HPM通訊

第四卷 第十一期 目錄（2001年11月）



創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng



# 在 911 之後讀伊斯蘭數學史

台師大數學系 洪萬生教授

在 911 之後，整個世界看起來已經完全不一樣了。我們相信有很多好事者，大概早已摩拳擦掌，準備在所謂的『後 911 論述』(post-911 discourse) 上大展身手。

不過，我們可以確定不必追逐這種時髦，因爲就 HPM 的多元文化關懷面向來說，我們一向重視類似『伊斯蘭數學』(Islamic mathematics) 這種『弱勢』文化。譬如說吧，本刊第四卷第五期就曾經刊登蘇意雯所撰寫的〈遺產問題與阿拉伯數學〉，以及楊瓊茹的〈Algebra 的語源〉。此外，我們數學史討論班還仔細研讀過 L. C. Karpinski 的 *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi* (1915)。如果再往前追溯，李秀卿還曾經在我的指導下，以『二次方程的幾何思維之歷史研究：以中國與回教世界爲例』爲題，撰寫她的碩士論文 (1997)。這一篇論文，現在已經成爲我們的研究生接觸阿拉伯數學史的一個不可或缺的切入點。

在本卷的最後兩期（第十一、十二期），我們就以『阿拉伯數學史』爲專輯，來充實阿拉伯脈絡中的『數學與文化』之內容吧。首先，在本期中，我們先刊出蘇意雯的〈再談阿拉伯數學中的遺產分配〉、陳鳳珠的〈阿拉伯代數在數學教學的應用：以一元二次方程解法爲例〉、黃清揚的〈奧馬・海亞姆：阿拉伯數學家、天文學家、詩人及哲學家〉，以及葉吉海的〈阿拉伯人的正七邊形作圖〉等四篇。下一期，再續完其他四篇文章。

我們非常期待經由這些文章的鋪陳或說明，可以傳遞一個再清楚不過的訊息，那就是：阿拉伯人不僅保存了希臘古典數學的薪火，同時，還創造了自主發展 (autonomous development) 的獨特傳統，堪稱是數學文化的交流 (transmission) 與轉化 (transformation) 的最佳例證之一。其實，文藝復興之後的西歐數學也莫非如此，當時數學家在阿拉伯的數學遺產上，遙接古希臘偉大榮光之後，逐漸在知識系譜上，標舉古希臘數學家作爲他們的直接祖先。這種『神話』當然經過了歷史（包括數學史與科學史）的書寫而強化，只是如果將來民族數學專家預測成真，亦即：西元前第四世紀居住在北非的歐基里得 (Euclid) 是黑人，那麼，屆時西歐人是不是又要開始尋找另一個數學祖先了呢？

# 再談阿拉伯數學中的遺產分配

台師大數學研究所博士班研究生 成功高中 蘇意雯老師

## 一、前言

911 事件之後，人們對恐怖活動聞之色變。在以西方歐美為主流的文化氛圍下，素來阿拉伯世界對國人就充滿著朦朧之美。事實上，回教、佛教和基督教並列為世界三大宗教，在回教文化神秘的面紗之下，數學史中獨特的遺產分配問題，也是回教世界的一個特色。到底伊斯蘭教的傳統為何？教義為何？竟然使得阿爾・花拉子模 (Al-Khowarizmi) 能把代數應用於其民族的遺產法則？此一問題成為筆者心中的疑團。因此本文將從「安拉的使者」—穆罕默德所傳達的《古蘭經》中實際探討，希望能忠實為讀者呈現穆斯林們處理遺產分配的律則，還原歷史之風貌。在進入文本之前，以下篇幅請先容筆者對伊斯蘭文化作一介紹。

## 二、伊斯蘭教簡介

回教在阿拉伯語中，稱為「伊斯蘭」。由於在唐朝時，經由回紇人傳入中國，因此中國人通稱為回教。「伊斯蘭」的原意為「順服」，經由此派而生的教徒「穆斯林」意為「順服者」。穆罕默德(570-632)在四十歲那年，接獲真主的啓示，成為安拉的使者，負起傳教的使命。當時麥加人為多神崇拜，和穆罕默德主張宇宙間只有一神，力倡破除偶像的觀念不同，因此激怒了一般傳統信仰的人。穆罕默德在艱困的環境下於麥加傳了十三年的教義，後來才率領教眾遷徙到較為歡迎回教教義的麥地那。這於回教史上影響相當深遠，因為從此回教勢力才得以急遽增長，後來收復麥加，並在西元六二二年建立一個政教合一的國家，這一年也就是回教元年。穆罕默德去世後不久，這些天啓被收集和編輯成《古蘭經》。這部伊斯蘭教的根本經典，被視為真主的言語。

伊斯蘭教對信徒順從真主而規定的宗教義務，稱為信仰支柱的「五功」，那就是：信仰作證(念清真言)、謹守拜功(每日五次)、完納天課(法定施捨)、封齋節欲(於每年回曆九月)、朝覲天房(一生一次)。這也就是俗稱的唸、禮、齋、課、朝「五功」。以上這些僅是最基本的義務，伊斯蘭教法—真主對於人類生活的全部戒命—還有更加廣泛的要求。教法在社會生活中的至上地位，使伊斯蘭教成為以律法為中心的宗教。教法的內容從宗教禮儀、社會倫理、政治模式、經濟制度到法律規範，幾乎蘊含了日常生活的全部行為。因此，伊斯蘭教不僅是宗教信仰和意識型態，也是生活方式和社會制度(中國社科院世界宗教研究所伊斯蘭教研究室，1991)。

《古蘭經》全部共 30 卷，114 章，六千二百餘節，從時間、內容、地點和演說對象上分為麥加篇章(約佔 2/3)和麥地那篇章(約佔 1/3)兩部分，記述了穆罕默德作為伊斯蘭教創始人、改革家、政治家進行活動的幾個階段。麥加時期屬宣傳新宗教的初期階段，此時啓示的經文著重勸說阿拉伯人信奉伊斯蘭教，從偶像崇拜轉向一神教。強調信真主獨一、信天使、信使者、信經典、信末日、提倡施捨濟貧、善待孤兒、描繪天園的寧靜與和平，警告火獄的懲罰，引述古代先知的傳說等。麥地那時期，穆斯林力量壯大，形成和產生了新的伊斯蘭教社會與國家。此時啓示的經文多為比較詳細的宗教法律與條令，著重為政教合一的穆斯林們確立宗教、政治、經濟、社會、軍事和法律制度，如聖戰、天課、婚姻、財產繼承、商業貿易等的具體規定等等。

伊斯蘭教法屬於阿拉伯伊斯蘭法系中的法，此法的理論根源主要是《古蘭經》律例、聖訓律例、類比和公議。所謂的聖訓是指穆罕默德生前的言行錄，公議是指全體穆斯林社團就重大問題的一致意見，由權威法學家們協商確認作爲法律術語。而類比就是當某一有爭議性的問題在經、訓中無直接原文可依時，才由精通經、訓知識的權威教法學家們運用理智推導結論，並經公議核准，產生法律效力。《古蘭經》律例主要散見於麥地那篇章，其中較爲集中的是第四章「婦女章」和第二章「黃牛章」。關於律例的經文一般並不很長，但範圍相當廣泛。其中涉及婚姻、家庭事務的，包括結婚、離異、夫妻雙方各自的權利和義務、遺囑、遺贈、法定繼承、遺囑繼承等，這正是下一節裡，我們所要討論的主題。

## 三、《古蘭經》中的遺產律則

《古蘭經》第四章爲尼薩，即婦女章，共一七六節。與遺產分配有關的，如下所列:

七、男子可分得父母和近親遺下的一部份，女子可分得父母和近親遺下的一部份，無論多少，這是規定。

八、分配遺產時如有遠親，孤兒，貧人在場，要提出一部份贈給他們，並對他們說好話。

十一、安拉爲你們的子女囑付你們：一男所得之額等於二女，他們若是在兩個以上，則得他所遺下的三分之二。若是僅她一人，則得半數。如果他有子嗣，他的父母各得他遺下的六分之一。他若無子嗣，他的父母繼承他，他母親得三分之一。如果他有弟兄，他母親得六分之一，這在付出贈與或還清債務以後。---你們的父母和子女，你們不知那是在利益上接近你們的---這是安拉的規定，安拉實是深知的，明哲的。

十二、你們獲得妻室所遺的半數，若是他們無子嗣的時候。如果她們有子嗣，在她們用作贈與或償還債務以後，你們就獲得她們所遺的四分之一。若是你們無子嗣，她們獲得你們所遺的四分之一。如果你們有子嗣，在你們用作贈與或償還債務以後，她們就獲得你們所遺的八分之一。如果一個男子或女子有遺產而無子女，在他有一弟(兄)或姊(妹)，他倆各獲所遺的六分之一。如果他們是多過這個的，他們就共分三分之一。這在用作贈與或償還債務以後，毫無妨害。這是安拉的規定，安拉是深知的，仁厚的。

由上述可知，《古蘭經》中對於遺產的繼承，規定了如何分配的辦法。關於遺產分配的條文，在教法經上另有詳細解說。這是伊斯蘭教中一種專門學。除法學經上粗言大概外，尚有特輯，詳解遺產繼承法（王靜齋，1964）。在如此的文化背景下，無怪乎遺產分配問題成爲阿拉伯數學的一個特色。

## 四、結語

由伊斯蘭的遺產分配可知，數學問題離不開社會文化歷史脈絡。數學文化的觀點提醒我們注意數學的歷史，以及了解在不同的社會中所發展的數學理念。如果吾人能夠認識到在特別的時代、地域及條件下會孕育某些學者和數學理念，那麼，這些將能幫助我們對現行知識的了解。經由數學史，人們當可領悟要決定那一個特別的知識分支值得堅持，並不是一件容易的事，因此，多元文化論的產生有其必要性，譬如尊重包容他人的研究，承認不同脈絡各有其需求和目的，以及了解每個社會對今日數學的整體知識都有重要的貢獻等等。在我們的

數學教學中融入多元文化維度，對於教育上的人文主義和民主傳統，一定可以帶來有意義的貢獻（Grugnetti & Rogers，2000）。

基於上述的理念，如何引動學生對數學的熱情及興趣，讓學生能從文化的角度欣賞數學的全貌和魅力，體認到數學與文化之密切相關，正是我們的目標；而數學教師授課時，若能從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想，就是達到了 HPM 的終極願景。

## 參考文獻

王靜齋譯 (1964).《古蘭經譯解》，台北：中國回教協會。
中國社科院世界宗教研究所伊斯蘭教研究室 (1991).《伊斯蘭教文化面面觀》，濟南：齊魯書社。
定中明 (1973).《回教黎明史》，台北：華岡出版部。
時子周譯 (1958).《國語古蘭經》，台北：中華叢書委員會。
第・博雅 (1986).《回教哲學史》(台灣商務印書館編審部譯)，台北：台灣商務印書館。
漢雅特 (1978).《回教歷史教科書》(林仲明譯)，台北：天華印刷廠。
熊振宗 (1982).《穆罕默德傳》，台北：中國文化大學出版部。
劉恩霖 (1985).《回教世界》，台北：圖文出版社。
蘇意雯 (2001).〈遺產問題與阿拉伯數學史〉，《HPM 通訊》第四卷第五期: 4-7。
Grugnetti, Lucia & Rogers, Leo (2000). "Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues", Fauvel, John and Jan van Maanen (eds.), *History in Mathematics Education* (Dordrecht / Boston / London：Kluwer Academic Publishers), pp. 39-62.

# 阿拉伯代數在數學教學的應用：|

# 以一元二次方程解法為例

台北縣中正國中 陳鳳珠老師

從數學演進的脈絡看來，阿拉伯數學研究對現代數學發展的影響與重要性是不容忽視的，[1]其實，它為今日數學教學所帶來的啓發也同樣值得我們注意。因此，本文將介紹阿拉伯數學家關於二次方程解法的研究，以作為中學教師進行相關課程教學時的參考。

阿拉伯重要數學研究活動中心巴格達的「智慧宮」（House of Wisdom）裡聚集了許多學者，進行著大量的翻譯工作。他們除了將希臘、印度數學著作翻譯成阿拉伯文之外，並同時吸收與融合巴比倫、印度和希臘等文明的數學思想，開創出另一數學研究風貌。以阿拉伯數學最具代表的成就－代數研究為例，他們除了採用巴比倫人解二次方程的演算程序

$x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2-ac}-\frac{b}{2}$外，同時，也受到希臘數學深刻的影響，賦予方程解法演算步驟的幾何意義。

若要對阿拉伯代數研究有進一步的了解，就得先認識阿拉伯數學家的代表人物阿爾花拉子模（Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi, 約 780-850）的相關研究。


他出身於波斯北部的花拉子模城，是智慧宮的領袖學者之一，他著有《算術》一書，今只留下一本殘缺的拉丁譯稿，18 世紀正式出版時定名爲《印度計算術》（*Algoritmi de numero indorum*），“Algorismi”是阿爾花拉子模的拉丁譯名，現代「算法」（Algorithm）一詞就是源自於此。他的另一本書《代數學》（*Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*，約在 820 年），書名意謂「還原與對消的科學」，“al-jabr”有「還原」的意思，是指把負項移至方程的另一端還原爲正項，在經轉譯後成爲今日“algebra”（代數）一詞的來源，“a-l-muqabala”原意爲「對消」，是指方程兩端可消去相同項或合併同類項。兩者均是解代數方程時，經常要使用到的技巧，譬如，求解一次方程 $3x+1=4-2x$，可經由「還原」將 $-2x$ 移至等號的左邊，得到方程 $5x+1=4$；再把等號左右兩邊同時減去 1，將之「還原」成 $5x=3$，再求得 $x=3/5$。

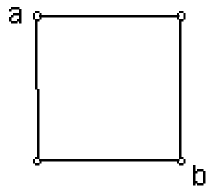
阿爾花拉子模在該書中，將二次方程分爲六類，亦即「平方等於根」（$ax^2=bx$）、「平方等於數」（$ax^2=c$）、「根等於數」（$bx=c$）、「平方與根等於數」（$x^2+bx=c$）、「平方與數等於根」（$x^2+c=bx$）以及「根與數等於平方」（$bx+c=x^2$）。他所稱的數（number）、根（root）與平方（square）分別是我們今日所指的常數、未知數與未知數的平方，同時他也是第一位把未知數叫做「根」的數學家。不過，由於他並未引進負數的概念，因此，他所處理的方程的根與係數均限於正數（a、b、c＞0）。相較之下，今日已相當熟悉負數的我們就方便多了，以 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c可正可負）就可代表一般的二次方程。

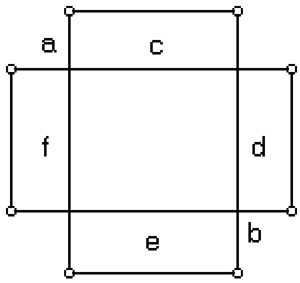
此外，阿爾花拉子模以實際的例子介紹上述六種方程求解的演算方法，並作爲一般解法的說明，另外，還提出上述後三類方程解法的幾何解釋。以下，就讓我們來看看他的作法。關於$x^2+bx=c$這類方程，他是以「一平方和 10 個根等於 39 個單位」，亦即二次方程$x^2+10x=39$爲例，其解法如下：

> 這類方程的解法就是取剛剛提到的根數的一半。在這個問題中，根的數目是 10，因而取 5，將其自乘，得 25，把它同 39 相加，得 64，開平方得 8，從中減去根數之半，即 5，餘 3。數 3 就表示所求平方的一個根。[2]

我們可以發現，他針對實例所提供的解題步驟，是適用於任一形如$x^2+bx=c$的方程式的，若以現代符號表示其解法，即 $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$。此外，他還指出如果遇到形如$ax^2+bx=c$的方程式，平方項係數不爲 1 時，僅須將該方程轉換成 $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$，也就是將$x^2$係數先化爲 1，然後再依照$x^2+10x=39$ 的演算程序求出其解。[3]

接著，他針對二次方程$x^2+10x=39$的解題步驟，提出兩種幾何解釋。首先，他以正方形ab邊長表示為此方程的根x，則$x^2$代表正方形ab的面積（見圖 1）；接著，再把長x、寬 10/4 的四個矩形（c、d、e、f）加到正方形ab的四個邊上（見圖 2），此圖形面積和即為$x^2+10x$，亦即等於 39；最後，將邊長為 10/4 的小正方形補到圖形的四個角落，成為邊長為$x+2\times10/4$的大正方形GH（見圖 3），面積就是$39+4\times(10/4)^2=64$，因此，正方形的邊長$x+2\times10/4$應該等於 64 的（正）平方根 8，最後，就可以求出此方程的一解$x=3$。



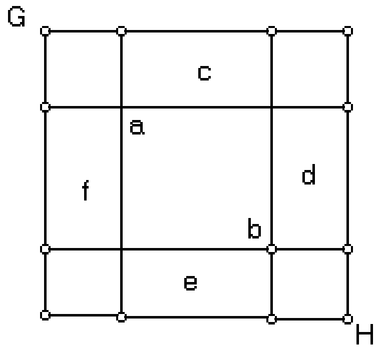




圖 1　　　　圖 2　　　　圖 3

可知，阿爾花拉子模上述方程解法的幾何解釋與解該方程的計算程序

$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2\times4+39}-\frac{10}{2}$是一致的，換言之，他為其方程解法的演算程序提供了幾何解釋。

另外，阿爾花拉子模也提供了相當於今日所使用的「配方法」的幾何解釋：

> **3 就表示正方形ab的一個邊，即所求未知數平方的一個根。且未知數的平方是 9。因此，我們取 10 的一半，將其自乘。當我們把這一乘積加上 39 時，大正方形GH就可以畫成了（見圖 4）。[4]**

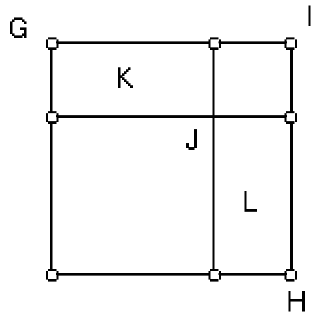



圖 4

也就是說，其相對應求解方程$x^2+10x=39$的演算程序為$x^2+10x+(10/2)^2=39+(10/2)^2$，即$(x+5)^2=64$，得$x+5=8$，可知$x=3$。

如前所述，阿爾花拉子模對於形如$x^2+c=bx$這樣的的二次方程，也以實例說明其解法及其幾何解釋。他以$x^2+21=10x$為例，其求解的程序如下：

> **首先，取根的一半，本例為 5，自乘得 25。從 25 減去與平方連接的 21 個單位，[5]得 4，取其平方根，得 2。從根的一半，或 5，減去 2，剩下 3，為平方的一個根，平方本身當然就是 9。假如**

> **你願意的話，你可以將根的一半即 5，加上你原先減去的 2，得 7，為平方的一根，49 則是此平方。**[6]

若以現代符號表示，其解法相當於 $x=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$ 與 $x=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$。此外，他還提醒讀者，如果遇到 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$＜c 的情形，則此方程式不成立；如果 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$＝c，則此方程的解爲 $\frac{b}{2}$，以及若平方項係數不爲 1 時，和前一例相同，將該係數轉換成 1 即可。

然後，他再給出上述計算步驟的幾何解釋。首先，畫出面積爲$x^2$+21 的矩形AD，其中矩形AFBH是邊長爲x的正方形，矩形FGDB面積爲 21，由於$x^2$+21＝10$x$，所以，HD＝10。

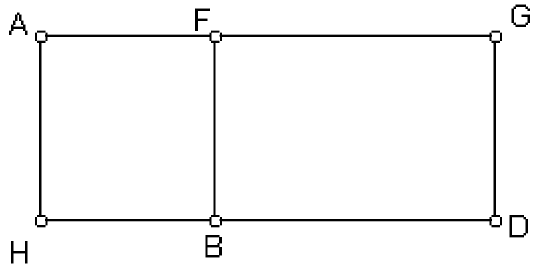



圖 4

接著，取 HD 的中點 E，再過 E 作垂線 ET，使得 ET＝HA。將 ET 延長至 C 點，使得 TC＝TG，並畫出正方形 TGLC 與 ENMC。

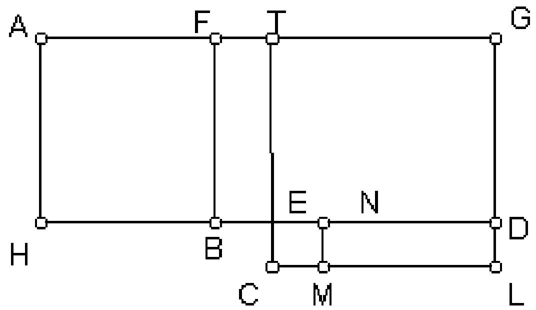



圖 5

因此，TC＝LC，EC＝MC，得TE＝LM。又GD＝AH＝HB，GL＝DE＝HE＝ $\frac{1}{2}$HD＝5，所以，EB＝DL，可知矩形FTEB＝矩形DEML。最後，正方形ENMC＝正方形TGLC－（矩形TGDE＋矩形NDLC）＝矩形TGLE－（矩形TGDE＋矩形FTEB）＝（10/2）$^2$－21＝4，亦即EC＝DL＝EB＝2，故求得該方程解x＝10/2－2＝3。換言之，他給出了二次方程 $x^2$+21＝10 的一解 $x=\frac{10}{2}-\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}=3$之幾何解釋。

然而，阿爾花拉子模僅考慮 E 點在線段 HB 外的情形，對於 E 點也在線段 HB 中間的情形（可求出此方程的另一解 7），並沒有提出相關的幾何說明，僅提到假如將 EC 和 EH 相加，

得 NH，等於 7 爲另一解。

不過，我們發現在與阿爾花拉子模在同一時期的阿拉伯數學家ibn Turk的著作《代數》（*Kitab al-jabr wa'l muqbala*）中，有提出了求解二次方程$x^2+21=10$ 的另一根 $x=\frac{10}{2}+\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}=7$ 演算程序的幾何解釋。他的方法與阿爾花拉子模上述的方法相仿，不同的地方，就是讓HD的中點E落於HB之間，接著作出正方形CEDL與BENT（見圖 6）。

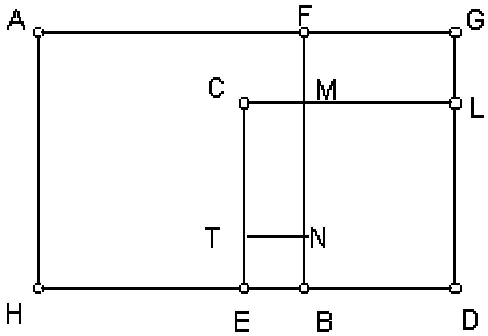


圖 6

由此可知，CT＝BD＝ML，TN＝EB＝HB－HE＝AH－ED＝AH－LD＝GL，所以，矩形CMNT ＝ 矩形GFML。最後，
正方形TNBE＝正方形CLDE－（矩形MLDB＋矩形CMNT）＝（10/2）$^2$－（矩形MD＋矩形GM）＝25－21＝4，得x＝HB＝HE＋BE＝5＋2＝7。

事實上，這樣藉助幾何論證來說明方程數值解法的方式，正是阿拉伯數學的一大特色，[7]甚至依然出現在十六世紀義大利數學家卡當諾 (G. Cardano, 1501-1576) 的數學著作《大術》(Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus)中。由此可見，這種進路對於歐洲數學的發展具有相當程度的影響，而且在數學史上具有相當重要的地位。

如前所述，阿拉伯代數在今日代數教學上所帶來的啓發，的確值得我們注意。阿爾花拉子模針對二次方程$x^2+bx=c$所提供的幾何解釋，正是可以作爲我們二次方程解法－「配成完全平方」（或公式解）的另類教材，讓學生除了透過抽象化與演繹性的演算學習代數課程之外，還可以藉由具體且可操作的幾何圖形，去我們幫助理解與學習。換言之，阿拉伯的代數研究不但提供學生多樣化學習，同時也可以讓學生認識其他文化的數學知識，爲數學課程中注入多元文化的關懷，值得我們一試！

## 註解：

1. 阿拉伯文明（Islamic civization）大約是指公元 750 至 1450 年。事實上，建立阿拉伯文化的人並不僅是阿拉伯人，還包括希臘人、波斯人和印度人等等，只是，當時通行阿拉伯文，著作均以阿拉伯文書寫。
2. 引自李文林主編 (2000)，頁 99。
3. 阿爾花拉子模以 $2x^2+10x=48$ 和 $\frac{1}{2}x^2+5x=28$ 爲例作說明。
4. 引自李文林主編 (2000)，頁 102。
5. 阿爾花拉子模定義數由單位（units）所組成。

6. 引自李秀卿 (1997)，頁 96。
7. 其實，在阿爾花拉子模之後的 Thabit ibn Qurra（約 830-890）、Abu Kamil（約 850-930）以及 Al-Kareji（逝於 1019）等人身上，可以更清楚看到希臘數學的深刻影響，譬如他們都以歐基里得（Eucild，公元前 300 左右）的《幾何原本》（*Elements*）作爲論述方程解法之幾何意義的重要依據。

## 參考資料：


李文林主編 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。

李秀卿碩士論文 (1997).《二次方程式的幾何思維之歷史研究：以中國與回教世界爲例》，台北：國立台灣師範大學數學研究所。

楊瓊茹 (2001).〈Algebra 的語源〉,《HPM 通訊》第四卷第五期：7-8。

蕭文強 (1994).《1，2，3……以外－數學奇趣錄》，台北：書林出版社。

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

Karpinski, L. C. (1915). *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*. London: Macmillan.

Katz, Victor J. (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College.


# 奧馬．海亞姆：阿拉伯數學家、天文學家、詩人及哲學家¹

台師大數學研究所碩士班研究生 黃清揚

Ah, but my Computations, People say,
Reduced the Year to better reckoning?—Nay,
´T was only striking from the Calender
Unborn To-morrow and dead Yesterday.

*Rubaiyat* LVII

啊！別人豈不說我的修曆使歲月好算？
不，唯有將未降生的明日，已逝去的昨天從曆書上消除，歲月才有改變。

《魯拜集》57

## 一、前言

西元九～十二世紀可說是阿拉伯文明的黃金時代，此時希臘數學衰微，中亞細亞成爲新的文化中心。西元 766 年，阿拉伯帝國的阿拔斯王朝建都巴格達，是爲塞爾柱王朝（Seljuk）。之後於哈里發哈倫·拉西德（Hārūn al-Rashīd）統治期間（786-809），[2]在巴格達建立了一座圖書館，收藏了許多希臘古典時期的手抄本。而到了九世紀初，有一位熱心提倡學術的哈里發馬蒙（al-Ma'mūn，統治時期 813-833），在他領導下，建立了後來延續 200 多年之久的學術研究機構一智慧宮（House of Wisdom），並廣泛網羅人才智庫。也由於統治者的鼎力支持，當時的阿拉伯國家善於吸取外來的文化，同時把大量希臘和印度的學術著作翻譯成阿拉伯文。於是，許多優秀的學者便在這樣的背景之下產生，且對後世數學及科學的發展有著不可磨滅的貢獻，其中之一，便是列名四位偉大阿拉伯科學家的奧馬·海亞姆。

[3]

## 二、生平

奧馬·海亞姆（Omar Khayyam 或´Umar al-Khayyāmī，約 1048~約 1131，全名 Ghiyāth al-Dīn Abu'l-Fath ´Umar ibn Ibrāhīm Al-Nīsaburī al-Khayyāmī）或許是阿拉伯世界中最常被人們所提到的學者之一。他不僅是一位數學家，更是天文學家、詩人及哲學家，許多人對他詩集的認識更甚於其科學研究。其最著名的詩集一《魯拜集》（*Rubaiyat*），在經過英國詩人費滋傑羅（Edward Fitzgerald，1809-1883）於 1859 年之英譯後廣爲流傳，至今此一詩集仍被傳頌。

奧馬·海亞姆生於波斯霍拉桑的內沙布爾（Nishāpūr，今伊朗境內的 Khurasān），卒於同地（墓地見右圖）。他的名字 al-Khayyāmī（帳棚製造者）透露出他的父親或先人可能從事過帳棚製造的生意。在奧馬·海亞姆出生前不久，賽爾柱土耳其人便征服了波斯並建立了不穩定的軍事帝國，而本文主角的一生與政治的起起落落可說是糾結在一起。我們並不太瞭解奧馬·海亞姆年輕時的活動，只知道他在 Balkh（今阿富汗境內）求學，在 17 歲時便精通哲學的所有領域。1070 年，他來到

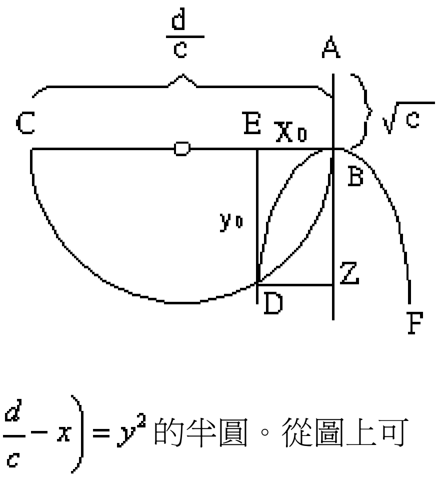
撒馬爾干（Samarkand，今烏茲別克境內），並在著名法學家（jurist）Abū Tāhir 的資助下寫下不朽的著作《代數學》。之後不久，在統治者 Malik-Shah 的邀請下，奧馬・海亞姆至依斯法罕（Isfaham，今伊朗境內）擔任當地天文台台長達 18 年之久，在那裡幾乎所有最好的天文學家都聚集在此天文台工作。由於統治者的大力支持，奧馬・海亞姆在學術方面的工作相當順利。這期間他寫下許多經典著作，並於 1079 年主導過曆法改革。1092 年之後，因為一連串的政治事件，再加上有人指控他的四行詩中出現對傳統宗教的不滿，奧馬・海亞姆便逐漸失去統治者的贊助及支持。為了澄清無神論的指控，奧馬・海亞姆晚年更曾籌備麥加朝聖之旅。

他的著作，除了《魯拜集》對後世有重大的影響外，數學方面的成就也是不可忽視的。諸多數學作品中，最著名的可說是《代數學》一書。

## 三、《代數學》

《代數學》，原書名為『還原與對消問題論證』（*Risāla fi΄l-barāhin alā masā΄il al-jabr wa΄lmuqābala*）。本書完成於 1100 年左右，奧馬・海亞姆將代數定義為『解方程的科學』(a “scientific” art)，也因此進一步推進了方程理論。為了方便解三次方程，奧馬・海亞姆採取與阿爾・花拉子模相似的作法，[4]首先考慮所有形式的三次方程式。又因為他只接受正根，係數也限於正數，因此最終他將三次方程式歸結為 14 類，分別是：二項式一個（$x^3=d$），三項式六個（$x^3+cx=d$, $x^3+d=cx$, $x^3=cx+d$, $x^3+bx^2=d$, $x^3+d=bx^2$及$x^3=bx^2+d$），四項式七個（$x^3+bx^2+cx=d$, $x^3+bx^2+d=cx$, $x^3+cx+d=bx^2$, $x^3=bx^2+cx+d$, $x^3+bx^2=cx+d$, $x^3+cx=bx^2+d$及$x^3+d=bx^2+cx$）。然後奧馬・海亞姆對每一類的方程式都作仔細的分析，並引進希臘人曾經使用過的方法 — 兩個圓錐曲線的交點，來證明其結論是正確的，最後並討論在什麼情況下，此三次方程式無解或多個解。值得注意的是，在討論三次方程式時，奧馬・海亞姆依然採取古希臘「齊次」的觀點，亦即三次方程式中的每一項必須對應一個立體。以下我們來看看奧馬・海亞姆對$x^3+cx=d$的處理。

因為 x 代表立方體的一個邊長，c 必須代表面積（正方形），d 則為立體。為了求解，奧馬・海亞姆取 $\overline{AB}=\sqrt{c}$，即　為面積為 c 之正方形的一邊。接下來作 $\overline{BC}\perp\overline{AB}$，使得 $\overline{BC}\cdot\overline{AB}^2=d$ 或 $\overline{BC}=\dfrac{d}{c}$。下一步將 $\overline{AB}$ 延長至 Z，並作一條以 B 為頂點、BZ 為軸、參數為 $\overline{AB}$ 的拋物線，其方程式為 $x^2=\sqrt{c}y$。




之後，在 $\overline{BC}$ 作一個方程式為 $\left(x-\dfrac{d}{2c}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{d}{2c}\right)^2$ 或 $x\left(\dfrac{d}{c}-x\right)=y^2$ 的半圓。從圖上可知，這兩條圓錐曲線交於 D，而他的 x 軸長（ $\overline{BE}$ ）即為此三次方程式的解。

奧馬・海亞姆證明其解的正確性如下：若 $\overline{BE}=\overline{DZ}=x_0$、 $\overline{BZ}=\overline{ED}=y_0$，則

$$x_0^{\ 2} = \sqrt{c}\,y_0 \text{ 或 } \frac{\sqrt{c}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0}$$

並且

$$x_0\left(\frac{d}{c} - x_0\right) = y_0^{\ 2} \text{ 或 } \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{\frac{d}{c} - x_0}\text{，}$$

所以

$$\frac{c}{x_0^{\ 2}} = \frac{x_0^{\ 2}}{y_0^{\ 2}} = \frac{y_0^{\ 2}}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)^2} = \frac{y_0}{\left(\frac{d}{c} - x_0\right)}\frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0}{\frac{d}{c} - x_0}\text{。}$$

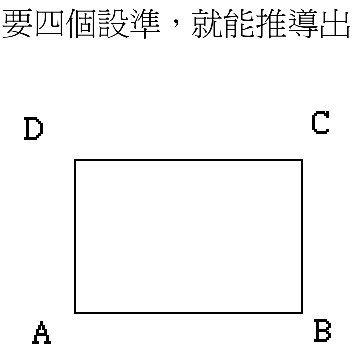
從而 $x_0^{\ 3} = d - cx_0$，$x_0$即爲所求。在此，奧馬・海亞姆指出這一類的方程在原點之外一定有一根（交點），而原點並不是這方程式的解。

對於其他類型的三次方程式之討論，奧馬・海亞姆都是用類似的方法來進行的。[5]對於那些正根並不一定存在的情形，他給出了幾何條件：根的存在與否，端視兩圓錐曲線是否交於一點、兩點或不相交。然而，對$x^3+cx=bx^2+d$這一類的方程式，他並沒有發現存有三根的可能性。而對於解與係數的關聯性，奧馬・海亞姆也僅在少數的情況之下才加以討論。

奧馬・海亞姆三次方程的幾何理論可說是他最成功的研究成果，帶給後世相當可觀的影響。納西爾丁（Nasīr al-Dīn al-Tūsī, 1201-1274）基於奧馬・海亞姆的成果繼續往前推進，而西歐數學家在這方面的研究，則是在笛卡爾（Descartes, R., 1596-1650）之後的故事了。除了在三次方程式的貢獻之外，奧馬・海亞姆對幾何學的探討也至關重要。

## 四、幾何學

1077 年，在奧馬・海亞姆提出曆法改革前兩年，他完成了另一項重要的著作《對歐幾里德幾何原本設準之問題的評論》（*Sharh māashkala min musādarāt kitāb Uqlīdis*, *Commentary on the Problematic Postulates of the Book of Euclid*）。本書討論到兩個相當重要有關於幾何基礎的問題，其中之一爲《幾何原本》第五設準（平行設準）問題。奧馬・海亞姆打算經由前面四個設準，來證明出第五設準，如此一來，他就只需要四個設準，就能推導出後面的所有命題了。這個問題在較早前已被塔比伊本庫拉（Thābit ibn Qurra，約 826-901）以及伊本海塞姆（Ibn al-Haytham，965-1039）研究過。[6]奧馬・海亞姆顯然不滿意他們的研究，他從四邊形ABCD著手（如右圖），CB與DA爲兩個長度相同的線段且皆垂直AB。奧馬・海亞姆認識到爲了要從其它設準來證明平行設準就需要證明角C及角D爲直角，因此，他分別假設角C、D爲銳角、鈍角及直角，而前兩者都會得到『矛盾』。有趣的是，這種處理方式與非歐幾何學有密切的關係，因爲接受前面兩種假設爲真時，最終都會導致非歐幾何學的誕生。顯然奧馬・海亞姆當時無意於此，不過，他的成就的確影響了後來相關數學的發展。一百五十年後，納西爾丁接受了奧馬・海亞姆的觀點，並且在這方面的研究做出了



貢獻。而納西爾丁的研究更影響歐洲十七、十八世紀的幾何學家，譬如 1651 年、1663 年沃利斯（John Wallis，1616-1703）討論歐幾里德的設準問題時，便引用了納西爾丁的著作。

另外一個奧馬・海亞姆所考量的問題是比（ratios）。而他的成就有兩方面，一是將比例（proportion）的定義表達得更爲詳盡；另一則是將數的觀念擴大至包含量與量的比。在歐幾里德《幾何原本》第五卷定義 5 中，兩比例相等的定義如下：

> 有四個量，第一量比第二量與第三量比第四量稱做有相同比，如果第一與第三個量取任何相同倍數，又對第二與第四個量取任何相同倍數，而第一與第二倍量之間依次有大於、等於或小於的關係，便有第三與第四倍量之間相對應的關係。[7]

也就是說：a 與 b 是相同量且 c 與 d 也是相同量，若（1）ma<nb 時，mc<nd（2）ma＝nb 時，mc＝nd（3）ma>nb 時，mc>nd 成立，就稱 a：b = c：d（m、n 爲任意正整數）。奧馬・海亞姆並不認同這個定義，因爲我們不可能去測試所有的正整數，而且對比的運算也會出現問題。所以，他以如下定義替換（用現代語言）：

若

$$\frac{a}{b}=(q_1,q_2,\ldots,q_n,\ldots)$$

$$\frac{c}{d}=(q_1',q_2',\ldots,q_n',\ldots)$$

則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的條件是 $q_k'=q_k,\ \forall k\in N$（對可公度比來說，k 是有限）。這樣一來，奧馬・海亞姆就大大提高了『比』的可運算的程度了。

再者，希臘人認爲不可公度量就不能稱爲數，譬如正方形對角線與邊長的「比」（ $\sqrt{2}$ ：1）。這個概念，到了奧馬・海亞姆則是被解放出來了，他直接了當的說任意量之比（不論可公度或不可公度）皆是數。如此，他便能隨心所欲地處理無理數，不再被不可公度量的複雜運算綁得礙手礙腳了。如同前面所提平行設準對後世的影響一樣，歐洲數學家同樣地從納西爾丁著作中，得到奧馬・海亞姆的啓發。無論如何，奧馬・海亞姆影響了歐洲數學的發展，殆無疑問。

## 五、結論


經由本文有關奧馬・海亞姆的故事及成就之介紹，筆者希望能讓大家認識到阿拉伯數學對世人所做出的貢獻。事實上，阿拉伯數學吸收了古希臘、印度、中國和本地區的數學，融會東、西方的長處於一身，最後發展出獨特的風格。這種評價套在奧馬・海亞姆身上也不例外，[8]而他原創性的著作對西歐數學的發展，更是不可磨滅。可惜，阿拉伯數學對西方的影響似乎被諸多西方史家刻意忽視下長期地被扭曲了，[9]或許這正是西方宗教及民族自尊心發酵之後的結果吧！目前，東、西文化正處於對立與衝突的緊張關係之中，或許也

正是讓我們多方瞭解神秘面紗背後的笑容與智慧的最佳時機吧！最後，請容許筆者以奧馬・海亞姆的另一首詩來結束本文：

The Moving Finger writes, and, having writ,
Moves on: nor all thy Piety nor Wit
Shall lure it back to cancel half a Line,
Nor all thy Tears wash out a Word of it.

*Rubaiyat* LXXI

揮動的手指書寫且書寫完成，繼續揮動；
既不是你的智慧亦不是你的虔誠能把它半行更改，
你所有的眼淚亦不能把它一字洗清。

《魯拜集》71

## 註解：

1. 這裡所稱的阿拉伯數學，是指用阿拉伯文為主要文字寫成的數學著作所代表的數學，其中的學者並非全然是伊斯蘭教徒。
2. 哈里發（caliph）為伊斯蘭教先知穆罕默德逝世後，繼續執掌政教大權者的稱謂，原意為代理者、繼任人。西元 1258 年，阿拔斯王朝最後一位哈里發穆斯台爾綏姆被蒙古旭烈兀軍隊殺害後，『哈里發』當作伊斯蘭國家最高政治和宗教領袖的職位，基本上已不復存在。
3. 其餘三位分別是阿爾・花拉子模（Al-Khawārizmī，約 780- 850）、阿爾・比魯尼（al-Bīrūnī，973-約 1055）、阿爾・卡西（al-Kāshī，約卒於 1436），見 Berggren (1986), pp. 5-21。
4. 阿爾花拉子模將二次方程式分為六種。
5. 例如解$x^3+bx^2=b^2c$用拋物線與半圓；解$x^3+ax^2=c^3$用拋物線與雙曲線；解$x^3+ax^2+b^2x=b^2c$則用橢圓與雙曲線。
6. 早在希臘時代就有許多數學家對這個問題提出討論，如托勒密（Ptolemy，約 110-約 170）與普羅克洛斯（Proclus，約 412-485）。
7. “Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken to of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in c0rresponding order.”（Heath (1956), p.114）
8. 事實上，奧馬・海亞姆對印度數學並不陌生，因為他曾引用與印度數學相關的著作。其中有兩本書的作者提出了從自然數來解平方及三次方根的方法，分別是Kushyār ibn Labbā al-Jīlī（971-1029）所著的《印度計數法則》（*Fīusul hisāb al-hind*, Principles of Hindu Reckoning）及`Alī ibn Ahmad al-Nasawī（fl. 1025）所著《充分瞭解印度計數所需具備的事物》（*Al-mugnīʿfi l-hisāb al-hindī*, Things Sufficient to Understand Hindu Reckoning），這些內容與印度數學傳統的進路並不相同。根據*Dictionary of Scientific Biography*的說法，其來源是中國數學，這仍有待考證。
9. Morris Kline《數學史》（*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*）中便有許多這樣的觀點。

## 參考文獻

李文林主編 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。

梁宗巨 (1992).《數學歷史典故》，台北：九章出版社。

Omar Khayyam (1990).《魯拜集》（孟祥森譯），台北：遠景出版事業公司。

Kline, Morris (1983).《數學史一數學思想的發展》（林炎全等譯），台北：九章出版社。

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

Calinger, Ronald（ed.）(1995). *Classics of Mathematics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.

Gillispie, Charles Coulston (editor in chief) (1981). *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner’s Sons.

Heath, Sir Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid Elements* (Vol. 2). New York: Dover.
Katz, Victor J. (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.
Rashed, Rshdi, translated by A. F. W. Armstrong (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Struik, Dirk J. (1987). *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover.

# 阿拉伯的正七邊形作圖

台師大數學研究所碩士班研究生 葉吉海

## 一、前言

阿拉伯人原本只是游牧民族，在現今的阿拉伯世界裡逐水草而居。後來在穆罕默德的領導下振作並完成統一，並在他死後百年之內征服了東至印度，西至西班牙，包括北非和南義大利的版圖。755 年時，阿拉伯帝國分裂成兩個獨立的王國，東部以巴格達爲首都，西部以西班牙的哥多華爲首都。征服的工作完成以後，這些典型的游牧民族就安頓下來，並建立他們的文化。他們很快就對藝術和科學發生興趣，東西兩個王國的首都吸引了許多科學家。他們的研究也受到支持。阿拉伯人很大方地容納各種民族和教派，異教徒也能自由活動，阿拉伯人相信這些只是宗教意識的不同。總而言之，阿拉伯人的知識是直接得自希臘手稿或敘利亞文和希伯來文版本，且各種主要的數學知識他們都能接觸到。

有關幾何作圖的知識，大約在紀元 800 年，阿拉伯人從拜占庭那得到歐幾里得《幾何原本》的拷貝，並將它轉譯成爲阿拉伯文。後來，阿基米德和阿波羅尼斯的著作也傳入阿拉伯。然而，這三位數學家的著作可說是阿拉伯幾何的三支柱，影響阿拉伯非常深遠。

本文筆者以阿拉伯數學家 Abu Sahl al-kuhi 的圓內接正七邊形作圖爲主題，介紹這位阿拉伯數學家處理這問題的脈絡和相關的阿基米德正七邊形作圖法。

## 二、脈絡

在十世紀後半葉的阿拉伯，由於 Buvid 家族的資助下，巴格達和周圍的區域聚集了一群來自東阿拉伯世界的著名的科學家。這些贊助者中，最主要的是 Adud al-Daula 國王，而 Abu Sahl al-kuhi 正是他宮廷中一個主要的科學家。

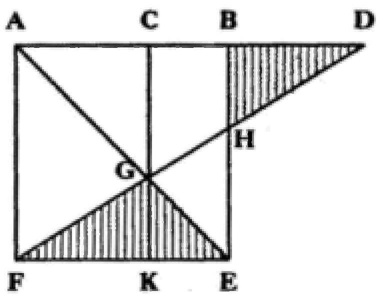
Abu Sahl al-kuhi 出生於裏海南部的 Tabaristan，他名字中的 kuh 是波斯文字『山』的意思。根據傳記作家 al-Bayhaqi 的描述，Abu Sahl 原來在巴格達市場中玩弄玻璃瓶雜耍的人，但後來他放棄雜耍的工作，轉而研讀和從事科學的研究。也許是因爲從事雜耍的緣故，激起 Abu

Sahl 對『重心』的興趣，從而融會貫通了阿基米德時代以來有關重心的深刻理論。事實上，Abu Sahl 對阿基米德的著作相當瞭解。另外，他也寫了有關完備圓規的著作，一個用來畫圓錐曲線的工具。由於他對圓錐曲線的興趣和經驗，當接觸正七邊形的作圖問題時，他乃能提供一個運用圓錐曲線解題的解。

Abu Sahl 解決正七邊形的作圖方法的靈感來自於阿基米德。他的方法是用分析法來先分析問題，即先假設正七邊形可被作出來，然後反推回去，經過一連串合理的步驟，他得到所給的初始條件。詳細的過程將在本文第四節中呈現。在下一節，我們先介紹 Abu Sahl 解題的靈感來源，阿基米德的正七邊形作圖法。

## 三、阿基米德的正七邊行作圖法

阿基米德處理正七邊形的作圖，是從給定的一線段 AB 開始。在 AB 上先作一正方形 AFEB，畫出對角線 AE，並將線段 AB 向 B 外延伸，接著使用端點作圖法，即過 F 點作一直線，轉動此直線直到它與 AE 以及邊 FE 之間所圍的面積，等於該線與邊 BE 以及 AB 在 B 外的延長線之間所圍的面積爲止。令 FD 表示該直線，而相等的面積就是圖上陰影的部分，且 FD 與對角線相交於 G，與 BE 相交於 H，同時 AB 延長到 D。過 G 作一直線平行於 BE，且交 AB 於 C，交 FE 於 K。

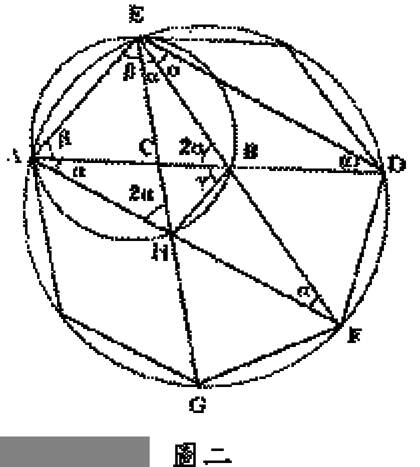


圖一

接著，阿基米德證明由端點作圖法而得的四個共線點 A、B、C、D，滿足下列兩個方程式：

$$AB \cdot AC = BD^2，\qquad (1)$$
$$CD \cdot CB = AC^2。\qquad (2)$$

第一個式子，可由兩個帶陰影的三角形面積相等、和三角形 HBD 相似於三角形 GKF 兩個條件推得。第二個式子，則由下列條件推得：因爲三角形 FKG 相似於三角形 DCG、AE 爲正方形的對角線，所以 GC＝AC、KE＝GK＝CB。



圖二

阿基米德在得到滿足上述兩式子的線段 AD 之後，接下來作點 E，使得 CE＝CA 和 BE＝BD。然後作三角形 AED 的外接圓，如圖二所示。這時，阿基米德說，我們可以斷定 AE 就是圓內接正七邊形的邊長了。如何證明呢？首先，我們可以知道三角形 EBD 爲等腰三角形，它的兩底角角度相等，記爲 $\alpha$，同樣地，三角形 ACE 的兩底角也相等，記爲 $\beta$。延長 EB 和 EC，設分別交大圓於 F、G。連結 AF 和 BH，我們可得∠FAD＝∠FED＝$\alpha$，∠AFE＝∠ADE＝$\alpha$。

接著，阿基米德利用∠ABE＝$2\alpha$（∠ABE 爲三角形 EBD 中∠B 的外角）、AC＝EC 和方程式（2）之變形得到

$$\frac{CD}{EC}=\frac{EC}{CB}。$$

故三角形 BEC 和三角形 EDC 相似（SAS 公理）。從而得∠BEC＝$\alpha$，而劣弧 GF、弧 AE 和弧 DF 同為 $2\alpha$。

弧 ED 和弧 AG 相等，同為 $2\beta$。如果我們能得 $\beta=2\alpha$，則就完成了所有的證明。為此，由於線段 HB 對著在 A 點及 E 點的角同為 $\alpha$，故 A 和 E 一定都在以 HB 為弦的圓弧上。換言之，A、E、B、H 四點共圓。在此圓中，圓周角 $\beta$ 對著弦 EB 和 AH，因此，這兩弦相等。繼之，在 H 點對著 AE 的角等於在 B 點所張的角 $2\alpha$。於是，∠AHE 也為 $2\alpha$。再利用 EB＝BD＝AH 和（1）式的變形得到

$$\frac{AB}{AH}=\frac{EB}{EC}$$

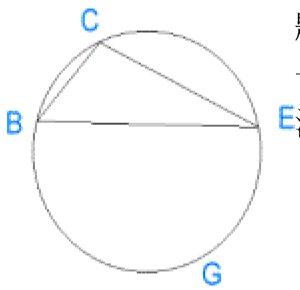
此外，又有∠BAH＝∠BEC。可知，三角形 EBC 和三角形 ABH 相似（SAS）。因此，∠HBA＝$2\alpha$。因為∠HBA 與∠AEH 在同一圓上對著弦 AH，所以，$\beta=2\alpha$。弧 ED 及 AG 都是 $4\alpha$，整個大圓的周長是 $14\alpha$，得證了弧 AE 是大圓的七分之一。

四、Abu Sahl 的正七邊形作圖法

以下的是 Abu Sahl 的分析方法，他將這成果獻給 Adud al-Daula 國王。他的作圖過程有三個部分，分別是從正七邊形作圖化約到三角形作圖、從三角形作圖化約成線段的分段作圖、線段的分段作圖化約成圓錐曲線作圖。

（一）從正七邊形作圖化約成三角形作圖：

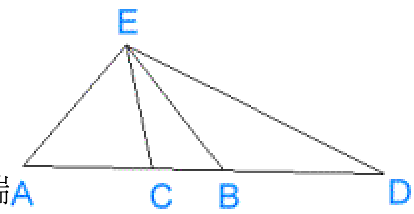
圖三中，假設在圓 BCE 中我們成功做出正七邊形的邊 BC，且弧 CE = 2 弧 BC，得弧 BCE = 3 弧 BC。又弧 BC 等於整個圓的七分之一。所以，弧 BGE=4 弧 BC。根據《幾何原本》命題 VI-33 知：三角形 BCE 的內角間的比例，與所對應的弧長成比例一樣，亦即∠C＝4∠E、∠B＝2∠A。從此分析，正七邊形的作圖法演繹為作個一三角形，其三內角比為 4：2：1 的作圖問題。




圖三

（二） 從三角形作圖化約成線段的分段作圖：

令三角形 BCE 滿足∠ECB＝2∠CBE＝4∠CEB，向 BC 兩端延長於 A、D 兩點，滿足 DB＝BE，AC＝CE，完成三角形 AED，如圖四所示。因為∠BEC＝∠D（∠CBE＝2∠BEC＝2∠D），所以，三角形 BCE 相似於三角形 ECD，可知




圖四

DC：CE＝EC：CB，$CE^2$＝DC‧CE　（3）

因為∠CEA＝∠CBE（∠ECB＝2∠CEA＝2∠CBE），所以，三角形 EAC 相似於 BAE，可知

BA：EA＝EA：AC，$EA^2$＝BA‧AC　（4）

又因為 EC＝CA，∠A＝∠CEA＝∠CBE，所以，AE＝EB＝BD。（3）、（4）分別變形為

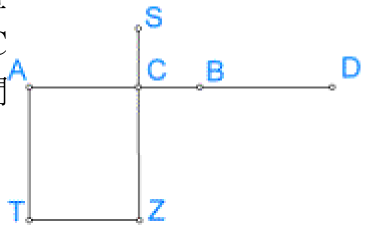
$CA^2$＝DC‧CB　（5）

$BD^2$＝BA‧AC　（6）

（三）線段的分段作圖化約成圓錐曲線作圖：

令AD線段被C、B所截，滿足（5）、（6）兩式，且過C作SZ垂直AD，滿足SC＝CB，CZ＝BD，並完成長方形CZTA。然後可得ZS・SC＝DC・CB＝$CA^2$，又SC＝CB和CA＝TZ，可得ZS・CB＝$TZ^2$。我們可說，T在以S點為頂點，BC長為參數的拋物線上。[1]

另外，$BD^2$＝BA・AC和BD＝CZ＝AT，所以得BA・AC＝$AT^2$，即T在以C為頂點，transverse side和參數長同為BC的雙曲線上。[2]



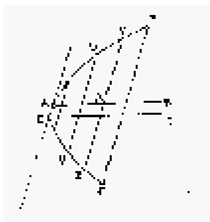
圖五

## 五、後語

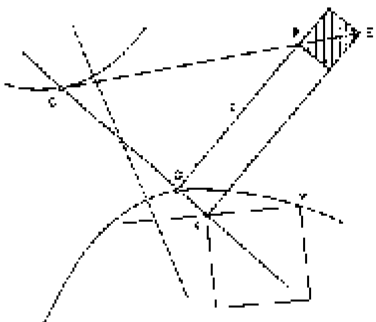
正七邊形作圖是歐幾里得在正三、四、五、六邊形作圖後，第一個未處理的作圖。雖然阿基米德理論地做出了正七邊形的作圖，但什麼時候兩三角形面積會相等，則無從得知。Abu Sahl 深入分析了阿基米德的作圖的方法，做出了屬於他自己的東西。難得可貴的是，雖然他的出身是戲法者，但由於興趣的使然，成就了數學史上令人稱羨的貢獻。值得我們後輩推崇與效法。

### 註解

1. 拋物線的性質：
如下圖所示，AB為拋物線的一直徑，YZ為其相對應的弦，交AB於X，則$XY^2$=p・AX，p為相對應的參數。



2. 雙曲線性質：
如下圖所示，直線CC`為雙曲線的一直徑，XY為其相對應的半弦，則$XY^2$＝CX・（p＋s），p為其相對應的參數，s與CX和p等的關係為s：CX＝P：CC`。



## 參考資料：

Kline, Morris (1983).《數學史—數學思想的發展》(林炎全等譯),台北:九章出版社。
朱恩寬、李文銘 等譯,《阿基米德全集》,陝西科學技術出版社。
Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.
Hogendijk, Jan P. (1984). "Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon", *Archive for History of Exact Sciences* 30: 197-330.
Katz, Victor (1993). *A History of Mathematics*. New York: HarperCollins College Publishers.

Reader's FeedBack

# 我和 John 的夏天

台師大數學系三年級 柳怡君

每次看到《HPM 通訊》,都沒什麼感覺,只覺得都是一些人在分享一些對數學的想法、新的論點。有時無聊時會拿來翻一翻,看一下和平常學的數學不太一樣的東西,還有一些數學和生活連結的地方。但是當我看到這一期的封面時,先是震驚了一下,這個 John 好像似曾相識的樣子,趕緊去問一下同學,證實是我知道的那個 John。心裡的震驚度相當大,這一切都要從去年暑假說起。

還記得大一要放暑假時,看到系上要徵暑期工讀生,好奇之下就和同學一起去參加。後來終於知道是要去 HPM 當工讀生,HPM 是什麼啊?以前完全沒聽過,但是愈接近開始的日期,對它了解就愈多。在助教的解說下是會有一大堆來自世界各地的數學家,來我們學校做一段時間的演說、討論,哇!!!要和一大堆外國人相處呀,這輩子的第一次,當務之急,就是先加強自己的英文能力,不過當自己要活生生的和外國人面對面時,什麼都忘了。

前二、三天,就已經陸陸續續有人來了,真的大家都是來自世界各地,有美國、英國、荷蘭、巴西……等。雖然大家說的都是英語,但是我真的很像『鴨仔聽雷』,我的回答都是千篇一律 "Can you speak slowly?"、"Sir, pardon",這時才驚覺自己以前學的英語都忘的差不多了。這樣子一整天的觀察下來,發現外國人感覺真的都蠻高的,而且輪廓也都蠻深的。這麼多人裡面有幾個讓我印象很深刻:有主席 Jan、前任主席 John、巴西的 Oscar、日本的 Masami 和 Yutaka、還有一個從荷

蘭來的賣書的人。Jan 看起來人很壯，第一眼感覺上是很嚇人的，帶點嚴肅的感覺、John 瘦瘦高高的，多方打聽之下知道他是前任主席，花了好久時間才把他和 Jan 分清楚。Oscar 是蠻早就來住宿的人，記得那時他要打電話回巴西，還問我要怎麼打，我是完全不知道，那時他給我的印象是，好像是腳不太舒服又老是揹著一大堆很重的東西走來走去。日本來的 Masami，第一眼看到他就覺得他很像小叮噹，而且又聽說他很厲害，還帶了二個學生，其中一個學生 Yutaka，是和我們混得最熟的，因爲他很有趣，常常和我們聊天，所以，我們這一群工讀生都跟他很熟。其實，剛來時對大家只有陌生的恐懼感，但是漸漸地經過兩三天的相處，每天起床、吃飯、出去玩、晚上回去睡覺，幾乎都會遇到的情況下，和大家也漸漸熟絡了起來，而且也開始敢用很爛的英語去跟大家閒扯。

說到 John，一開始認識他就是用他很高去認人，因爲他常常和 Jan 走在一起會認不出來，也不敢和他交談，但是，因爲常常會遇到，他也似乎認識我們了，遇到我們時都會跟我們微笑，覺得這個人好親切，感覺很像自己的爺爺，去陽明山回來之後，感覺和他的距離又更拉近了一點。還記得在最後一天時，大家都要走了，跑去跟他合照，因爲他穿的全身白，然後我也是，他就說我們二個很像穿情侶裝，而且因爲我們身高差太多〈他 180 超過吧，我才 160〉，取鏡相當不容易，他就把自己的身高降得和我差不多，我就覺得很感動。記得那一天要走時，還有點捨不得。我覺得 John 雖然是個很有名的數學史家，但是卻不會給人一種高高在上自以爲很了不起的人，他人很好而且感覺很溫馨、很親切。當我看到通訊上面寫著他去世時，真是千萬般的不相信，想到去年看到他時身體健朗，怎麼會才一年而已就走了。再往下看，看到他的一些生平事蹟，原來去年他的身體就已經不舒服了，但是卻完全看不出來。看到時真的很難過，因爲第一次看到自己算是認識的人去世的消息。之前總覺得以後還會有機會遇到他，但是世上總有出乎人意料之外的事，所以好像只有保握當下才是最重要的。最後，只希望在另外一個世界的他一切安好。