HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中） 助理編輯：楊瓊茹（台師大數學系研究生）
編輯小組：蘇意雯（成功高中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新竹高中）
謝佳叡（台灣師大數學系） 林倉億（台師大數學系研究生 ）
陳鳳珠（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）

創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第四卷 第十期 目錄(2001年10月)

報導與真相：以『破圓周率神話』為例

台師大數學系 洪萬生教授

一九九八年八月三十日《自由時報》刊載了一則中央社發自渥太華的電文，茲先轉述如下：

圓周率三點一四一五九……『永遠除不盡』的神話，被加拿大一名年僅十七歲的數學天才給打破了。

今年六月高中畢業的伯熙瓦運用電子郵件與世界上二十五台電腦連線，計算出這亙古之謎，在小數點後第一兆兩千五百億位數即可除盡。

伯熙瓦十三歲起就在卑詩省賽蒙•福雷賽大學修課。他用二進位算法，發現圓周率（PI）第五兆個小數就是零，依十進位來算，那就是第一兆兩千五百億位數。

過去，大家都以為圓周除以直徑的數字是除不盡的非理數（按：應是『無理數』)。去年九月法國人貝拉爾把這無理數算到第一兆位小數，創下一個世界記錄。

如今這個記錄被伯熙瓦打破。過去，數學家只用一台大電腦計算這個數值，沒人找出到小數第幾位才能除盡，伯熙瓦靠網際網路和全球二十五台電腦連線作業，終於獲得突破。

一位渥太華科學家說，如果用人腦加紙筆，一秒鐘算一個小數點的話，要三十萬年才能像伯熙瓦那樣把圓周率除盡。

伯熙瓦已將數學學士所需要的學分修完一半，九月開學後，他將成為正式主修生。

這一則『新聞』實在是勁爆十足，記得當時閱讀時，簡直不敢相信我的眼睛。經過適當的查訪，我發現閱聽人 (audience) 甚多，因爲有些人是從收音機廣播中得悉此一訊息。不過，令人遺憾的是，閱聽大眾似乎都相信此一報導（至少我有一位學建築的朋友就是如此），例外的情形，大概只發生在數學教授與一些中學數學教師身上。更聳動的新聞事件，恐怕是有幾位數學教授去函某大報（非上述《自由時報》）要求更正，結果是：沒有下文！

本學期一開學，我利用上課之便，對本系 36 位大一、1 位大二、1 位大三學生進行調查，目的是瞭解他（她）們對這一則報導的反應。我的方法是將上述這一則新聞簡報複印給他們，然後請他們利用大約 40 分鐘的時間，要求他（她）們寫下評論或心得。結果赫然發現：只有六位學生對此一報導存疑，但是，他（她）們所依據的，不外乎是曾聽過高中老師的評論，或者是後來的『更正』報導。不過，他（她）們所以不相信此一報導之『真實性』的主要原因，卻是電腦可能犯錯，所以，伯熙瓦的『突破』當然還有待證實！

在收取他（她）們的答卷之後，我立即發下《自由時報》在一九九八年十一月十一日刊載的更正新聞稿，同樣由中央社發自渥太華的電文。然後，我接著講解與圓周率有關的數學史，其中當然必須澄清圓周率為何物！由於時間緊湊（只有六個小時），無暇閱讀他（她）們的臉上表情，實在可惜。

從此一教學插曲，我們可以得到什麼教訓或啓示？首先，即使是關於數學研究的新聞報導，經常被理所當然地認為指涉事實 (fact)，但是，它絕對還不是『真相』(truth)；套一句『後現代』的時髦修辭，充其量它只是『媒體再現』(media representation) 罷了！既然是『再現』，那麼，媒體『大哥』、『小妹』一旦掌握了麥克風，說謊話（扭曲真相）、講假話（看不到真相）甚至於炮製煽色腥等情事一直『再現』，也就不足為奇了。其次，大家寧可相信媒體報導，而不相信自己所學過的數學理論。第三，他（她）們無法理解電算機的技術精進與數學知識的（永恆）確定性，根本互不相涉！最後，『事實』與『真相』究竟有什麼區別呢？此一問題出自一位大四學生針對我在『數學史』課堂上所布置的對比：『歷史事實 (historical fact) vs. 數學真理 (mathematical truth) 』。我回答他說：『真相』（譬如數學定理或科學定律）必須經過論證的考驗，至於所謂的『事實』，則很可能永遠沒有經過查證呢！

中國剩餘定理

台師大數學研究所碩士班研究生 楊瓊茹

一、前言

在遊覽數學史這座寶山時，一幅幅數學風景呈現眼前，令人心曠神怡。尤其是一些非常有趣的發現，總是帶給我們意外的驚喜！例如：中國《孫子算經》中的『物不知數』與義大利《算盤書》中的『一次同餘組』這兩者對比下的相似性，就是很值得進一步討論的問題。在空間、時間差距甚大的場景下，它們竟有著『幾乎一致』的內容，其中是否有數學文化的交流？或者是歷史的巧合，是各自數學知識獨立的發展？甚至是否源於另一個數學文化？產生什麼影響？諸如這樣的問題，也往往引起數學史家的注意及興趣。此外，我們也發現到其他相當具有特色的『物不知數』題型，例如數學詩歌、『翦管術』和『天算頌』。在本篇文章的最後部分，我們嘗試著將『物不知數』給予數學延拓。對於『物不知數』和『一次同餘組』此種類型的問題，南宋秦九韶 (1202-1261) 的一般化解法和德國數學家高斯 (Gauss) 於 1801 年所發表的剩餘定理相同，因此，西方國家稱此類型的問題為『中國剩餘定理』(The Chinese Remainder Theorem)。底下，我們將開始這趟數學之旅！

二、文本對比

首先，引述中國《孫子算經》中『物不知數』的文本內容：[1]

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

答曰：二十三

術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

再看《算盤書》中的『一次同餘組』：[2]

> Let a contrived number be divided by 3, also by 5, also by 7; and ask each time what remains from each division. For each unity that remains from the division by 3, retain 70; for each unity that remains from the division by 5, retain 21; and for each unity that remains from the division by 7, retain 15. And as much as the number surpasses 105, subtract from it 105; and what remains to you is the contrived number. Example: suppose from the division by 3 the remainder is 2; for this you retain twice 70, or 140; from which you subtract 105, and 35 remains. From the division by 5, the remainder is 3; for which you retain three times 21, or 63, which you add to the above 35; you get 98; and from the division by 7, the remainder is 4, for which you retain four times 15, or 60; which you add to the above 98, and you get 158; from which you subtract 105, and thee remainder is 53, which is the contrived number.[3]

面對這兩則文本，我們先嘗試著用現代數學符號表示：

《孫子算經》的『物不知數』： $N \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7$

$\Rightarrow N = 70\times2 + 21\times3 + 15\times2 - 105\times2 = 23$ ；

《算盤書》的『一次同餘組』： $N \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 4 \pmod 7$

$\Rightarrow N = (70\times2 - 105) + 21\times3 + 15\times4 - 105 = 53$

兩者共同都有的解題概念： $N \equiv R_1 \pmod 3 \equiv R_2 \pmod 5 \equiv R_3 \pmod 7$

$\Rightarrow N = 70\times R_1 + 21\times R_2 + 15\times R_3 - 105T$,

其中 T 是使 N 為最小正整數的數。

就數學表徵來看，兩者是一致的，雖然被 7 除的餘數以及在扣除 105 的順序不同，然而對解題的概念並無影響，因為兩者皆掌握到此題技巧性解法的關鍵數字 70、21、15 與 105，並不需要嚴謹的數學理論做基礎，或許靈光一現的機智就足夠了。[4]從文字形式上，我們很

---

1. 引孫子 **(1993)**，頁 **243**。

2. 引 **Davis and Hersh (1981), pp. 188-189.**

3.《算盤書》的『一次同餘組』中文翻譯：設計一個數，除以 **3**、除以 **5**、也除以 **7**，問每次除法各剩餘多少。對於除以 **3** 所剩餘的每個單位 **1**，要記住 **70**；對於除以 **5** 所剩餘的每個單位 **1**，要記住 **21**；對於除以 **7** 所剩餘的每個單位 **1**，要記住 **15**，這樣的數如大於 **105**，則減去 **105**，其剩餘就是所設計的數。例如：設一數除以 **3** 餘 **2**，記住 **70** 的 **2** 倍或 **140**，其中減去 **105**，則剩餘 **35**，若除以 **5** 餘 **3**，記住 **21** 的 **3** 倍或 **63**，與上述 **35** 相加得 **98**。若除以 **7** 餘 **4**，記位 **15** 的 **4** 倍或 **60**，與上述 **98** 相加則得 **158**，減去 **105**，其剩餘是 **53**，這就是所設計的數。引李文林 **(2000)**，頁 **202-203**。

4. 因為 **70** 可被 **5** 及 **7** 整除，但被 **3** 除餘 **1**；**21** 可被 **3** 及 **7** 整除，但被 **5** 除餘 **1**；**15** 同理。

容易發現『物不知數』呈現著中國數學的特色：給實際題目，再給解法，沒有證明。相較之下，《算盤書》的『一次同餘組』是要去『造』一個『數』，先給出原則，再舉例子說明。兩者的出發動機似乎不同。另外，《算盤書》的『一次同餘組』的說明順序，閱讀起來也比較容易理解。

三、歷史場景與交流問題

透過現代數學符號的表示，我們希望掌握到其數學本質，然而，倘若只是數學符號式的一昧對比，並不能完全幫助我們重建過去所發生的歷史事件。我們必須為它再穿上文字的外衣，並且放回社會、文化的脈絡下，去貼近問題的內在層面。底下，請容許我給予一些時代意義的陳述吧!

在中國這一方面，『物不知數』這個膾炙人口的數學名題，首次出現在《孫子算經》卷下 26 問。[5]本書作者和編纂年代不詳，可能在西元四世紀左右，它詳述籌算制度、乘除法則、分數算法、開平方算法，是一本為初學者而作的啓蒙讀本。至於此問題產生的原因，數學史家錢寶琮先生認為很可能是依據當時天文學家『上元積年』的算法寫出來的，[6]絕非作者向壁虛造的智力遊戲。[7]這一問題也引起後代學者如宋代楊輝、明代程大位 (1533-1606) 很大的興趣，宋代周密 (1232-1298) 將此題稱變作『鬼谷算』，[8]並作隱語詩：

三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇；

七度上元重相會，寒食清明便可知。

此一問題流傳到了南宋時，秦九韶在他的著作《數書九章》中，將此問題推廣到任意的模數（非兩兩互質）及餘數，此求解的方法稱為『大衍總數術』，是先將模數化為兩兩互質，再用『大衍求一術』去求解，集大成了理論和算法。

至於《算盤書》(Liber Abaci，1202) 的『一次同餘組』，則是出自義大利數學家斐波那契 (Fabonacci，約 1170-1250) 之手。斐波那契非常沉迷於數學，曾跟阿拉伯人學習算數，懂得印度-阿拉伯數碼與其演算，也遊歷過埃及、敘利亞、希臘、西西里和普羅旺斯等地，並和當地學者討論及辯論數學。回到比薩後，他即編著《算盤書》，書中內容包含了斐波那契認為最好的印度、阿拉伯和希臘的方法。在當時，這本書受到廣泛的流傳，[9]而且斐波那契的數學才能也受到神聖羅馬帝國皇帝菲特烈二世 (Frederick II) 的賞識。繼斐波那契之後，許多西方數學家如玉山若干 (Regiomontanus；或 Johann Müller)、歐拉 (Euler)、拉格朗日 (Lagrange)、高斯 (Gauss) 等人，也提出了一次同餘組問題。

現在，讓我們來面對『物不知數』的交流問題。就數學內容的相似性來看，我們很難抗拒其中有數學交流的猜測。但是，由於現存的《孫子算經》為公元 1213 年或其後問世的南宋印刷本，至於《算盤書》則出版於 1202 年，因而究竟誰抄襲了誰？或者彼此獨立發展？在沒有明確的證據之前，這個答案的空間仍是極為寬廣，有待深入的求證與研究。其實，不

5.《孫子算經》的『物不知數』亦稱『孫子問題』。

6. 假定遠古某一個時刻各種天文週期 (日、月、五星) 恰好處於同一個起點，此起點稱為上元。自上元到今年所經過的年數稱為上元積年。

7. 印度人對同餘式問題有興趣的理由也跟中國相同。

8. 鬼谷算中的上元，指的是正月十五元宵節；寒食指的是清明節前一天，冬至與寒食相差一百零五天左右。

9. 《算盤書》最大的影響是將印度記數法引進歐洲。

論數學曾經交流與否，這些數學想法都呼應了各自文化的需求，甚至在各自文化中生根發芽，從而也對後代產生影響。或許，在面對此題歷史上優先權問題，我們不妨放慢腳步，仔細遊覽在脈絡底下所呈現的數學的人文化容顏，也許時間會在沉殿後，還給歷史一個答案吧！

四、中韓交流中『物不知數』題

在慶善徵 (1616-？) 所著作的《默思集算法》裡，解答了三題『物不知數』的問題，並且作詩文輔助記憶解題的關鍵數字。慶善徵將此題型歸類為『引剩求總門』。慶善徵是朝鮮李朝『中人算學者』出身，[10]可謂算學者中的第一級人物。當時，傳統數學並不是很受到重視，卻更激起他著作此書的使命感。在此之前，中國的《孫子算經》、《楊輝算法》以及《算法統宗》等書曾傳入韓國，『引剩求總門』是否與此有關連，尚且無從得知。底下，引述『引剩求總門』三則文本內容：[11]

三人同行七十稀，五鳳樓前廿十一；

七月秋風三五夜；冬至寒食百五除。

今有物不知其數，只云三三計之剩一，五五計之剩二，七七計之剩三，問元數幾何？

答曰：五十二。

法曰：凡物數七十，則五五計之無盈縮，七七計之亦無盈縮，三三計之，則餘只一，故曰三人同行七十稀；

凡物數二十一，則三三計之無盈縮，七七計之亦無盈縮，五五計之，則餘只一，故曰五鳳樓前二十一；

凡物數十五，則三三計之無盈縮，五五計之亦無盈縮，七七計之，則餘只一，故曰七月秋風三五夜；

凡物數一百五，則三三五五七七計之皆無盈縮，而上項三位併之得數，於內減此一百五，則之其元總，故曰冬至寒食百五除；

卻以三三五五七七計之，餘剩二，則各隨其數各自倍之；餘剩三，則三因；四則四因；餘倣此。而併三為合數，更多則以一百五為限，減之又減，不滿一百五而止，乃得合問。

底下兩題的解法以及說明方式，跟上題是一樣的，因此，我們僅將詩歌與問題的文本內容呈現給大家。

五人同居兩七九，七貴公侯五九五；

重陽節滿八五七，冬至寒食三合除。

今有數不知其數，只云五五計之剩三，七七計之剩一，九九計之剩二，問元數幾何？

答曰：二百一十八。

七月七日新月夕，蠡斯生子九十九；

重陽佳節風景好，兩叟同庚七十七；

至月雪天酒價錢，半貫纔除五十九；

六百九十三春和，除夜餘興倣此識。

今有物不知其數，只云七七計之剩三，九九計之剩二，以十一計之剩一，問元總幾何？

10.『中人算學者』指的是朝鮮李朝時代，介於貴族階級和被支配階層中間的技術官僚。

11. 引慶善徵 **(1985a)**，頁 **232-235**。

答曰：三百五十三。

接著，我們再來欣賞中國的『孫子歌』。此題編載於《算法統宗》(1592) 中，又稱為『韓信點兵』：[12]

三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝；

七子團圓正半月，除百令(零)五便得知。

今有物不知數，只云三數剩二箇(個)，五數剩三三箇，七數剩二箇，問共若干？

荅(答)曰：共二十三箇。

法曰：列三五七維乘，以三乘五得一十五，又以七乘之得一百零五，為滿法數列位。另以三乘五得十五，為七數剩一之衰；又以三乘七得二十一，為五數剩一之衰；又以五乘七得三十五，倍作七十，以三除之餘一，故用七十為三數剩一之衰。其三數剩二者，剩一下七十，剩二下一百四十；五數剩三者，剩一下二十一，剩二下四十二，剩三下六十三；七數剩二者，剩一下十五，剩二下三十。併之得二百三十三，內減去滿數一百令五，又減一百令五，餘二十三箇合問。

『引剩求總門』 和『孫子歌』這兩則文本，都對解法的關鍵數字 70、21、15 與 105 提供了說明，也將餘一、餘二、餘三時，各應取多少，加以解釋。但是，經我們比對之後，可以發現『孫子歌』的解釋更為詳盡。例如，儘管『引剩求總門』說明了七十可被五、七整除；被三除則餘一，然而，『孫子歌』卻更進一步說明七十如何取得：$(5\times 7)\times 2 = 70$。整體來講，這兩則文本都解答得十分清楚。相信眼尖的讀者已經能看出詩詞中的端睨，在此，也就不再贅述了。

程大位除了有廣泛的數學知識，也喜歡古文字、書法與詩詞。底下，引述他描述元宵節的一首詞：[13]

水仙子

元宵十五鬧縱橫，來往觀燈街上行。我見燈上下，紅光映，遶三遭，數不真。

從頭兒三數無零，五數時四甌不盡，七數時六盞不停，端的是幾盞明燈？

荅(答)曰：六十九盞。

將數學問題的表達，轉換成詩詞形式來呈現時，充份提供了問題的情境及想像的空間。從這一首詞中，我們可以想像當時的街道是井然有序的互相垂直，兩旁懸掛著燈籠，紅光輝映，人來人往，好不熱鬧呀！此時又有個人在那兒數燈籠，雖然答案是六十九盞，是最小的正整數解。但是，一百七十四、二百七十九、…，以一百零五累加上去的數，也能符合所求。由此可見，數學也可以不只是一堆數字與符號，只要多一點創意，如同此處將它隱藏到詩詞裡，讀起來倒也別有一番意境呢！倘若能適當地應用到數學教學上，相信會趣味無窮！

五、『翦管術』和『天算頌』

在南宋楊輝的著作集《楊輝算法》之〈續古摘奇算法〉(1275) 上卷中，孫子問題被稱為『秦王暗點兵，猶覆射之術』，並且題術定名為『翦管術』。本書給出五題一次同餘組的題目，分別為「三五七數」二問、「七八九數」、「十一十二十三數」、「二五七九數」。底下，引述兩則比較有特色的問題：[14]

---

12. 引程大位 (1993b) ，頁 **1307**。
13. 同上，頁 **1390**。「水仙子」為詞牌名。
14. 楊輝 **(1993)**，頁 **1100**。

1. 物不知總數，只云三三數之剩二，五五數之剩二，七七數之剩二，問本總數幾何？
   荅(答)曰：二十三
   解題：俗名秦王暗點兵，猶覆射之術。或過一百五數，須於題內之知。
   翦管術曰：三數剩一下七十，題內剩二下百四十；五數剩一下二十一，題內剩三下六十三；七數剩一下十五，題內剩二下三十。三位併之得二百三十三，滿一百五數去之，減兩箇(個)一百五餘二十三爲荅數。
2. 用工不知其數，差人支犒。每三人支肉一斤，剩零五兩八銖，乃三數剩二；每五人支錢一貫，剩零四百，是五數剩三；每七人支酒一掇，拾撞成掇，是七數無剩。問總工所支各幾何？
   荅曰：九十八人、錢一十九貫六百，
   酒十四掇、肉三十二斤一十兩十六銖。
   草曰：三剩二下百四十；五剩三下六十三；七無剩不下。併之得二百三，減一百五餘九十八工。以二百乘工數爲錢；七除工數爲酒；三除爲肉。

由於第 2 題應用題的題意比較不清楚，在此，略作解釋。「每三人支肉一斤，剩零五兩八銖，乃三數剩二」，其意思爲三個人合領一斤肉爲獎賞，但由於總人數被三除時，還差一人可整除，則剩餘的五兩八銖，即爲所差之人的獎賞；同樣地，剩下的錢數四百，是總人數被五除時，所差的二人之錢數。換算單位爲一斤等於十六兩，一兩等於二十四銖；一貫等於錢一千。綜觀『翦管術』術文，可以發現它的程序性說明之特色。

朝鮮算學家黃胤錫 (1729-1791) 在他的《算學入門》中，引用了楊輝『翦管術』的全部內容，將楊輝的解法做更詳細的說明和評註；此外，他還給出兩首隱語詩，並且稱此類型的問題爲『天算頌』。首先，我們引述『天算頌』的歌訣：[15]

> **三朋共暇七旬休，五鳳樓前訪昔儔；赤壁秋生寒月滿，介山春盡落花稠。三朋三也，七旬七十也，昔二十一也，秋生七月也，月滿十五也，春盡寒食三月也，由冬至至此一百五日也。**
>
> **三人同行七十稀，五老峰頭廿一餘；七月十五初秋夜，冬至寒食百五除。**

再看黃胤錫對『翦管術』題 1 的說明：

> **(三)以三為主，用五七相因得三十五，滿三去之餘二，非餘一，故須倍三十五得七十，滿三去之始餘一，所以三數剩一下七十；(五)以五為主，用三七相因得二十一，滿五去之餘一，所以五數剩一下二十一；(七)以七為用，三五相因得十五，滿七去之餘一，所以七數剩一下十五。右三五七循次相乘得一百五數，故本文滿一百五數去之。以上，今俗稱為天算法，三五七皆天數故也。**

顯然，黃胤錫進一步提供『翦管術』概念上的解說。另外，由黃胤錫對『翦管術』題 2 的評註：

> **今按三數剩二，當云剩一；五數剩三，當云剩二。答當云七人；錢一貫四百；酒一掇；肉兩斤五兩八銖。草當云：三剩一下七十；五剩二下四十二，併之一百一十二，減一百五餘七。以五除七為錢；七除七為酒；三除七為肉。**

我們發現黃胤錫對題 2 提出另一個答案。其實，追究楊輝和黃胤錫兩人的答案之所以會有所

15. 黃胤錫 (1985b)，頁 50-52。

不同，是因為他們兩人對題意的看法不同。所以，如何將題目敘述得簡單明瞭，也是值得注意的。

六、古今輝映

最後，我們試著將此文本的數學想法延拓，並附上一個很有意思的調查結果。

$$N \equiv R_i \pmod{m_i},\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \text{and} \quad (m_i, m_j) = 1,\ \text{當}\ i \neq j\text{。}$$

令 $M = \prod_{i=1}^{n} m_i \Rightarrow$ 存在有 K_i 使得

$$K_i \frac{M}{m_i} \equiv 1 \pmod{m_i},\ i = 1, 2, 3, \ldots, n\text{。}$$ 於是

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{M}{m_i} R_i \pmod{M}\text{。}$$

我們可以很輕易的心算出這兩則文本的 K_1, K_2, K_3。如果數據較大時，K_i 就無法輕而易舉心算出來了。不過秦九韶的『大衍求一術』卻解決了這個問題：[16]

大衍求一術云：置奇右上，定居右下，立天元一於左上。先以右上除右下，所得商數與左上一相生，入左下。然後乃以右行上下，以少除多，遞互除之，所得商數隨即遞互累乘，歸左行上下。須使右上末後奇一而止，乃驗左上所得，以為乘率。

例如：$K \cdot 20 \equiv 1 \pmod{27}$

1　20	→ **1　20**	→ **3　6**	→ **3　6**	→ **23　1**
0　27	**1　7**	**1　7**	**4　1**	**4　1**
	27=1×20+7	20=2×7+6	7=1×6+1	6=5×1+1
	1×1+0=1	2×1+1=3	1×3+1=4	5×4+3=23

所以得到 K=23　。

『孫子問題』為什麼能引起許多人的興趣？讀者們閱讀至此處，應該不難理解了。但是，能像秦九韶這樣給出一般化的解法，跨出問題的侷限，賦予新意，卻是難能可貴。

接著，就讓我們來看看現代的數學系大學生怎麼看待『物不知數』題。

讓台灣師大數學系（一、二、三、四年級）學生閱讀《孫子算經》『物不知數』的文本內容，請在廿分鐘『翻譯』成一般化的數學式子。

底下摘錄部分『答案』：

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{k_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{k_2} \\ x &\equiv a_3 \pmod{k_3} \end{aligned}\quad ,\ k_1, k_2, k_3 \text{兩兩互質}$$

1. $$\begin{aligned} x - a_1 &= k_1 l \\ x - a_2 &= k_2 m\ ,\ l, m, n \in Z \\ x - a_3 &= k_3 n \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k_2k_3x - k_2k_3a_1 &= k_1k_2k_3 l \\ k_1k_3x - k_1k_3a_2 &= k_1k_2k_3 m \\ k_1k_2x - k_1k_2a_3 &= k_1k_2k_3 n \end{aligned}$$

16.『大衍求一術』的詳細內容，請參閱劉鈍 (1997)，頁 272-274；Katz (1993), p.190.

2. $$\begin{aligned} x &= qk_1 + a_1 \\ &= pk_2 + a_2 \\ &= rk_3 + a_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= k_1 q + a_1 \\ &= k_2\left(k_1 q + a_1\right) + a_2 \\ &= k_3\left[k_2\left(k_1 q + a_1\right) + a_2\right] + a_3 \end{aligned}$$

3. 令 $$y_1 = \min\{n_1 k_2 k_3 \mid n_1 k_2 k_3 \equiv 1 (\bmod k_1), n_1 \in N\}$$

$$y_2 = \min\{n_2 k_1 k_3 \mid n_2 k_1 k_3 \equiv 1 (\bmod k_2), n_2 \in N\}$$

$$y_3 = \min\{n_3 k_1 k_2 \mid n_3 k_1 k_2 \equiv 1 (\bmod k_3), n_3 \in N\}$$

$$x \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 (\bmod k_1 k_2 k_3)$$

我們發現；將近一半的學生能從文本閱讀找出其中蘊藏規律，給出一般化的結果 (雖然並不是很完整)。至於未能找出 N 的通式者，大多數都是想藉由 $N = t_i m_i + R_i$ 將 t_i 代換或式子變換去導出 N。由此看來，數學文本對數學學習的幫助是毋庸置疑的，但面對同一文本，有的人能夠自自然然的從中吸取養分 — 儘管我們無從知道學生是否既知其然，亦知其所以然。而有的學生，非得一番天人交戰不可，試圖證明導出結果，或許在這當中，教師可以扮演文本與學生之間的橋樑。

或許數學學習的過程，可以分為四部曲「想、寫、證、說」。首先，深入的思考、閱讀，激發自己的想法後，將腦袋裡的概念用最簡潔的數學式寫出來，再給予嚴謹的證明，然後將它說明清楚，讓別人也能理解。其實，僅僅只是「寫」，就要有相當的數學功力。能夠完成這四個過程，是相當不容易的，這徵之於我們所操作的這個『文本』實驗，多少可以知道問題癥結之所在了。

七、結語

黃胤錫的『天算頌』，提供中韓數學文化交流的文本寫照。此時，讀者不妨回顧檢視我們一開始針對『物不知數』所作的中西數學文化交流之猜測，並將『物不知數』和『一次同餘組』再對比於『翦管術』和『天算頌』。面對後者（『翦管術』和『天算頌』），我們可以清楚看到在數學文化交流下所呈現的文本內容，如此一來，相較於前者(『物不知數』和『一次同餘組』) 的交流問題，答案不就更顯得有趣多了嗎？

最後，經由本文的論述，不知道讀者是否也能感受到數學史的知識性、文化性及趣味性？祝福大家進入寶山，滿載而歸。

參考文獻

李文林主編 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。
李儼、錢寶琮 (1998).《李儼、錢寶琮科學史全集》第五卷，瀋陽市：遼寧教育出版社。
洪萬生 (2001).〈當斐波那契碰上孫子〉，《HPM 通訊》第四卷第一期，頁 1-2。
紀志剛 (1999).《孫子算經 \ 張邱建算經 \ 夏侯楊算經導讀》，武漢市：湖北教育出版社。
劉鈍 (1993).《大哉言數》，瀋陽：遼寧教育出版社。
蘇意雯 (2001).〈除兔子之外 — 談斐波那契〉《HPM 通訊》第四卷第四期，頁 4-5。

郭書春主編 (1993a).《中國科學技術典籍通匯·數學卷一》，濟南：河南教育出版社。
郭書春主編 (1993b).《中國科學技術典籍通匯·數學卷二》，濟南：河南教育出版社。
孫子 (1993).《孫子算經》，收入郭書春 (1993a)。
楊輝 (1993).《楊輝算法》，收入郭書春 (1993a)。
程大位 (1993).《算法統宗》，收入郭書春 (1993b)。
金容雲、金容局共著 (1978).《韓國數學史》(日文)，槙書店。
金容雲 (1985a).《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(1)》，漢城：驪江出版社。
金容雲 (1985b).《韓國科學技術史資料大系 • 數學篇(3)》，漢城：驪江出版社。
慶善徵 (1985a).《默思集算法》(寫本)，收入金容雲 (1985a)，頁 232-237。
黃胤錫 (1985b)，《算學入門》，收入金容雲 (1985b)，頁 49-54。
Davis, Philip J. and Reuben Hersh (1981). *The Mathematical Experience*. Sussex: The Harvester Press.
Katz , Victor J. (1993). *A History of Mathematics.* New York: Harper Collins College Publishers.

『虛擬演講稿』 **對象：國三學生適用**

畢氏定理探源

台師大學數學研究所教學碩士班萬華國中洪明賢老師

大家都知有關直角三角形兩股與斜邊關係的公式$a^2+b^2=c^2$叫做「畢氏定理」，也就是「畢達哥拉斯定理（Pythagorean theorem）」，因爲大家都認爲這是畢達哥拉斯發現的，或者至少是他最先證明的；其實，事實並不一定如此，也沒有確鑿的證據；因爲至少在更早之前的中國、印度、巴比倫、阿拉伯等國家，都有接近畢氏定理的東西遺留下來，所以目前國內也有人以中國古老數學中曾提及類似「畢氏定理」的敘述，而主張將畢氏定理改稱爲「商高定理」或「陳子定理」。

「畢氏定理」到底有何魅力，會令大家如此重視及爭執呢？現在讓我們一步一步來解開它的面紗？

一、畢達哥拉斯學派

畢達哥拉斯生於公元前 572 年左右，一個位於愛琴海薩摩斯島（Samos）上的貴族家庭；年輕時曾師事於愛奧尼亞學派的領導人泰利斯（Thales），後來到埃及和巴比倫等文明古國遊歷，一般咸認畢達哥拉斯在遊歷的過程中汲取了相當多當時所使用的數學知識，真是所謂「行萬里路勝讀萬卷書」。

後來他定居於義大利南部的克羅頓（Croton），並在此地創設一間學校傳授數學及其哲學思想，此學校的成員就是後人所謂的「畢達哥拉斯學派」。

畢氏學派的宗旨是「萬物皆數」（All is number），他們認爲數是形成宇宙的要素，所有的東西都含有數的成分，是實體的最根本；另外，數與自然的關係也是畢氏深感興趣的範疇，

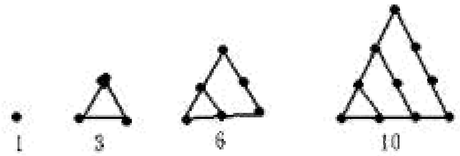
他認爲自然現象是由規律所支配，而這些規律可由數學的方程式來描述；因此他們在數論、幾何、天文、音樂等方面都有很高的造詣，但因其組織嚴密且有濃厚的宗教色彩，許多的發現發明都是秘而不宣的，所以外人鮮知其詳。故而畢達哥拉斯是否真正發現勾股定理，在歷史上並無確切的證據，只因公元前 2 世紀，希臘一位學者阿波多羅斯（Apollodorus）曾用詩句寫了一本《希臘編年史》，其中提到「畢達哥拉斯爲了慶祝他發現了那個著名的定理，宰牛作犧牲來祭神」，但並沒有指明是哪一個定理，只是後人利用許多線索來推斷，認爲應該就是勾股定理，所以就將它冠以畢達哥拉斯之名而一直沿用至今。

二、 畢達哥拉斯數

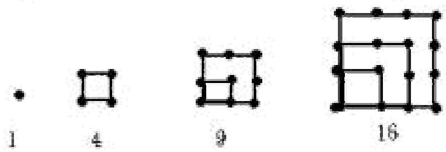
爲何我們會認爲是畢達哥拉斯發現勾股定理呢？這就得從「畢達哥拉斯數」談起。古埃及的數學家已經知道當三角形三邊長的比例爲 3：4：5 時，此三角形爲直角三角形，而 $3^2+4^2=5^2$，所以 3，4，5 就是一組畢達哥拉斯數；另外古巴比侖的數學家也知道 $5^2+12^2=13^2$，所以 5，12，13 也是一組畢達哥拉斯數；不過這些數學家只知道畢達哥拉斯數的一些特例，而畢達哥拉斯學派卻發現了畢達哥拉斯數的一種公式，即 m，$(m^2-1)/2$，$(m^2+1)/2$ 而這裡的m 代表奇數。

畢達哥拉斯學派是怎樣發現這種公式的呢？這是由於此學派對數字與圖形的關係有一種特殊的理解，這概念就叫做「形數」。形數被看作是某些幾何圖形中點的數目，它們成爲幾何學與算術之間的橋樑。（如圖一、二、三）

【圖一】三角形數



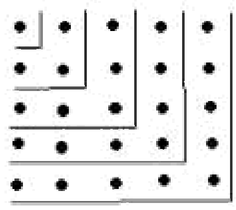
【圖二】正方形數



【圖三】五邊形數

正方形數還有另外一種表示法，如右圖四
從右圖四可以看出，由個n^2點所組成的方陣
只要再加上（2n＋1）個點，便能組成由$(n+1)^2$個點所組成的方陣，即

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$



【圖四】

如果令 $2n+1=m^2$，那麼

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

而此式子正具有畢氏定理的形式。因此，令 m＝3，5，7，9，…….，

我們便可依序得到 （3，4，5）、（5，12，13）、（7，24，25）、（9，40，41）…..

等無限多組的畢達哥拉斯數；由此看來，畢達哥拉斯學派因為分析了正方形數的圖形，而發現了畢達哥拉斯數的一種公式，若再由此推演出畢氏定理的猜測，似乎變得非常的合理了。

三、 畢達哥拉斯的證明

對於勾股定理，現在至少有三種不同的理解，當然表達的方式也就不同。

(1). 在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。

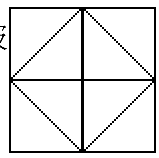
這就是歐幾里得《幾何原本》卷 I 第 47 命題。注意這裡講的純粹是幾何圖形之間的關係，完全不牽涉到「數」的問題；所謂『相等』是指圖形的拼補相等，即將兩個小正方形剖分成若干塊，可拼湊成斜邊上的大正方形。因為既然沒牽涉到數，也就無所謂的『和』(相加)，故命題的原文並無『和』的字眼出現。

(2). 直角三角形直角邊上兩個正方形面積的和等於斜邊上正方形的面積。這裡將圖形的面積看成一個數，由定理指出這兩個數的和等於第三個數。須注意的是歐幾里得從來沒有將面積看成是一個數來加以運算

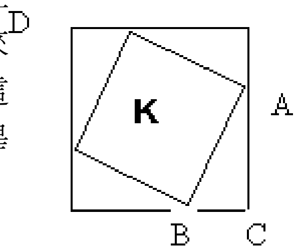
(3). 直角三角形斜邊長度的平方等於兩個直角邊長度平方之和。

長度是數，平方之後還是數，定理講的是數與數之間的關係，並不考慮數字平方之後的幾何意義。

這三種說法的意義是不同的。第一種不妨稱之為『形的勾股定理』，第二、三種稱之為『數的勾股定理』。 畢達哥拉斯是否發現了勾股定理？歷史的真實情況可能是他發現了『形的勾股定理』，至於「數的勾股定理」應還沒認識到，或至少是猶豫不決的。理由是這個學派雖然發現了不可公度量，但拒絕承認無理數是數。它們認為萬物都可以用數來表示，但那個數是自然數與分數；除此之外，不認識也不承認其他的數。以最簡單的等腰直角三角形為例，設直角邊長為 1，如果『勾股定理』成立，則斜邊長的平方為 2，於是便將出現『什麼數的平方會是 2 』的問題，當他們感覺到任何有理數都無法滿足斜邊長的時候，必定會大惑不解；因此，很難說他們已經建立了『數的勾股定理』。



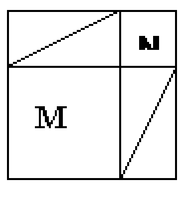
至於「形的勾股定理」後人認為畢達哥拉斯學派應的確發現並給予證明，而被爾後的歐幾里得編入《幾何原本》之中。對於他們是如何證明的呢？關於這一點，之後的數學家做了許多合乎情理的推測。



這個學派曾研究過地磚的問題，利用等腰直角三角形來舖成一個正方形地板是很常見的，從圖形上不難看出直角邊上的兩個正方形合起來正好是斜邊上的正方形！受此啓發，自然推想到非等腰直角三角形的這個關係應也能成立。在眾多猜測中，下面的這一種證法應是比較貼近畢達哥拉斯的證法（由印度數學家拜斯卡拉•阿查亞 Bhaskara-Acharya 提出，但那已是公元 1150 年的時候，比中國三國時代的趙君卿晚了一千年，此事稍後再敘）：

任給直角三角形 ABC，邊長各為 a，b，c；

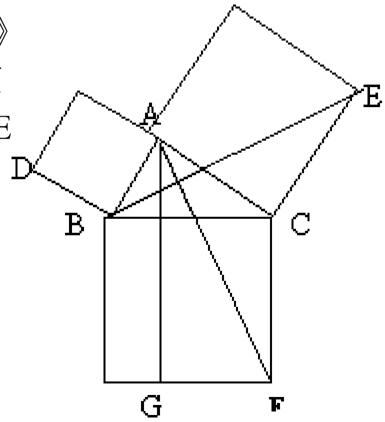
以 a＋b 為邊作正方形，它是由 4 個全等三角形和 c 邊上的正方形所拼成。如果將這些三角形重新排列，便可看出正方形 CD 也可由同樣的 4 個三角形



及 a、b 邊上的兩個正方形拼成。

故得知：正方形 K＝正方形 M＋正方形 N

四、　歐幾里得證明



在歷史上，完整而嚴密的最早證明應屬歐幾里得《幾何原本》卷I第 47 命題的證法，其要點如下：設□AD，□AE，□BF分別爲直角△ABC三邊上的正方形；連接 BE、AF，作AG⊥BC；可得知△BCE≅△ABC，但□AE面積是△BCE的 2 倍（同底等高），同樣□GE是△FCA的 2 倍，故□GE＝□AE；同理可證，□BG＝□AD，

於是

□ BF＝□BG＋□GC＝□AD＋□AE。

五、中國古代的勾股定理

在中國，數學的起源也可追溯到遠古。到西周時期（公元前 11 世紀~前 8 世紀），「數」作爲貴族子弟必習的『六藝』（禮、樂、射、御、書、數）之一，已形成專門的學問，有些知識後來成爲中國最早的兩部傳世數學著作 —《周髀算經》與《九章算術》的部分內容。

《周髀算經》同時也是一部天文著述，作者不詳，成書年代據考當不晚於公元前 2 世紀。而中國第一次出現畢氏三元組（3，4，5）的記載，便是出現在《周髀算經》中的開首數頁：

> **昔者周公問於商高曰：「竊聞於大夫善數也，請問古者包犧立周天曆度，夫天不可階而升，地不可得尺寸而度，請問數安從出？」商高曰：「數之法出於圓方，圓出於方，方出於矩，矩出於九九八十一。故折矩，以為勾廣三、股脩四、徑隅五。」**

周公姓姬名旦，是周武王的弟弟，商高是當時周朝的大夫。這一段是周公與商高的問答。商高指出夏禹治水（約公元前 21 世紀）時已經知道用 3：4：5 的方法來構成直角三角形。此對話在時間上並不晚於埃及、巴比倫的最早記載，但它僅只是提出勾股定理的特例，至於是否掌握一般型式，還沒有證據能加以肯定。

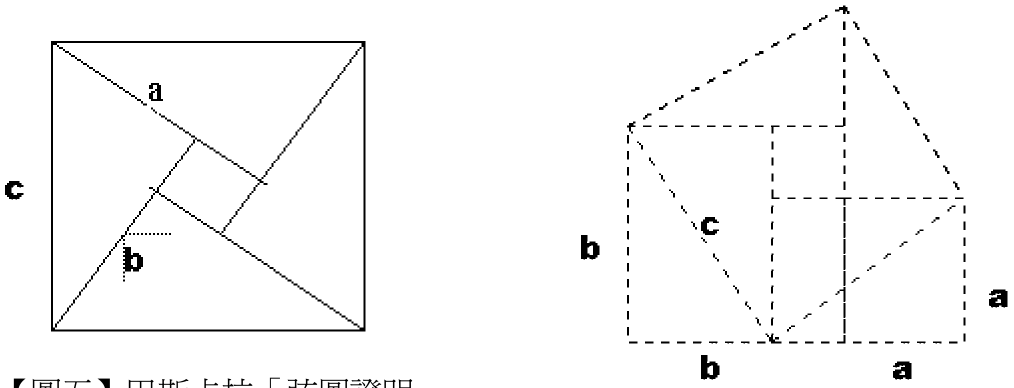
確實掌握勾股定理一般性的應是陳子。根據《周髀算經》記載：

> **昔者榮方問於陳子，曰：「今者竊聞夫子之道，知日之高大、光知所照，一日所行遠近之數，人所望見四極之窮，列星之宿天地之廣袤，夫子之道皆能知之，其信有之乎？」……陳子曰：「周髀長八尺，夏至之日，晷一尺六寸。髀者，股也。正晷者，勾也。…………若從邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，並而開方除之，得邪至日，從髀所旁至日所十萬里。」**

當時以爲地是平的，從太陽向地平面作垂線，垂足叫『日下點』。太陽、日下點、觀測點三者構成一個直角三角形，以觀測點到日下點爲「勾」，日下點到太陽的高度爲「股」，勾股各自乘，相加後開方，即爲觀測點到太陽的距離。因此，『勾股各自乘，並而開方除之』的這句話，是勾股定理普遍型式在中國的最早記載。於是，有人因而主張將勾股定理命名爲「商高定理」或「陳子定理」，以發揚中國人在這方面的成就。但是否有必要在此緬懷『光榮的過去』而做名稱之爭呢？就見仁見智、端賴各位的自我認定了。

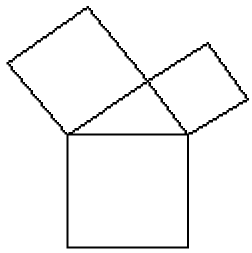
六、 趙君卿的證明

『勾股定理』的證明很多，可能是所有數學定理中證法最多的。盧米斯（Elisha Scoot Loomis）蒐集各種證法，寫成《畢達哥拉斯命題》（The Pythagorean Propositions）一書，裡面記載了 367 種證法。當然，實際證法更不止於此，各位靈感一來，都可以隨時再添加一個。而其中最受注目的，當數印度數學家拜斯卡拉˙阿查亞（Bhaskara-Acharya）所提的「弦圖證明」，因爲它的簡潔漂亮，遠遠超越了《幾何原本》的『面積證法』與『比例證法』。



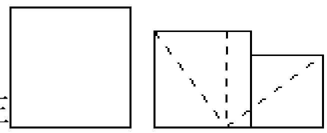
【圖五】巴斯卡拉「弦圖證明」

在中國《周髀算經》文本中，並沒有給出「勾股定理」的證明。但《周髀算經》的註釋者趙爽（字君卿，三國孫吳人）在他的〈勾股圓方圖注〉中，雖短短五百餘字及若干圖形（現傳本不全），卻蘊含了迄今所知中國古代最早的『勾股定理』證明。

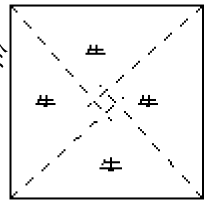


有關趙爽的〈勾股圓方圖注〉，近代史家早有研究，但各有不同見解。以下以陳佐良教授之研究，來推論還原趙爽的勾股定理證明：

一. 給定一個直角三角形，以之勾和股，求弦。
二. 先將勾、股兩邊長自乘，其次把乘積化爲圖形，得一個勾股形及三個正方形。



三. 利用「更相取與、互有所得」（即將圖形分解，出入相補）將兩個小正方形合併之後，分解成四個勾形及一個小正方形。
四. 最後，將這些勾形及小正方形，一個一個取下來，放在一起重新組合，得到一個新圖形恰與弦邊的正方形相疊合，於是得證「勾方加股方等於弦方」，即「勾股定理」。



七、結語

陳教授比較巴斯卡拉的「弦圖證明」與趙爽的〈勾股圓方圖注〉，發現兩者的基本構想其實相同，但趙爽是證明a^2+b^2等於c^2；而拜斯卡拉則反其道而行，證明c^2等於a^2+b^2；因此下了一個重要的結論：「若從思想發展的邏輯過程來看，趙氏的步驟和圖形變化都是非常自然又合理；但拜氏則相反，實在令人有突然而來之感。所以作者認爲拜氏的弦圖可能來自中國。」

西方數學史家卡爵利（F . Cajori）也曾認定拜氏的弦圖源自中國，這些看法在中、印的文化交流史上當然頗具意義，因爲在許多印度數學大師的著述中，的確不乏中算輸入的痕跡，但在未找到直接證據之前，有關這些中外文化嬗遞的問題討論時應適可而止。不過，由於趙爽的證明並非孤例，因此我們至少可樂觀的認定：中國數學史上的「勾股定理證明」是

獨立發展出來的！

參考書籍：

洪萬生 (1999).《從李約瑟出發》，台北：九章出版社。
李文林 (2000).《數學珍寶》，台北：九章出版社。
李兆華 (1995).《中國數學史》，台北遼寧教育出版社
李信明 (1997).《數學家傳奇》，台北：九章出版社。
李儼、杜石然 (1997).《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。
梁宗巨 (1998).《數學歷史典故》，台北：九章出版社。
歐陽絳 (1994).《數學的藝術》，台北：九章出版社。
蘇意雯 (1998).〈畢氏定理淺談〉,《HPM 台北通訊》第二卷第七期。

Reader's FeedBack

瀏覽『HPM 通訊』心得

台師大數學系教學碩士班 孫梅茵

剛畢業的我本著一股熱情，抱持與學生年齡相近較易感受學生的思想 (筆者任教高中)，那時的我也曾想過，有一天教書好些年之後，是否仍像一些持續不斷付出的長者，又有素養、又有品味的教師，且能繼續保持源源不斷的能量，來面對數學及學生？

我除了喜歡數學之外，也喜歡文學、詩集、或一些傳記，也喜歡音樂，在課堂常將數學比喻如同我喜好的音樂給學生聽，有時我曾懷疑這是否是不務正業，但我只是想將數學用不同方式來生活化，減少學生對數學之恐懼感，以提高學生對數學之興趣。與 HPM 中提到教師運用數學史第二個層面：在歷史的脈絡中，比較數學家所提供的不同方法，拓寬學生的視野，培養全方位的認知相契合。

透過所謂 HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics)，是指 ICMI 的一個研究群，專門推動數學史與數學教育之關聯。我終於可以發現一些相同的理念 (但我的概念不是很完全)，以及更多延伸的話題，及更精緻的東西。正如 HPM 第三卷第五期桑雅的偉大師傅卡爾•外爾斯特拉斯 (Karl Weirstrass，1815-1897) 的洞見：「傑出的數學家不可能不是心靈上的詩人」數學和文學一樣，它是一門需要大量想像力的學問。因此我想我對數學持續不滅的熱情，是如同詩人感知了一般人所沒有感知的東西，看得比一般人深，數學家也作同樣的事。這樣優游在數學思考中，如同詩人、畫家、音樂家的感受，有一種說不出的喜悅。

我想到法國批評家聖・佩甫 (Charles-Augustin Sainte-Beure，1804-1869) 在〈什麼是經典〉一文中：真正的經典作者豐富了人類心靈，擴充了心靈的寶藏，令心靈更往前邁進一

步，發現一些無可置疑的道德真理，或者在那似乎已經被徹底探測瞭解了的人心中再度掌握住某些永恆的熱情，他的思想、觀察、發現，無論以何種形式出現，必然開闊、寬廣、精緻、通達、明晰，而優美；他訴諸屬於全世界的個人獨特風格，對所有的人類說話，那種風格不依賴新辭彙自然清爽，歷久彌新，與時並進。

瀏覽 HPM 時已夜深想了，我正想沉澱一些思緒找尋一條實際的通路，於是隨手放一片 BACH，一般巴哈 BACH 對年青人是難以打動，最近我經友人介紹，他將巴哈的音樂融合爵士(加上一杯香濃的咖啡—情境) 觸動我內心深處，聽到就會難以自拔。同樣對於數學一直承受挫折，一些被老師，或分數打壓的學生，站在第一線的你如何將難懂的數學，以不同方式切入他們的心裡是值得我們努力的。就像 HPM 裡「遠距離學習中的柏拉圖修辭：Bobert Record 如何在家學習者」以大師及學者以對話方式切入讀者，正如同文學家卡謬透過戲劇表達給觀眾，爲追求客觀性與準確性的人生態度有關 (卡謬的卡里古拉)

我就這樣寫一些拉雜的讀後感想，只是想說我找到一些想法，更加貼切的說，在 HPM 通訊中，可以循找到一些我想要的脈絡，或許對我這不是很專業，但又有點感性加理性的女子，不敢言論研發教學策略，提昇教學品質，但是在這裡我找到理想 Ideal。

1. **要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhy@pchome.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至suhy@pchome.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng**