大數學研究所碩士班研究生　陳彥宏

一、前言

關於圓周率π 的研究，一直是人類深感興趣的題材。從數千年前開始，數學家便設法要去計算π值的大小，根據史籍所載，四千年前的巴比倫人用$3\frac{1}{8}$作圓周率，同時期的埃及人用的是$4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$，三千多年前的中國人則用 3，這些數值多半是憑直觀推測或實物度量而得，其值相當粗略。直到西元前三世紀的希臘科學家阿基米德 (Archimedes，西元前 287－前 212) 才首度利用科學的方法計算π的近似值，歷史上一連串計算圓周率π的旅程就此展開。在這漫長的旅途上，一位不容忽視的伊斯蘭數學家－阿爾・卡西 (Jamshīd al－Kāshī，?－1429)，利用幾何的方法求π的近似值精確至小數點以下第十六位！本文將簡單介紹阿爾・卡西計算π所使用的方法，希望讀者能夠對這位偉大的阿拉伯計算奇才有初步的認識。

二、生平

現今對於阿爾・卡西最早的紀錄是在 1406 年，經由其著作中我們得知，當時他開始在家鄉卡撒 (Kāshān，在今伊朗德黑蘭南方 200 公里) 進行一系列的月蝕觀測活動，在此之

前，我們對於他則一無所知。阿爾・卡西完成了許多關於天文學的著作，其中較為人所知的是他在 1414 年獻給 Khāqān Ulūgh Beg 的作品 *Khāqānī Zīj*，這是 150 年前納西爾丁 (Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī，1201-1274) 的著作 *Īlkhānī Zīj* 之修訂版本，以及在 1416 年有關赤道儀的論著。早期阿爾・卡西的生活過得並不富裕，以致到處流浪兼職來謀生，直到 1418 年，他才在撒馬爾干 (Samarkand，在今烏茲別克境內) 的一所學校內謀得職位，這所學校正是由他一生中最大的資助者 Sultan Ulūgh Beg 創辦。亦是在此時，阿爾・卡西開始對於數學有極重大的貢獻，1424 年，他逼近圓周率 π 的近似值精確至小數點以下第十六位，在人類研究圓周率的歷史上留下輝煌的一頁！另外，1427 年他撰寫了關於算術、代數及測量的作品《算數者之鑰》(The Calculators' Key)，書中對於十進位記數系統、數的開高次方根、及求解代數問題皆有詳細論述。此外，阿爾・卡西還利用求解三次方程式得到正弦函數 $\sin 1°$ 的近似值。就目前所知，這也是他在 1429 年過世前的最後作品。

以下，我們便將介紹這位計算奇才用以逼近圓周率 π 的方法。不過，請容許筆者先介紹這一系列科學方法求 π 值的開山始祖－阿基米德！

三、阿基米德的圓周率

西元前二二五年左右，阿基米德完成了一篇題為《圓的度量》 (The Measurement of a Circle) 的簡短論文，其中包含三個命題和幾頁簡短的說明，在命題 3 中，他用幾何方法求出了圓周率 π 的近似值：

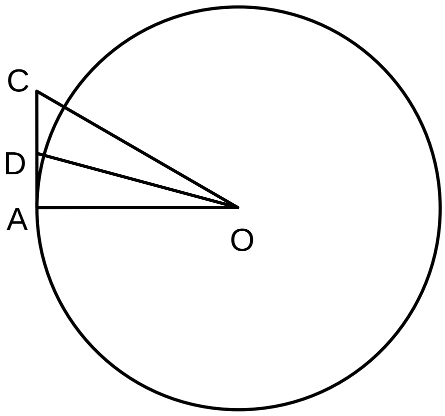
命題 3　任何圓的圓周長度與其直徑的比值小於 $3\frac{1}{7}$，但大於 $3\frac{10}{71}$。

為證明此一命題，阿基米德利用圓外切及圓內接多邊形的周長來逼近圓周長，並且分別反覆利用以下二個引理得到關於圓周率近似值的遞迴式。

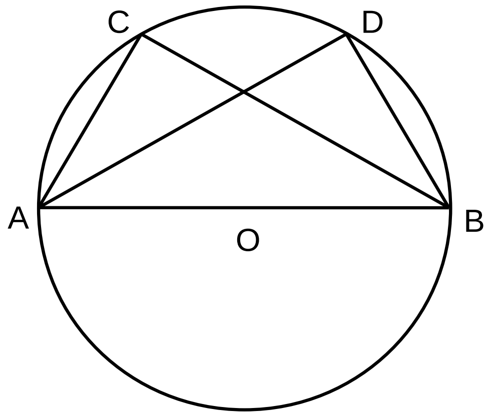
引理 1　設 $\overline{OA}$ 為圓 O 的半徑，$\overline{CA}$ 切圓 O 於 A。令 $\overline{DO}$ 平分 $\angle COA$ 交切線 $\overline{CA}$ 於 D，則 $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CO}+\overline{OA}}$ 且 $\overline{DO}^2=\overline{OA}^2+\overline{DA}^2$ (參考圖一)。

引理 2　設 $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，ΔACB 是圓內接直角三角形。令 $\overline{AD}$ 平分 $\angle CAB$ 交圓於 D，連 $\overline{DB}$，則 $\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2}=1+\dfrac{\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2}{\overline{BC}^2}$ 且 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$ (參考圖二)。

首先，他假設圖一中 $\angle COA$ 的大小為一直角的三分之一(即 $30°$)，則 $\overline{CA}$ 是圓外切正六邊形邊長的一半，$\overline{CA}$ 與 $\overline{CO}$ 便可以知道。又因為 $\angle DOA=15°$，$\overline{DA}$ 是圓外切正十二邊形邊長的一半，因而利用引理 1，我們可以求出 $\overline{DA}$ 和 $\overline{DO}$。



圖一



圖二

接著，平分 $\angle DOA$ 可得圓外切正二十四邊形邊長的一半，其長度亦可利用引理 1 求出。由圓外切正六邊形開始，反覆進行上述的步驟，阿基米德得到圓外切正十二邊形、正二十四邊形、正四十八邊形，最後停在圓外切正九十六邊形。若假設圓 O 的半徑爲 r ，t_i 是圓外切正 3×2^i 邊形邊長之半，u_i 表圓心 O 至正多邊形一頂點的距離($\overline{CO}$ 、$\overline{DO}$ 、…等)，引理 1 其實就是底下的遞迴式：

$$t_{i+1}=\frac{rt_i}{u_i+r} \qquad u_{i+1}=\sqrt{r^2+t_{i+1}^2}$$

所以圓外切正 3×2^i 邊形的周長：圓 O 的直徑＝$6\left(2^i t_t\right):2r=3\left(2^i t_i\right):r$ 。當他進行至正九十六邊形時，得到圓周率 π 的上界：

$$\text{圓周率}\,\pi<\frac{14688}{4673\frac{1}{2}}=3+\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}<3\frac{1}{7}$$

同樣地，計算圓內接正六、正十二、正二十四、正四十八，直到正九十六邊形，阿基米德得到圓周率 π 的下界：$3\frac{10}{71}$ 。這裡，在每一階段中，他都必須處理平方根的問題，例如，圖一中 $\overline{OA}:\overline{AC}=\sqrt{3}:1$，阿基米德給出了 $\sqrt{3}$ 的近似值：$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$ ，和實際數值相當接近，不過，他並沒有說明如何得來。儘管如此，阿基米德的成就非凡，他是第一個將圓周率的計算建立在科學基礎上的人！

四、阿爾・卡西的圓周率

自阿基米德以後，人類便展開了一連串計算圓周率 π 的旅程。1424 年，阿爾・卡西在他所著的《圓周論》(A Treatise on the Circumference) 中，利用幾何方法計算圓周率 π 的近似值，其結果準確至小數點以下第十六位！以下簡介是他的方法。

阿爾・卡西採取與阿基米德同樣的方式，以圓內接多邊形的周長來逼近圓周長。他從圓

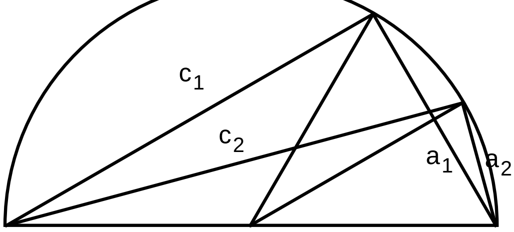
內接正六邊形開始著手，設圓O為一單位圓，[1]則六邊形的邊長a_1為 1 單位，因此可得圓周率的粗略近似值$\pi \approx \frac{6}{2} = 3$，接著，將內接多邊形邊數增加一倍得到正十二邊形。現在，問題來了，要如何求出其邊長a_2呢？此時，阿爾・卡西展現出過人的智慧，他將正六與正十二邊形同時內接於單位圓中，並僅只考慮上半圓 (參考圖三)。如圖四，分別過圓心O與D點作$\overline{OJ} \perp \overline{AG}$，$\overline{DZ} \perp \overline{AB}$，則$\Delta DAZ \sim \Delta BAD$，因而$\frac{\overline{AB}}{c_2} = \frac{c_2}{\overline{AZ}}$，即

$$c_2^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AZ} = 2\left(1 + \overline{OZ}\right) \qquad (1)$$

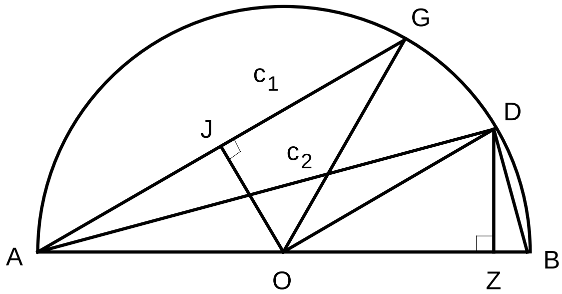
由於$\angle BAG = \frac{1}{2}\angle BOG = \angle BOD$，可得$\Delta AOJ \cong \Delta DOZ$，所以$\overline{OZ} = \overline{AJ} = \frac{1}{2}c_1$，將此結果代入 (1) 式，我們可以得到底下的關鍵公式：

$$c_2^2 = 2 + c_1 \qquad (2)$$

利用畢氏定理，可知$c_1 = \sqrt{2^2 - a_1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = 1.73205...$，實際上，阿爾・卡西已經能夠輕易地計算出一數平方根了！[2]他將c_1的值代入公式 (2)，並再次使用畢氏定理，得$a_2 = \sqrt{2^2 - c_2^2} = \sqrt{4 - c_2^2} = 0.51763...$，而計算出較正六邊形為佳的圓周率的近似值$\pi \approx \frac{12a_2}{2} = 3.10582....$。



圖三



圖四

至此，讀者應不難發現公式 (2) 不只侷限於正六邊形與正十二邊形。如果我們繼續將圓內接正多邊形的邊數，依序加倍得到正二十四、正四十八邊形、…，並反覆使用式 (2) 與畢氏定理，則$c_3^2 = 2 + c_2$、$c_4^2 = 2 + c_3$、…，且$a_3 = \sqrt{4 - c_3^2}$、$a_4 = \sqrt{4 - c_4^2}$、…，或更一般地，

$$c_n^2 = 2 + c_{n-1} \qquad a_n = \sqrt{4 - c_n^2} \qquad (3)$$

當進行到圓內接正九十六邊形時，阿爾・卡西已將圓周率π的近似值精確至小數點以下第三位 (3.141…)。不過，他並不因此而滿足，他繼續向前邁進，直到逼近圓周率π的近似值精確至小數點以下第十六位為止 (π＝3.1415926535897932)！[3]當時，他形容其精確度為：

若用它來計算宇宙的周長，那麼所得到的結果其誤差將會小於一根馬鬣之寬！

然則阿爾・卡西又如何知道所求得的圓周率近似值，的確精確至小數點以下第十六位呢？他知道圓內接正多邊形周長較圓周長爲小，因而，以圓內接多邊形的方法總是『低估』(underestimate) 了 π 值。於是，他另外設計了以圓外切正多邊形的方法來『高估』(overestimate) π 值。將圓內接、外切正多邊形的邊數不斷地加倍之後，若『低估值』與『高估值』在小數點以下某一位 (第 n 位) 之前值都相同，阿爾・卡西便能確知他的近似值亦準確至第 n 位，最後，他以正 805,306,368 邊形得到上述結果！

五、結語

在阿爾・卡西的時代，圓周率的近似值最多只精確至小數點以下第六位，[4]與他的結果足足有十位之差！這個記錄保持了將近兩百年，在十七世紀初期才由荷蘭數學家盧道夫 (Ludolf van Ceulen，1539－1610) 打破。[5]平心而論，在電算機尚未發明的情況下，他能得到這樣精確的結果，實在令人不得不佩服。更值得注意的是，阿爾・卡西總是明瞭：『割圓』必須進行至如何的地步，就能獲得他所要求的精確度！

註解

1. 實際上，阿爾・卡西所建構的圓半徑是 60 單位長，而非這裡所說的單位圓。
2. 在阿爾・卡西的另一著作《算數者之鑰》(The Calculators' Key) 中，對於數的開方法有詳細地介紹，他甚至能夠直接計算出一數的五次方根。
3. 阿爾・卡西並非用十進位系統，而是使用當時在天文學方面慣用之六十進位系統，他的結果以六十進位表示爲：

   $2\pi = 6\,;16\,,59\,,28\,,1\,,34\,,51\,,46\,,14\,,50$。
4. 在阿爾・卡西之前，中國南北朝時期的偉大數學家、天文學家和工程師祖沖之 (429－500) 求得：$3.1415926 < \pi < 3.1415927$。其結果精確至小數點以下第七位，不但在當時是最精密的圓周率，而且這個記錄保持了九百多年，才被阿爾・卡西打破！另外，祖沖之還找到了兩個簡單的分數 $\frac{22}{7}$ (約率)、$\frac{355}{113}$ (密率)，來作爲圓周率 π 的近似值，在數學上具有極重要的意義！
5. 盧道夫將 π 的近似值逼近到小數點以下第三十五位。他致力於此工作達數十年之久，其特色是結合新的十進位系統與阿基米德的策略。不過，他不是從正六邊形出發，而是由正四邊形開始，最後求出一個具有 2^{62} 邊的正多邊形的周長！

參考資料

梁宗巨 (1992).《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

曹亮吉 (1996).《阿草的葫蘆－文化活動中的數學》，台北：遠哲基金會。

Beckmann, Petr (1996).《π 的故事》(姜家齊等譯)，新竹：凡異出版社。

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York：Springer-Verlag.

Dunham, William (1995).《天才之旅－偉大數學定理的創立》(林傑斌譯)，台北：牛頓出版社。

Katz, Victor J. (1993). *A History of Mathematics：An Introduction*. New York：Harper-Collins

College Publishers.

Van Brummelen, Glen (1998).‘ *Jamshīd al – Kāshī* －Calculating Genius’, *Mathematics in School* 27(4)：40-44.

GELOSIA METHOD—從阿拉伯出發

台師大數學研究所碩士班研究生　楊瓊茹

一、前言

Gelosia 這單字意思爲何？從《牛津英文辭典》(Oxford English Dictionary) 是查不到的，當然就更別指望一般的英文辭典了。但在今日的葡萄牙語裡，這個字是窗口的遮蔽物、窗簾或者活動百葉窗的意思。雖然我們尙且無從追溯到它的語源，但從數學史文獻當中，我們得知：Gelosia Method指的就是運用畫方格圖，並且在每一方格中畫上對角線以進行乘法運算的方法。阿拉伯語稱此方法爲shabacah ；[1]十六世紀末的中國，則稱爲『鋪地錦』；在義大利，又稱爲格柵法 (grating)，因爲在當時，修女或女士的房子窗口習慣上都會裝上柵欄，避免從外面就可以輕易窺視屋內，這與葡萄牙語意相似。[2]由於此方法可能源自於印度或阿拉伯，並由印度傳到中國、阿拉伯傳到義大利。[3]底下，我們將從阿拉伯出發，[4]並繞境義大利與中國，一一爲讀者呈現這個在舊時頗受歡迎的乘法運算方法。

二、六十進位制乘法

早在第九世紀，回教世界的科學家就已經發展出一套完善的位值系統，足以處理所有整數及小數的四則運算，但並不是我們現代人所慣用的十進位制，而是六十進位制，便於天文方面的計算。對於六十進位的乘法，阿拉伯人則有兩種運算方式。一個是先轉換成十進位數相乘，再換算回六十進位制，另一個方法則是文本所要詳細探討的Gelosia Method 。我們將透過解讀回教數學家阿爾卡西 (Ghithyâth al-Dîn Jamshîd al-Kâshî，？-1429) 的做法來說明。

阿爾卡西生於波斯的卡撒 (Kâshân，今伊朗的德黑蘭南方 200 公里)，出生年代不詳。我們對他的了解，始於 1406 年阿爾卡西在卡撒觀測月蝕的紀錄。後來，阿爾卡西來到撒馬爾干 (Samarkand)，在統治者 Ulûgh Beg 的贊助下繼續進行天文及數學的研究。他最令人印象深刻的成就除了用迭代法計算 sin1°値之外，在求取 2π 的近似値時，也能掌控誤差大小。上述的成果可堪稱當代絕技。不久之後，阿爾卡西完成了在算術、代數及測量方面集大成的著作《算數者之鑰》(Miftâh al-hisâb)，其中利用 Gelosia Method 計算的題目 (見

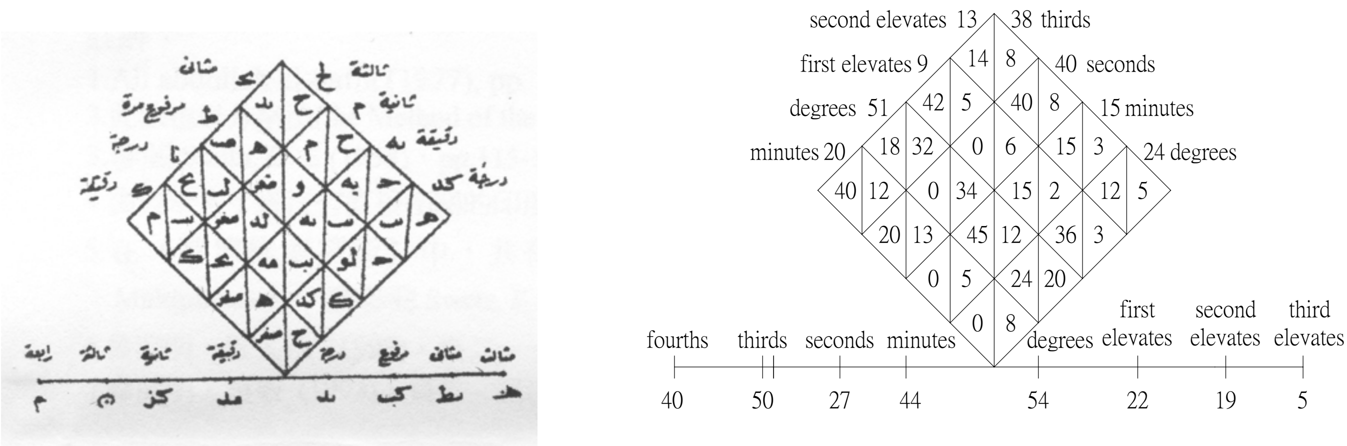
圖一)：

24 (degrees), 15 (minutes), 40 (seconds), 38 (thirds) 乘以
13 (second elevates), 9 (first elevates), 51 (degrees), 20 (minutes)

便是這本書的主要內容。首先，我們先解釋題目中 degrees、minutes…等單位的意思。如果任給的一個數值沒有小數點或單位的話，那麼我們就無法確定各個位值是 60 的幾次乘冪。例如：02,45 究竟是 165 ($=2\times 60+45$) 或 $2\frac{45}{60}$ ？爲了解決這個問題，阿拉伯人給每個位值一個名稱，也就是位值爲 1、60、60^2…分別稱做 degrees、first elevates、second elevates…；$1/60$、$1/60^2$、$1/60^3$…則稱爲 minutes、seconds、thirds…。例如：

13 (second elevates), 9 (first elevates), 51 (degrees), 20 (minutes)
$=13\times 60^2+9\times 60+51\times 1+20\times (1/60)$；

24 (degrees), 15 (minutes), 40 (seconds), 38 (thirds)
$=24+15\times (1/60)+40\times (1/60^2)+38\times (1/60^3)$。



(圖一)

至於如何進行乘法運算？首先 38 乘以 20 得 760，轉換成 60 進位制得 12,40，將 12、40 分別填入右邊的三角、左邊的三角，繼續同樣的步驟，直到所有空格都填滿，再把落在同一縱行上的數值加起來，若數值大於 60，則進位。例如：落在左邊第三縱行上的 42、32、0、13、0，其和爲 87，轉成 60 進位制得 1,27，數值 1 則進位。因爲 minutes 乘上 thirds 爲 fourths，所以答案的最後一個位值的單位是 fourths。值得一提的是，阿拉伯人直接查表 (六十進位制的乘法表) 來填滿空格，只有在計算每一斜線上數值的總和以及進位時，才真正需要做計算。

在阿爾卡西所處的時代，正是西方世界數學復甦的時期，尤其是文藝復興的前哨—義大利。

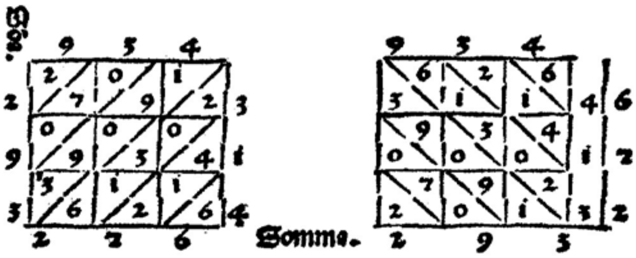
三、最早印刷的算術書

在西元 1478 年，威尼斯北部的特雷維索城 (Treviso) 出版了最早印刷的算術書《特雷維索算術》(Treviso Arithmetic)，作者不詳。此書的內容多半爲商業算術，即解釋數字的寫法、

數的計算以及貨物兌換上的應用。《特雷維索算術》中的Gelosia Method呈現兩種形式，[5]分別為對角線斜左與斜右 (見圖二)，但一般而言，對角線斜左是比較受喜愛的。圖二為十進位制的乘法：

934×314=293276

圖中「Somma」的意思為「總數」，即英文字「Sum」；左上角的字母「Soa.」則為「Somma」的縮寫。此外，圖二的印度-阿拉伯數碼，除了數字 1 上面多一點外，和我們今日的書寫形式相同。這是第西方世界第一部印刷的數學書！



(圖二)

四、鋪地錦

明代程大位 (1533-1606) 所著作《算法統宗》(1592) 中，稱Gelosia Method這種先畫格眼的寫算方法為「鋪地錦」，有別於傳統的籌算及珠算，並有詩歌一首：[6]

寫算鋪地錦為奇，不用算盤數可知；
法實相呼小九數，格行寫數莫差池。
記零十進於前位，逐位數上亦如此；
照式畫圖代乘法；厘毫絲忽不須疑。

(圖三)

圖三指涉的題目為：

今有絹四百三十五疋(匹)，每疋價鈔五千七百六十八文，問該鈔若干？

荅(答) 曰：二百四十六萬九千九百三十文。

法曰：先畫格眼，將絹數為實於上橫寫；以每疋鈔數於右，直寫為法。法實相呼，填寫格內，先從末行起依次相乘，逆上至實首止。得數從右下邊小數起，亦是逆陞向前，遇十進上，合問。

比程大位約早一個世紀半的明代算學家吳敬，在他所著作《九章算法比類大全》(1450) 中，將 Gelosia Method 編入「乘除開方起例」的寫算 (見圖四)，底下引述寫算要訣：[7]

寫算先需仔細看，物錢多少在毫端；
就填圖內依書數，加減乘除總不難。

(圖四)

五、 結語

在今日的數學課程中，Gelosia Method 這個在舊

時頗受歡迎的乘法運算方法已不復見。雖然它減少計算時進位的次數，但表格繪製卻造成時間的耗費以及印刷的不便。時至今日，我們慣用直式乘法進行筆算，甚至只要按一下計算機即可。然而，這樣的直式乘法運算形式，通常是在小學教科書的範本下，不斷地制約學習而成的。當然這是最簡便的筆算方法，而且學生從累積的經驗中，亦了解程序的合理性。如果學生尚未學習過直式乘法，那麼在求解兩位數以上的乘法時，學生會採取何種策略？

綜觀本文，阿拉伯人用六十進位表來填滿網格；算術書《特雷維索算術》主要處理商業算術問題；明代的文本中，題目、答案以及說明無不詳盡，並輔以詩詞，便於記憶及增添興趣。這些文本的題目都結合了當時人們日常生活的活動。經由本文 Gelosia Method 的介紹，筆者希望除了讓大家認識、比較另一種乘法的運算方式之外，也能欣賞到不同的數學文化風格，並提供初等數學教育另一個乘法運算視野。

註解：

1.Ali abdullah al-daffa (1977), pp. 39.
2.此法也以分格法(the Method of the Cells)、平行法(quadrilateral)、平方法(square)知名。
3.參閱 Smith, D. E (1958)，pp.115-116。
4.由於筆者手邊沒有直接相關的印度格柵法的資料，所以印度部分保留。
5.在《特雷維索算術》中，共有五種乘法運算形式，包括帆船法（scacchero Multiplication），請參閱 Swetz, F. J. (1987)，pp. 81-84。
6.參閱明・程大位 (1993)，頁二–一四○七。
7.參閱明・吳敬 (1993)，頁二–三○。

參考資料

郭書春主編 (1993).《中國科學技術典籍通匯・數學卷二》，濟南：河南教育出版社。
明・吳敬 (1993).《九章算法比類大全》，收入郭書春 (1993)。
明・程大位 (1993).《算法統宗》，收入郭書春 (1993)。
歐陽絳 譯 (1997).《數學史概論》，台北：曉園出版社
Ali abdullah al-daffa (1977). *The Muslim Contribution to Mathematics*. N. J.: Humanities Press.
Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.
Chabert, Jean-Luc. (Ed.) (1999). *A History of Algorithms*. New York: Springer-Verlag.
Needham, J. (1986). *Science and Civilisation in China* (Vol.3). Taipei: Caves Books, LTD.
Martzloff, J. C. (1997). *A History of Chinese Mathematics*. New York: Springer-Verlag.
Smith, D. E (1958). *History of Mathematics* (Vol.2). New York : Dover Publications.
Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and Arithmetic*. Illinois: Open Court.

訊息

2001 現實數學教育研討會：荷蘭與台灣

壹、緣起

本研討會是依據我國行政院國家科學委員會（NSC）與荷蘭科學研究組織（NWO）所建立的「中荷雙邊科技合作協議」架構，為擴大雙邊科技交流研究，所召開的中荷雙邊研討會。NWO 社會科學委員會 Dr. L. H. STRONKHORST 推薦荷蘭烏垂特大學 Freudenthal Insititute 研究員 Koeno Gravemiher 先生為荷方召集人，國科會則委由台師大林福來教授擔任我方召集人，雙方召集人經一年的籌畫，兩國間的雙邊研討會第一次由我方主辦。

貳、目的

一、促進台灣與荷蘭的雙邊科技合作。

二、在全球化、國際化趨勢下，進行中西兩種不同文化傳統下數學教育研究發展的比較。

三、推動台灣與荷蘭雙方數學教育合作研究計畫。

參、重要性

我國學生在國際數學評量上成績優異（例如：TIMSS），但國內有識之士深感我國數學教育仍有待改進之處；而荷蘭在現實主義下所發展的數學教育研究在國際上備受重視。台灣與荷蘭的數學教育上各有其擅長處，透過深入的研討可將兩個國家的研究當做個案互相對照，找出各自可再發展、改進的空間，為全球數學教育的研究發展，貢獻一個國際研究的案例。

議程

2001 年 11 月 19 日（Mon.）		**2001 年 11 月 20 日（Tue.）**	
時間內容	主講人＆講題	時間內容	主講人＆講題
8:30～9：00 報到		8:30～9：30 演講【七】	Henk van der Kooij－Mathematics in a Vocational Setting’
9：00～9：30 開幕			
9:30～10：30 演講【一】	Koeno Gravemijer －Developmental Research, a Course in Elementary Data Analysis as an Example	9：30～10：30 演講【八】	Hak Ping Tam－Methodological Issues in Mathematics Education
10：30～11：00 Tea break		10：30～11：00 Tea break	
11：00～12：00 演講【二】	Fou-Lai Lin －A Developmental Program on Children Mathematics Concept Development in Taiwan	11：00～12：20 Panel discussion	**Developmental Research** Panelist： K. Gravemijer M. v.d. Heuvel H. P. Tam F.L. Lin
12:00～13：30 Lunch		12:20～13：30 Lunch	
13:30～14：30 演講【三】	Maarten Dolk & Jaap den Hertog －Making Sense of Theory in Practice-Oriented Teacher Education	13:30～16：00 參觀中小學	

14：30～15：30 演講【四】	Pi-Jen Lin－Using Research-Based Cases to Enhancing Preservice Teachers' Understanding of Mathematics Teaching and Reflection		
15:30～16：00 Tea break			
16:00～17：00 演講【五】	Susan Shuk-Kwan Leung－The Integration of Problem – Posing Research into Mathematics Teaching：Case of Prospective and In-service Elementary School Teacher	16:00～17：00 演講【九】	Tai-Yih Tso－The Design and Implementation of Learning Environments with Dynamic Multiple Linked Representations
17:00～18：00 演講【六】	Chien Chin－Developing Mathematics Teachers' Pedagogical Values: Clarification Argumentation, Identification, and Action as Co-learning Cycle	17:00～18：00 演講【十】	Ming-Jang Chen ＆ Yuan Yuan －Research on Developing Multiple Teacher's Modules in the Web

2001 年 11 月 21 日（Wed.）		**2001 年 11 月 22 日（Thu.）**	
時間內容	主講人＆講題	時間內容	主講人＆講題
8:30～9：30 演講【十一】	Jan van Maanen－Research on History and Mathematics Education in the Netherlands: The 'Reinvention Studies'	8:30～9：30 演講【十八】	Henk van der Kooij－When Do you Know What Students Know
9：30～10：30 演講【十二】	Wann-Sheng Horng－Intrinsic Cognitive Dimension of the HPM: Text Versus Context	9：30～10：30 演講【十九】	Michiel Doorman－Which Tools Do Students Need While Modeling Movement for the Learning of Calculus and Kinematics?
10：30～11：00 Tea break		10：30～11：00 Tea break	
11：00～12：20 演講【十三】	Marjolein Kool － Interaction in Mathematics Education:Courage, Knowledge, Self-Confidence	11：00～12：00 演講【二十】	Marja van den Heuvel – Realistic Mathematics Education Work in Progress
12:00～13：30 Lunch		12:00～13：30 Lunch	
13:30～14：30 演講【十四】	Maarten Dolk ＆ Jaap den Hertog－Didactizing and Mathematizing in Teacher Education, What Does It Mean to Be a Realistic Teacher Educator?	13:30～14：30 演講【二十一】	Yeong-Jing Cheng－The Infrastructure of Science Education Research in Taiwan
14:30～15：30 演講【十五】	Chiu- Keung Law－The Indicator of the Learning Progress of Mathematical Concepts in Taiwan Middle School	14:30～15：00 Tea break	
15:30～16：00 Tea break		15:00～16:30 Panel discussion	**Future Collaboration** Panelist: K. Gravemijer M. v.d.Heuvel Y.J. Cheng F.L. Lin
16:00～17:00 演講【十六】	Marja van den Heuvel－From Psychometric to Didactical Assessment Models in Mathematics Education		
17:00～18:00 演講【十七】	Jya-Yi Wu Yu－The Research and Development of Mathematics Test in College Entrance Examination Center During its First Decade		