HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）
編輯小組：林榮生（西松高中） 黃振順（西松高中） 蘇意雯（成功高中）
邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）蘇俊鴻（新店高中）
洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（新北高中）謝佳叡（台灣師大數學系） 林倉億（台師大數學系研究生 ） 陳鳳珠（台師大數學系研究生） 黃清揚（台師大數學系研究生）
葉吉海（台師大數學系研究生） 黃哲男（台師大數學系研究生）

創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第四卷 第一期 目錄(2001年元月)

當斐波那契碰上孫子

台師大數學系教授 洪萬生

斐波那契 (Fibonacci，約 1170-1250) 可以算是歐洲中世紀極少數的傑出數學家。一般人所以對他印象深刻，莫過於以他命名的「斐波那契數列」(Fibonacci sequence)。數學史家則多半對他的《算盤書》(Liber Abaci，1202) 非常注意，這是因為他在本書中所引進的印度－阿拉伯數碼及其演算法則，為中世紀數學的長期停滯與靜默帶來一線曙光。

其實，斐波那契在繼承希臘數學，尤其是數論方面，也有可觀的貢獻。他的著作如《平方數之書》(Liber Quadratorum，1225)，討論了二次丟番圖方程 (Diophantine equation)，是丟番圖 (Diophantos) 與費馬 (Pierre Fermat) 之間，歐洲數學家在數論方面的經典作品。在有關『費馬最後定理』(Fermat Last Theorem) 的歷史論述中，本書罕少被提及，說明了歐洲中世紀數學之『長夜漫漫』，是一個很難破除的刻板印象。此外，他還有一本著作《花朵》(Flos，1225)，內容涵蓋了菲特烈二世 (Frederick II) 宮廷數學競賽問題，為十三世紀歐洲的數學與社會的互動，留下了極珍貴的見證。

在《算盤書》中，斐波那契搜集了很多十分有趣的問題，譬如除了前述的「斐波那契數列」所關連的『兔子問題』之外，『雙假設法』(rule of double false positions)、『購鳥問題』以及『一次同餘組』等等，也都對數學在不同文化的交流研究上，提供很多想像的空間。事實上，『雙假設法』與中國《九章算術》(第七章)『盈不足術』的方法上的神似，『購鳥問題』與中國《張邱建算經》(南北朝時代)中的『百雞術』在佈題或提問上的雷同，都已經讓史家相信雙方交流的可能性，更何況『一次同餘組』與中國《孫子算經》(南北朝時代)中的『物不知數』題之『幾乎一致』了。

底下，請容許我們引述這兩則文本。面對它們，讀者儘可『各自表述』，讓科學史上優先權爭辯的『想像力』任意馳騁。然而，我們也盼望讀者不要被任何一種『主張』沖昏了頭，而忘記欣賞這兩則文本在各自脈絡 (context) 中的歷史意義，以及它們的『對比』在數學上所呈現的認知趣味。

首先，請看《算盤書》中的『一次同餘組』：

設計一個數，除以 3、除以 5、也除以 7，問每次除法各剩餘多少。

接著，再看《孫子算經》中的『物不知數』題：

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

答曰：二十三。

術曰：“三三數之賸二”，置一百四十；“五五數之賸三”，置六十三；“七七數之賸二”，置三十。併之得二百三十三。以二百一十減之，即得。凡三三數之賸一，則置七十，五五數之賸一，則置二十一，七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。

經過仔細的比對之後，我們實在很難抗拒「抄襲」曾經發生的歷史猜測。由於《孫子算經》被認定最早問世於公元第四世紀，而《算盤書》是十三世紀初的作品，所以，斐波那契雖然沒有機會碰上孫子，但是，他『西』抄抄、『東』抄抄的結果，當然不無可能『抄』到《孫子算經》（拉丁文或阿拉伯文譯本？）上面來。如此一來，中介者的角色之存在對於歷史詮釋，就變得十分關鍵了。一旦找不到此一相關的直接證據，任何被認為合『情』入『理』的判斷，都不過是一種『想當然耳』！其實，這種處境也保護了另一邊的『民族情感』，試想現存的《孫子算經》最早文本（南宋印刷本）出現於公元 1213 年之後（唐代所謂的《孫子算經》文本則迄今不得見），所以，南宋版《孫子算經》的作者碰上斐波那契的可能性，當然也不能隨意地排除了。

無論如何，在文化交流史上，除非有直接證據，否則『誰抄了誰』永遠是個很難搞定的糊塗帳！『教條』當然可以讓我們相信某一方的確受惠於另一方，而且信服得像呼吸空氣一樣自然而沒有感覺。只是，『一次同餘組』與『物不知數』有沒有可能是『人同此心、心同此理』的注腳呢，或許答案就在塵封的歷史之中吧。

參考文獻

李文林主編 (2000)，《數學珍寶》，台北：九章出版社。

孫子 (1980). 《孫子算經》，收入《宋刻算經六種》，上海：文物出版社。

張邱建 (1980). 《張邱建算經》，收入《宋刻算經六種》，上海：文物出版社。

Callinger, Ronald (1982). *Classics of Mathematics.* Oak Park, Illinois: Moore Publishing Company Inc.

Fibonacci, Leoonardo Pisano (1987). *The Book of Squares* (The Book of Squares). New York: Academic Press, Inc.

Kool, Marjolein (2000). ‘Two Pots and One Lid: The first arithmetic textbooks in the Netherlands before 1600’, in Horng, Wann-Sheng & Fou-Lai Lin (eds.), *Proceedings of the HPM 2000 Conference* (Taipei: National Taiwan Normal University), pp. 1-10.

Sigler, L.E. (1987). ‘Introduction: A Brief Biography of Leonardo Pisano (Fibonacci)’, in Fibonacci (1987), pp. xv-xx.

書評：《毛起來說三角》

國立新店高中 蘇俊鴻老師

中文版	英文版
書名：毛起來說三角	*Trigonometric Delights*
作者：Eli Maor	
譯者：胡守仁	
出版者：天下遠見出版股份有限公司	Princeton University Press
出版日期：2000 年 9 月 30 日	1998
頁數：294 頁	236+14
定價：新台幣 250 元	
ISBN：957-621-732-6	ISBN：0-691-05754-0

一、 前言

身爲一位數學教師，每當課程進行到三角函數時，繁多的三角公式頓時湧現於眼前，加由於運算技巧的不足，學生常因此望之卻步，學習意願一落千丈。教材內容編寫的枯燥是個因素，相關題材的補充資料難尋是另一個問題，常令人在教學的引導上，有巧婦無米可炊之嘆。因此，當筆者由洪萬生教授處，得知 Maor 有本關於三角函數的著作，便經由亞馬遜網站購得此書，作者的文筆相當流利，相當具有可讀性，同時，書中內容包羅萬象，足見作者對此一主題資料收集的功力。後來又見天下出版此書的中文版，遂有意推介給對三角函數題材有興趣的同好知曉，讓更多人重新去體會三角函數的風貌。

由本書的序言中，不難發現作者對於此書寫作的動機，呼應了筆者一開頭所提教學上遭遇的困境：

> 新數學對幾何學及三角學的傷害最大。[1]理工科課程中最關鍵的三角學，成爲改革的犧牲者。它打著嚴謹的名號，形式化的定義及冗長的邏輯推導，取代對它的實質的了解。……用將實數映成(onto)到〔-1，1〕區間的函數來定義正弦和餘弦，取代用三角形邊的比例或單位圓在x軸和y軸上的投影的幾何脈絡來定義。集合的符號及語言占據所有的討論，使得一個相當簡單的課題，變成無意義的形式主義。(Maor 1997, p.xii)

因此，造成學生認爲「三角學是加了桂冠的幾何學，再加上計算的苦刑」。[2]Maor寫作本書試圖反駁這個說法，在取材的廣度上，作者除了引入三角學歷史發展的過程外，也選擇甚多三角學中有趣的例子，或是與其他領域相關(如地圖繪製)的題材。在讀者設定上，也以高中生和大學生爲主，因此內容的深度多半利用基本的代數與三角學知識便可理解，討論的重點也侷限在平面三角學上。

此外，Maor將一些相關的數學史傳記或材料補充於章節之後，共有八篇之多。雖然這些文章多半都是根據二手文獻改寫，但值得一提的是，頗多是「非主流」的數學家的生平與貢獻(如雷吉蒙塔努斯 (Regiomontanus), [3]棣美弗(Augustus De Moivre)，阿涅西(Maria Gaetana

---

[1]此處的新數學是指 1960 年代開始，美國因應科學教育改革所提倡的數學教學方法及內容。

[2] 此爲Maor引用Edna Kramer的說法。

[3] 雷吉蒙塔努斯是米勒(J. Muller)的拉丁化名字。

Agnesi))，或是在數學史的書中少見的資料(如棣美弗與牛頓的關係，維埃塔(Viete)如何利用三角函數解出四十五次的方程式的正根)，[4]可見Maor在寫作的選擇上有其「另類」的考慮。再來就本書內容作一說明。

二、內容簡介

本書共有十五章及四個附錄，[5]就內容可分成下列幾項：(1)三角學發展的歷史(前言，第一章至第四章)；(2)三角學的應用(第五章及第十三章)；(3)平面三角學中有趣的題材(第六章至第十二章)；(4)三角學進一步的延拓(第十四章及第十五章)。由章節分量的安排可見，作者並無意讓本書成爲三角學的發展歷史的專書，倒是極力想推介一些三角學中被人遺忘，但又非常美麗易懂的公式或性質，期許讀者能重拾對三角學的興趣與熱情。

(1) 三角學的發展歷史

前言中，Maor 由一位埃及的古代書記阿美斯(Ahmes)開始談起，據信萊因德紙草書(Rhind Papyrus)是他根據更早的文獻所抄下。紙草書是以問題集的形式呈現，其中第 56 題至 60 題，便是有關金字塔的測量問題，由此我們可以看出埃及人已有簡單的三角學概念，能利用金字塔底邊長的一半與塔高的比例，來保持底面與邊面的夾角(傾斜度)固定。可見三角學的概念萌發甚早，也非常的實用，但是真正將它抽象成數學概念，則是希臘人的工作。接著第一章是介紹角的概念源起及單位的演變，一般認爲角的單位「度」是巴比倫人制定，爲何一個圓是 360 度，原因則無一定論。至於另一個度量單位「弧度」的使用，Maor 認爲其可能的原因有兩個：一來使得角的公式變得較爲簡單(如弧長，扇形面積的公式)，二來角度的大小用弧度表示，很小的角度會與它的正弦值近似，也就是 $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta)/\theta = 1$ ，因此在微積分中多以弧度爲單位。

再來第二章的重點是介紹托勒密(Ptolemy)的弦表，此表出現在他的著作《大成》(Almagest)第一冊第十章及第十一章。他將圓的弦長看成「弦所對應的圓心角的函數」，與正弦函數的定義相符，因此，此一的弦表就是正弦函數表。事實上，托勒密的工作主要是繼承希巴爾卡斯(Hipparchus)的研究成果。當時希臘人的主要興趣在天文觀測，爲了因應計算的需求，才會編製弦表來求解任意的圓內接三角形。[6]值得注意的是，托勒密的弦表精確到六十進位制的第二位(即 1/3600)，並且給出相鄰數值間的平均增加量，方便內插計算之用。現在我們熟知的六個三角函數的由來，則是作者在第三章想交代的。例如，正弦函數的概念發生很早，印度的數學家接續托勒密的成果，完成進一步的改良工作。經由阿拉伯人再傳回歐洲時，正弦函數被寫爲sinus，至於再簡寫成sin的符號則是岡特(Gunter)所採用。Maor在此章的材料敘述的安排上，略顯得雜亂。閱讀本章時，切記函數概念和函數符號的使用或演進，是必須分開的，不然將陷入混淆的年代錯置中。此外，細心的讀者會發現第三章交代第一個使用縮寫並且能保持一致性的數學家，是英國數學家兼測量師諾伍德(Norwood, 1631)，而第四章卻又提到十七世紀前半，有三個英國人對三角學貢獻良多，其中奧特雷德(Oughtred, 1657)首先有系統地使用縮寫符號代表三角函數。仔細比較文中關於兩人所用符號的說明差異不大，爲何令人覺得說法不

[4] 常被譯作韋達，本文中有關名詞筆者儘量均沿用本書中文版的翻法，避免讀者閱讀上的困擾。
[5] 中文版將參考書目與圖片來源也當成附錄，所以共六個附錄。
[6] 希臘人主要關心的是球面三角形，至於平面三角學的發展，一直要到十六世紀。

一，原因何在？Maor並未說明。經筆者查閱發現：諾伍德首先有系統地的使用縮寫符號，但奧特雷德是當時英國最有影響力的數學書籍作者，像牛頓、[7]華理斯(John Wallis)都是他的讀者，[8]因此他的重要性不言而喻。[9]

至於第四章則介紹三角學的解析化發展，Maor認爲埃維塔最早將代數方法運用在三角學中，爲三角學滲入解析的特質；加上解析幾何的出現，更助長代數的發展。另一個重要因素則是數學所描述的對象有了改變，古典的三角學主要是應用在天體上，因此首重球面三角學。而十七世紀開始，重心轉移到力學的應用上，例如鐘擺及彈簧的振動問題，而這些描述週期現象的問題，使得三角函數有更大揮灑的空間，也讓三角學由函數表的編纂，變成各三角函數間性質的探討。加上寇茨(Cotes)、棣美弗及歐拉(Euler)等人的研究，將複數融入三角學之中，使三角學與分析學相結合。因此三角學與三角形漸行漸遠，到了十八世紀，開始將三角函數定義成純數字，而非三角形的三邊長的比值。[10]更由於「振動弦」問題，引出解的兩種形式爭論，最後歸結到在傅立葉(Fourier)所証明的定理：「只要函數在某個區間中被視爲週期函數時，就可以被表示成正餘弦函數的級數和」，也使得三角學成爲十九世紀分析學上研究週期函數的有力工具。

(2) 三角學的應用

Maor 在第五章中回顧人類最早使用三角學的歷史-「量天度地」，由阿里斯塔克斯(Aristarchus)測量太陽、地球與月球彼此間的距離的方法談起，到希巴爾卡斯改良測量方式，及埃拉托斯特尼(Eratosthenes)估計地球的圓周長，重現了希臘人對量度天體的努力。這種測量概念後來逐漸演變成測地學，其測量方法被稱爲「三角分割」，藉由地表的測量決定地球的形狀。由於地球形狀的議題牽涉到牛頓的重力理論與笛卡兒的渦動理論的論辨，並且引出英國與法國的國家尊嚴之爭。使得十八世紀，由法國開始引起一股測地的風潮，蔓延到整個歐陸。可見外在因素是會影響科學活動的進行。

接著十三章則是轉向地圖學中的所使用的三角學，Maor 簡介了幾種製圖所用的投影方法以及其中所使用的三角學知識，如圓柱投影、球極投影等。但不論是何種投影法，都無法符合當時航海的需求，這個難題最後由麥卡托(Mercator)所發明的投影法所解決。但麥卡托並未清楚交代他的製圖原理，因此在當時他的製圖法無法得到認同，後來由萊特(Wright)利用數值積分的方法，反覆求取每一分弧度所加上的正割值，列出經度 0°到 75°的結果，驗証麥卡托的原理，其製圖法才得以推廣。

(3) 平面三角學中有趣的題材

筆者覺得Maor在本書中最大的貢獻便是此一部份素材的搜集，對於教學上頗有幫助。譬如第六章，由「圓中一弧所對的圓心角等於圓周角的兩倍」的定理，推而証明正弦定理及倍角定理，給我們一個不同於現行教材利用面積相等的証明方法。這樣將任意三角形看成圓的內接三角形的方式，是比較符合希臘人的看法。把正弦定理看成與圓有關，能給我們更多的幾何意義上連結。再來Maor透過托勒密定理，[11]給出畢氏定理的另

[7] 見Victor J. Katz, *A History of Mathematics*, p. 461.

[8] 見Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, pp.251-255

[9] 這提供一個數學社會史的例子。

[10] 德國的數學家凱斯特奈(Kastner)是第一位將三角函數定義成純數字，而非三角形的三邊長的比值。

[11] 已現代的符號來寫，就是圓內接四邊形ABCD中，對角線長乘積等於兩對邊長乘積的和，即AC · BD＝AB ·

一種証明；也証明出正弦函數的和角公式。讓我們進一步了解托勒密定理在三角學上的重要性，並非是我們習題中一個不起眼的問題罷了。第七章的內容，對我們是比較陌生的，作者介紹外擺線與內擺線的參數方程式及性質。

第八章主要介紹一個三角級數和公式

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

有趣的是，Maor 由高斯求級數 1 加到 100 的小故事談起，引入相仿高斯的想法，推導此一級數公式的想法，最後再利用幾何作圖，讓我們了解這個級數公式的幾何意義。接著第九章是有關無窮等比級數的論述，最精彩的部份是「任何一個收斂的無窮等比級數，均可用直尺和圓規以幾何方法作出，並可由圖形求和」，筆者尤其推薦此章，Maor 試圖想告訴讀者對三角學的理解，不應只是繁複的三角函數計算的代數面向，它有著極爲美麗可見的幾何面向(此想法散見各章)。其基本想法是-1 到 1 之間的任意實數，均可與 0°到 180°間的餘弦函數一一對應，因此級數和$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n+\cdots(-1<r<1)$可看成$1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos^3\alpha+\cdots+\cos^n\alpha+\cdots$，如此一來，我們就能由幾何作圖來求和。(如右圖爲銳角的情形)

第十章與第十一章，是有關函數$\frac{\sin x}{x}$的種種，除了$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$外，還有一些相關性質與應用，例如$\frac{\sin x}{x}$是某種三維空間的世界投影到二維空間中的比例函數；或是歐拉曾發現這個無窮乘積的式子$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots$，Maor 當然也說明此乘積的幾何証明和幾何意義。第十二章的內容，Maor 則是留給函數$\tan x$，雖然在三角學的發展上，一直讓人覺得正餘弦函數的重要性遠超過正切和餘切函數。事實上正切函數的概念起源很早，在投影問題中便已出現。像維埃塔就曾提出正切定理$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan(\alpha+\beta)/2}{\tan(\alpha-\beta)/2}$，雖然現代的課本已經不提，但在沒有計算機的輔助求解三角形時，這定理可比餘弦定理更容易利用對數來運算。此外，$\tan n\alpha$的展開式與二項式定理關係密切；還有經由$\tan x$的部份分式，Maor 重新驗証許多歷史上與π有關的著名級數公式，這些都是在一般教材中甚難得知的部份。

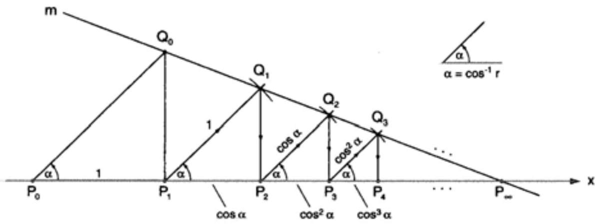


圖55 $S=1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots$的幾何作圖 (見中文版 158 頁)

(4)三角學進一步的延拓

Maor 深覺三角學的歷史中，「有三項發展特別顯著，基本上改變了整個課題：托勒密的弦表，使得三角學成爲實用的計算科學；棣美弗定理及歐拉的公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，使得三角學與代數和分析學相融合；再來就是傅立葉定理。」(見 Maor 1997, p. 198 或中文版 251 頁)不難了解 Maor 撰寫第十四章與第十五章的用意。在

CD+ BC · DA。

第十四章中，透過歐拉的公式，我們能找到 $\cos iy$ ($\cosh y$ 雙曲餘弦)與 $\sin iy$ ($\sinh y$ 雙曲正弦)的關係式，以及熟悉的三角公式，也能找到相對應的雙曲公式。因此，我們能將三角學推廣到複數平面上。最後一章傅立葉定理，則在簡介傅立葉的生平及說明傅立葉定理的梗概與應用，爲全書畫下句點。雖然筆者能體會作者爲求完整性，而安排了最後兩章，但由於讀者設定及題材難度的緣故，只能點到爲止，內容相當簡略，略顯得美中不足。有興趣者不妨參閱相關數學書籍。

三、結論

綜觀全書作者在題材選擇和舖陳上，仍然遵循著三角學發展的歷史架構，儘管在三角學發展的歷史上，材料的剪裁稍顯零亂。尤其，省去球面三角學的發展與相關題材的作法，則是讓人深覺可惜。然而，在作者的生花妙筆下，書中的各種主題相當平易近人。其實，Maor 扭轉三角學只是由一堆三角公式所堆砌出的刻板印象其用心令人感動。他在每一章節盡可能將三角學與幾何學緊緊相扣，爲三角公式找到幾何解釋與論証。這樣的努力值得我們喝采！基於教學經驗，筆者深刻地體會，如何讓學生能「看見」一個數學式子的意義是非常困難的。若能藉由幾何圖解，往往比較能讓學生容易感受。Maor 的現身說法，無疑地開啓一條值得大家共同努力的道路。在古代數學文本被遺忘的舊有風貌，若能適當地賦予意義重新詮釋，想必對於教學工作的啓發有著莫大的助益！

最後，筆者覺得必須爲譯者的用心說上幾句，本書的中文版相當流暢，也能扣住作者的本意，除了一些數學家的人名或著作的譯名與慣用的稱呼有些出入。值得一提，譯者對於人名翻譯都會附注原文，這是相當棒的作法。如果數學著作也能附上原文，那就更加完善了。有幾處明顯錯誤藉此提出，107 頁的 Stirling 公式應爲 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ ，及 175 頁表 4 下方的一行文字應爲“由北極到赤道的距離恰爲赤道圓周長〔書中誤譯爲半徑〕的四分之一” 。至於令人詬病專業名詞誤譯的問題並未出現。這應該與譯者本身的數學專業有關，或許能提供讀者在購買科普翻譯書籍時一個參考的指標。

數字的故事告訴了我們什麼？

~~評論《毛起來說 *e* (*e: The Story of a Number*)》

西松高中 蘇惠玉

	中文版	英文版
書名	毛起來說 e	*e: The Story of a Number*
作者	Eli Maor	
譯者	鄭惟厚	
出版社	台北：天下遠見	Princeton University Press
出版資料	2000 年第一版，共 304 頁，定價 250 元。	1994
國際書碼	ISBN 957-621-743-1	ISBN 0-691-03390-0

前言

筆者上學期在參與國科會研究計畫「古文本在數學課堂中的應用」時，選定了「圓」當我教學上的主題，主持人洪萬生教授推薦我看 *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite* 這本書，作者即爲 E. Maor。這本書的內容非常的生動有趣，同時包含許多的數學人文活動面向，讓人印象深刻，也因此開始注意到 Maor 這個作者的一系列書籍。於是，我們這一群人上網買了 Maor 的另兩本書：*e: The Story of a Number* 及 *Trigonometric Delights* 。在我們還來不及將英文版讀完之時，想不到天下文化已經發行了中文版了（《毛起來說 e》與《毛起來說三角》）！在語言的便利之下，當然先讀中文版囉！

在高中舊課程的最後一年的課程中，高三學生必須要學習微積分，學習指數與對數的微分當然也是勢所必然！但是，在在一般教科書中，e 這個數字只是冷冰冰的定義而已。所以，我試圖從《毛起來說 e》這一本書中，尋求一些教學上的資源。而在教完這個單元的現在，我可以很欣慰的表示說：收穫良多。

作者簡介：Eli Maor, 芝加哥羅耀拉大學(Loyola University)數學史教授，多年來於許多數學和數學教育期刊發表過文章。

譯者簡介：鄭惟厚，台灣大學數學系畢業，美國愛荷華大學統計博士。現任淡江大學數學系教授。

內容簡介

Maor 在序言中提到，要更正學生對數學的負面態度，「講點數學歷史是很好的方法」，而這本書就是從這種教學法衍生出來的。同時，他認爲 π 的歷史書寫中，沒有比 P. Beckmann 的 *A History of* π 更好的書，而在 e 的歷史書寫中，還沒有可媲美的書出現。他似乎有個雄心壯志，想要在數字的歷史書寫中，佔有一席之地。

這本書中總共有 15 章，8 個附錄。茲轉述如下：

第1章　納皮爾：對數的創造者
第2章　迎接對數
第3章　財務問題
第4章　極限

從目錄的編排來看，就可以知道 Maor 這一本書的安排順序。因爲 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 這個數字，牽涉到對數、極限與微積分的觀念，所以 Maor 將這些觀念的發展，以時間爲縱軸來敘述，再佐以相關的數學史上的人物、典故爲橫軸，間夾雜以一些風雅的 e 的趣聞來點綴。

Maor 以對數的起源當故事的開頭。在第 1 章、第 2 章中，他首先敘述了納皮爾（1550-1617）的生平事蹟。然後再詳細地講解納皮爾對數產生的作法。因爲在納皮爾的對數中，納皮爾選取的底爲 $1-10^7$，即 $N=10^7(1-10^7)^L$，其中 L 爲 N 的納皮爾對數。當然，我們可以發現這個 N 的定義方式與現今的 $\dfrac{1}{e}$ 定義幾乎是等價的。所以，Maor 說：「事實上，納皮爾還差一點發現了 $\dfrac{1}{e}$ 這個數。」（p.11 注 14）第 2 章中，他接著說明對數發明後大受歡迎的程度。以及後續的改良。

在第 3 章中，漸漸的和 e 的主題有關了。由於金融貿易的需求增加，利息的複利計算變得非常的重要。其中，若將計息的次數趨近於無限大時，即是現今對 e 的定義：$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$。理所當然的接下來，就是闡述極限的意義了。所以，第 4 章中，Maor 開始說明何謂極限，如何計算極限。他舉了許多我們在高中課本中常看到的極限的例子，來說明一般情形下的極限取法。而又因爲極限不定式的極限過程與一般基礎科學不同，不能依賴實驗數據而成爲一個「定律」。所以，在此，Maor 似乎要展現他的「博學多聞」，將焦點暫時轉移到數學與其他基礎科學的不同之處。之後，再將焦點繞回 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 上。爲了要將這個式

子展開，需要二項式定理，接下來 Maor 先從巴斯卡三角形講起，再說明一下組合公式（這裡就顯得與主題無關了）。然後才是正題：將 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 利用二項式定理展開。到此，Maor 算是完整地說明 e 這個數字了。

說明 e 這個數字的特性，必須藉助於微積分。所以，從第 5 章開始，Maor 將注意力著重在微積分的發展上。他先要講「微積分的起源」，所以，他從阿基米德（Archimedes）開始，認為他的窮盡法已經相當接近現代積分學的想法了。他以阿基米德處理圓面積及拋物線為例，說明阿基米德的想法。最後 Maor 下了一個結論：「既然窮盡法相當接近現代的積分學，那麼為什麼當時希臘人沒有發明微積分呢？」（p.61）他的理由是：(1)因為希臘人認為無限是令人恐怖的事物（horror infiniti）。(2)因為希臘人沒有代數符號。為什麼覺得無限「恐怖」呢？當然必須從季諾（Zeno）的悖論（譯者翻譯成詭論）講起。第 6 章中，時間繼續往前微積分發現的推進，Maor 提到了當時的環境背景：因為航海技術的需求，以及哥白尼天文學的影響，使得應用數學逐漸佔上風，而刻卜勒(kepler)的極微量方法(method of indivisible)就被 Maor 視為「離現代積分學只差一步」。（p.74）

接下來，本書穿插一個第 7 章「求雙曲線下的面積」，再將 e 這個主題與積分結合在一起。從直線形面積公式的推導，到曲線下面積的求法需求而言，當然，就輪到笛卡兒與費馬的解析幾何出場了。所以，Maor 敘述了笛卡兒的生平事蹟，他的座標幾何，及他的《幾何學》的影響。而費馬的故事中，就集中在他如何推導出 $y=x^n$ 的曲線下面積的積分公式，當然 $n=-1$ 是個例外。而耶穌會教士聖文生（1584-1667），則推得 $y=\frac{1}{x}$ 曲線與 x 軸夾的區域面積應該是一個對數函數。接下來的，就交給微積分來處理了

第 8 章中，以牛頓為主，Maor 敘述了牛頓的生平事蹟、牛頓從巴斯卡三角形得到靈感的「無窮級數（infinite series）」，然後是牛頓的「流數法」。第 9 章的主角是萊布尼茲啦！同樣的，在這一章中，Maor 敘述了萊布尼茲的微積分方法，同時，因為 Maor 要強調一個好的代數符號的便利，所以，他在處理萊布尼茲的方法時，就會著重在符號的運算上，並以實例來說明萊布尼茲的方法。在這一章的最後，不可免俗的，當然要提到微積分發明先後的爭論，以及這個爭論對英國及歐陸數學發展的影響。

從第 10 章到第 14 章，主角又回到 e 本身了。有了微積分的襯托之後，就可以看出 e^x 這個函數的特殊之處。第 10 章中，先說明 e^x 的微分（變化率），以及在自然中的一些自然指數的例子，和解物理問題時會得到的一次及二次微分方程的解。再藉著指數與對數間互為反函數的關係，導出對數的微分。第 11 章是對數螺線 $r=ae^{\theta}$ 的介紹。這時，當然必須介紹伯努力家族了。介紹了他們對數學的貢獻與成就，以及他們家人之間的互相爭吵之後，Maor 將注意力轉回極座標與對數螺線的介紹。第 12 章處理了一個「懸著的鏈子」的問題之解決。這一條懸著的鏈子的圖形居然是 $y=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ 這樣的曲線，而不是一般直覺認為的拋物線！而此時，當然就自然而然地引入的雙曲正弦（$\sinh x$）等雙曲函數了。

第 13 章說明 e^{ix} 這個函數的意義，當然主角就是歐拉（Euler）。在這一章中，Maor 說明了歐拉的生平、他的一些數學成就，還有他對 e^x 的定義及延伸，以及 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 這個令人驚訝的式子。有了指數出現虛數的例子，當然就要進一步說明指數是複數的意義了。所以，在第 14 章中，Maor 首先說明了「虛數」的誕生過程，負數與虛數的發展，到進一步的

向量、複數平面的表示方式，最後就是e^{x+iy}的意義了。

在後一章，當然要回歸到 e 到底是什麼的問題上。既然 e 是一個數字，當然要從數字的發展說起。從畢氏學派的自然數、有理數到無理數的發現，而後是戴德金（Dedekind）的分割，實數才算是完全有了嚴密的基礎了。但是，e 只是一個無理數嗎？當然必須再進一步地區分成「代數數」與「超越數」。所以，結論是：e 是一個超越數。（那超越數的「實質」意義是什麼？作者沒說！）

Maor 除了正文及附錄之外，在每一章的後面，都還會附上與正文相關的一些資料，或是補充數學算法上的不足，如對數的計算、極微量方法的使用；更有一些非常豐富的有關 e 的趣聞、歷史、及相關數學概念。像是自然界及藝術界中的對數螺線，讓人對大自然造物的奧妙，及人類藝術創作與數學結合的美嘆爲觀止。這是 Maor 的書吸引人的一個特點之一。

評論

當我們看這樣一本科普書籍時，我們的期待是什麼？可能是知識的獲得。而從這一方面來看，Maor 的這本書，算是達到了讀者的要求。他將有關 e 的概念發展，歷史典故，趣聞、以及應用，鉅細靡遺地呈獻給讀者。同時，他又減少了艱深的數學理論的推導過程，將整本書的數學門檻降低了許多，這也是他這一本書讓人覺得親切的地方。所以，我看完了這本書以後，總有參與了一次還算有趣的指數對數微分的教學活動之感覺。本書內容有很多是可以豐富我們教學活動的，除了相關數學家的生平之外，Maor 引進的先求e^x的導函數，再求它的反函數$y = \ln x$的導函數的方法，就是一個我實地應用的例子。同時，Maor 提供的許多自然界及物理中有關自然指數函數的實例，也理應豐富了學生對 e 的瞭解。

但是，如果我們苛求一點，這一本書的許多地方是不合格的。當我們在看這樣一個數字的「歷史」時，不可避免的，一定會提到「人」的活動，而人的活動不應該只是有趣的軼事而已，社會的互動其實會影響到數學知識的發展方向，這一論點，現今的數學史研究或是數學教育研究都是贊同的，並且日漸受到重視。但是，在 Maor 的書中，我們看到的是數學知識的客觀性、普遍性，他對歷史的解讀，是一種「去脈絡」的方式，亦即將歷史事件以現今數學的眼光來衡量。雖然他想要以「歷史跳脫公式」，卻也只是將歷史當成是茶餘飯後，譁眾取寵的材料而已。

例如，Maor 提到了極限，也就是無限大或無限小的問題，他使用了將數「分割」，及「數學原子」這樣的字眼（p.40）同時，又提到了希臘人對無限的恐懼（p.63），爲什麼會恐懼呢？希臘人對無限的恐懼影響的不只是當代人而已，其實一直到微積分的發明後，都還籠罩在它的影響下。這麼重要的一個文化脈絡，Maor 卻是交代不清，或是隻字不提。Maor 只有簡短的說明季諾悖論中的一個，想以這樣簡陋的說明打發讀者。熟悉希臘數學史或是科學史發展的讀者應該都知道，希臘人對於「變化」的興趣，以及當時兩派意見相佐的看法，一是認爲運動是連續不可分的，以 Heraclitus 爲代表；另一派認爲時間或空間有最小的分割單位，以 Democritus 爲代表。而 Parmenides 則兩者皆不同意，他認爲運動是不可能的。他的弟子季諾就是爲了要反駁這兩派的說法才提出那四個悖論。根據亞里斯多德流傳下來的記載，我們可以知道季諾的這四個悖論，前兩個是在反駁第一派的說法，後兩個是在反駁後一派的說法。因爲季諾的「搗蛋」，及對變化問題的關切，卻又無法以理性說明清楚，所以希臘人不敢去碰觸這樣的問題。從此看來，阿基米德離積分的發現，不只是一步之遙而已，而是一條沒有辦法跨越的鴻溝。

Maor 在第 15 章中對畢氏學派的說法，也有一點是讓人啼笑皆非的。「發現這些洞（無理數）是畢達哥拉斯的功勞」（p.267）？這句話想必會讓畢格哥拉斯跳腳吧！他巴不得不要發現這些洞，這樣他的--「萬事萬物皆由自然數及其比值所構成」之主張才得以完整呀！無理數的發現著實困擾了畢氏學派許久，他們把這些數稱爲「不可公度量的（incommensurable）」數，並不代表他們就欣然接受。同樣的問題也發生在刻卜勒身上，Maor 說：「刻卜勒發現了五個正立體的幾何構造，他認爲這些構造，決定了六個已知行星的軌道之間的差距」（p.71）。這句話有誘導讀者之嫌，刻卜勒最先在構思行星運行軌道的模型時，因爲對柏拉圖的忠誠，所以才先以五個正立體爲模型，在沒有辦法解決問題的情況下，才修正軌道成橢圓。（這點 Maor 在第 15 章時有提及，不過也只是一句話「誤入歧途超過三十年」而已。）

同樣的問題也發生在「求 $y=\frac{1}{x}$ 的曲線下面積」及 $\sqrt{-1}$ 的誕生上。Maor在第 7 章「求雙曲線面積」這一章中，爲了引進解析幾何，當然得提及笛卡兒及費馬。他說：「大約在十七世紀之初，好幾位數學家曾各自獨立地試圖解這個問題（即指介於 $y=\frac{1}{x}$ 的圖形、x軸及兩條垂直線 $x=1$ 及 $x=t$ 之間的區域面積），其中最有名的包括費馬及笛卡兒。」（p.82）雖然笛卡兒在 1632 年的書中，曾回答Mersenne有關 $y^n = px$ 的面積、體積和質量中心等問題，但在 1637 年他的《幾何學(*Géométrie*)》出版後，笛卡兒對這方面的問題的興趣已經減弱。[12]《幾何學》關注的焦點所在，是藉著代數的幫助，笛卡兒想以一個統一的方法，去解決幾何作圖的問題。[13]就我所看到的文獻而言，並沒有提及笛卡兒曾經去解過那個問題。Maor在這裡並沒有提供參考文獻，所以有點讓人無法信服。

而在 $\sqrt{-1}$ 的誕生的故事中，Maor的看法就如同一般「不熟悉」數學史的教師們所認爲的：$\sqrt{-1}$ 誕生於解二次方程式中。Maor說：「方程式 $x^2+a=0$ 無解的這個問題，已經存在了好幾個世紀，……最早嘗試的人是義大利數學家卡丹諾，他在 1545 年試著找尋兩個數，使兩數和爲 10，而積爲 40。」（p.232）Maor沒有提及的是，卡丹諾這個問題出現在他於 1545 年出版的重要書籍《大法（Ars Magna）》的第 37 章中。而這本書的用意是在介紹三次、四次方程式的求根公式。事實上，卡丹諾在這本書的第十一章中，即給出解 $x^3+mx=n$ 的方法。但是，同時他也碰到了「不可約」的三次方程式的問題，例如像是 $x^3-15x=4$ 的不完全三次方程式，以卡丹諾解法，它的解爲 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$，但是我們又知道這個方程式有三個不同的實數解。卡丹諾沒有辦法處理這個問題，所以，雖然他在第三十七章中，看起來好像可以處理 $5+\sqrt{-15}$ 及 $5-\sqrt{-15}$ 這兩個數字，他卻也說「既精妙又無用（as subtile as it is useless）」。[14] $x^3-15x=4$ 的解的問題要到邦貝利（R. Bombelli 1526~1573）出版他的《代數學(L'Algebra opera)》中，才獲得解決，也才真正建立了虛數的運算法則。所以，$\sqrt{-1}$ 這

---

[12] 請參考C. Boyer, (1949) *The History of The Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover. P. 166.

[13] 參考Nuffield Foundation出版的*The History of Mathematics*. Singapore: Longman.

個數之所以變得不可忽視，是來自於解三次方程式中，而不是二次方程式。[15]

上述所提及的，都是 Maor 在「應用」數學史時的一些「去脈絡」問題。當然，若公平一點的論斷，在一本科普的書籍中，要把歷史講得有趣，卻又得兼顧其歷史意義，並不是一件容易的事，或許我對 Maor 是有一點要求太過了吧！但是，有一點卻是我無法理解與諒解的，即是史料的錯讀。在本書的第 5 章「微積分的緣起」這一章中，阿基米德是一個很好的開端。在解釋阿基米德如何證明圓面積公式及如何求得 π 的近似値時，Maor 說：「利用圓內接與外切正九十六邊形（他是從正六邊形開始，然後不斷把邊加倍）…」（p.59）而 Maor 所列出的參考文獻是 Calinger 編的 *Classics of Mathematics*，以及 Heath 的 *The Works of Arichimedes*。但是，在 *Classics of Mathematics* 中的阿基米德原文中，明明是從正四邊形開始，只是他把 90 度三等分，得 30 度，再將邊 8 等分，在一個 360 度的圓中，就得一正 96 邊形。這裡，就不曉得爲什麼 Maor 會犯這樣的錯誤？實在讓人不解！

最後，就是這一本書的翻譯問題了。這一本書由淡江大學數學系鄭惟厚教授翻譯，比起國內其他科普書籍的翻譯而言，他的翻譯算是問題很少的，只有幾個地方，可能也是很多科普書籍翻譯時常犯的錯誤：（1）method of exhaustion通常譯爲窮盡法，或是窮竭法，而不是「窮舉法」（窮舉法類似歸謬證法，將所有的可能一一加以證明爲誤，剩下的那一個即爲真）。(2)在 85 頁中將Diophantus翻譯爲狄歐范特斯，而在這一個的譯注說明中，卻又翻譯做丟番圖。(3)「incommensurable」通常翻譯做「不可公度量的」而不是「不可通約的」，「不可公度量的」這個詞有其歷史脈絡在。(4) 「Fermat’s Last Theorem」譯爲「費馬最後定理」，而不是「費馬大定理」。(5) Maor這本書校稿時(1993)，懷爾斯確實才剛給出費馬最後定理的初次證明，但隨後被發現證明過程中漏洞，一直到 1994 年，懷爾斯才給出完整的證明。這一點譯者（尤其是一個常常翻譯科普書籍的譯者）似乎應該要知道，也應該在譯注中補充說明才是。[16]

我這一篇書評，是從「略懂得數學史」的教師角度來批評的，所以，有些時候會顯得過於嚴苛。但是，若單就一般讀者，甚至是學校的數學教師而言，《毛起來說 e》，不失爲一本有趣、材料豐富，能夠讓教學活動更爲活潑、生動的一本書。但是，若就一本書所背負的「教化」責任而言，它無疑是不合格的。畢竟，對以歷史來逃脫傳統數學知識中的冰冷、無聊的數學公式這一目標而言，「歷史」的解讀是很重要的。而「在脈絡」的解讀方式，對讀者在潛移默化當中的影響，亦是不能小覷。

---

[14] 見於卡丹諾的*Ars Magna, ff. 65v.* 和 *66r.*，收錄於D. Smith, *A Source Book in Mathematics.*

[15] 請參考W. Dunham所著，《天才之旅》，台北：牛頓出版社。

[16] 請參考Simon Singhh著，《費馬最後定理》，商務出版社出版。

與大學生談埃及數學在教學上的應用

台師大數學研究所碩士班研究生 林倉億

筆者在去年曾與目前任教於台北市立實踐國中的邱靜如老師合作，設計了一份利用埃及數學[17]來輔助國中一年級分數教學的教材，並由邱老師在她任課的班級中實驗了這份教材。實際教學之後，我們合作寫了一篇文章，『埃及數學在分數教學上的應用』，[18]介紹此份教材與設計理念、埃及的數學、教學心得與學生反應等等。而在不久之前，有個機會讓筆者與現在師大數學系四年級的同學（約四十位）分享埃及的數學史，筆者便以該篇文章為主體，與他（她）們分享一些小小的心得，除了希望能讓他（她）們對埃及的數學有初步地了解，並期待這樣的教學實驗報告能對他（她）未來的教職生涯有所裨益。結束之後他（她）們也寫了心得報告，本篇就是筆者閱讀他（她）們心得報告後的心得報告。

在進入本文的主題之前，有必要先介紹筆者當時所提供的內容與策略。講述的主要的內容簡介如下:

一、設計此份教材的動機與理念

分數的四則運算是國中數學第一冊第二章的主要教材內容，雖然該章重點是放在正、負分數的運算上，但由於與小學數學的重疊性大，所以我們決定引入不同風貌的數學—埃及的數學，除了增加上課內容的多樣性外，更讓學生有機會一窺數學的文化、歷史與人類活動面向。

二、埃及相關背景

包括地理、歷史背景的介紹，並以萊茵紙草（Rhind Papyrus）與莫斯科紙草（Moscow Papyrus）為主，簡略地介紹埃及的數學。

三、埃及的數碼、整數與分數

這裡是最主要的部分，除了介紹埃及人的算法外，還強調埃及整數、分數的表示方式與計算方法上的關係。由於埃及記數法是採取簡單累數制（simple grouping system）[19]，所以只要知道逢十進一，透過簡單的畫一畫、數一數，便可以解決整數的加減問題；而主要透過加倍與減半的程序（對埃及人而言只要把數碼的個數加倍或減半即可），埃及人不用背九九乘法表就能解決整數的乘除問題。至於分數，其最大特色就是單位分數的使用，然而此一堅持，卻造成了在分數運算上的困難，不過利用加倍、減半與 2/n 表[20]的運用，埃及人一樣不需要九九乘法表就能夠解決分數的乘除問題。

四、實際使用的教材講義

主要是展示邱靜如老師在課堂上使用的教材講義，其中包含一張萊茵紙草第六十九題的投影片。

五、學生的學習情形與實施後的檢討

介紹當時學生不同的學習反應，包括正面與負面的，並加以分析，最後提出此份實驗教材的檢討與需要改進之處。

至於當時的主要策略，就是強調「不用背九九乘法也能做分數的乘除」，這句話挑起了這些

---

[17] 在本文章中，埃及的數學指的是大約西元前３０００～前１０００年間，在今天埃及這個地區所發展的數學活動。

[18] 此篇文章尚未發表。

[19] 參看梁宗巨【數學歷史典故】，1995，頁 16-19。

[20] 此表將 2/n這樣子的分數寫成單位分數的和，其中n從 3 到 101。

數學高材生們的「戰鬥心」，筆者在那當下強烈地感受到被數十隻眼睛「敵視著」的滋味；此外，在講解過程中還時時提醒同學們不要忘記把自己假裝成埃及人來思考，否則將無法看到埃及數學的「真實」面貌。事後證明此一策略奏效，絕大多數的同學都能夠拋掉現代數學的「有色眼光」來欣賞、思考埃及的數學，以下是一些他（她）們在心得報告中的反應：[21]

> 從小就把九九乘法表背的滾瓜爛熟的我，實在很難想像只用加減法就可以解決四則運算，而且還不只整數，連分數也可以解決，實在太令人驚訝了！

> 在剛開始聽到埃及人只用加倍和減半的方法就能夠處理數字乘除的問題，還真是令人難以想像，起初以為埃及人不懂九九乘法表的話，那麼大概也只能用連加的方式算乘法（數字大一點不就會算到累死），用連減的方式算除法（那麼只能作帶餘除法，也不會有分數的出現，更別提解方程式了！）。

> 當我聽了這一個消息，真的覺得很令人驚訝，沒有想到沒有九九乘法表的世界，也能夠把這些我們利用乘法和除法的數學算法，也能夠解決。

類似上述的觀點，在他（她）們的心得報告中比比皆是，因此，筆者相信他（她）們已經對埃及的數學有了較適當的認識。在這個基礎上，分析他（她）們的心得報告，發現了三個有趣的現象，筆者將在接下來的篇幅中，一一呈現。

第一個有趣的現象與這一群大四學生的背景有密切的關係。雖然現在台灣師大數學系的學生已經沒有當老師的義務了，但根據台灣師大數學系自行做的調查，仍有高達 90%的學生將來準備從事教職，因此如何當一個受學生歡迎的數學老師，如何上不讓學生討厭的數學課，自然是許多大四學生的關懷所在，一位同學就表示：

> 我想，現在應該有很多老師，他們在意讓學生喜歡數學甚於學生的數學成績，希望未來有一天，數學不再是多數學生討厭的科目，數學老師也不再是討厭的老師排行第一名。

而筆者所介紹的又正是一個教學實驗，如預期的，在他們的反應中有許多是與數學教學直接相關的，例如：

> 雖然過程比較複雜，可是想法卻是相當的簡單，再加上沒有所謂的背誦、公式，相信這樣可以打破學生對數學的刻板印象，也可以發現數學的另一面，相信這對學生在數學上的學習是有所幫助的。

> ……比較現在利用九九乘法的方式，可以發現計算的過程變得十分快速，但學生學到的東西可能只是運算的方法而已，而不是其中所蘊含的意義。

最令筆者感到高興的，是有一位同學因此反省了自己的教學觀：

> 在剛開始聽學長說有關埃及的算術法時，心裏的疑問其實是跟學生的反應一樣的：為什麼要教學生這個？而且還花了兩堂課的時間；不是頂多作為一個引起興趣就好了嗎？……忽然發現自己竟然也陷入傳統的「以成績為依歸」的漩渦中，認為知道這樣

[21] 本篇文章對聽者心得報告的摘錄已做局部地修改，但僅止於明顯的錯字、贅字或漏字的修正，例如「苦」瓜爛熟改正爲「滾」瓜爛熟。

東西為學生的分數沒有幫助，所以不用學。

暫且不論這些教育界的新血未來將如何表現，但至少抱持著比較「健康」[22]的心態離開校園，對我們的教育就是一種希望。

其次，也或許是有感於社會大眾對數學教育的期待與壓力，這些同學對能夠吸引學生、啓迪思考的教材教法，[23]接受程度相當地高：

當你使用這種兼具歷史知識與社會文化風情的教材時，數學不再是一般中學生刻板印象中那樣的枯燥乏味……而當學生們以愉悅的心情來上這堂課時，也正表示這份教材是成功的。

當學生講出：為什麼上老師課不像上數學課？我想這大概是身為一個數學老師最大的欣慰吧！

根據筆者自身的經歷，以及與幾屆大四同學交談的心得，雖然大四的同學都很渴望獲得具吸引力、啓發性的教材教法，但礙於某些因素，[24]往往不得其門而入，或者只是流於玩玩數學遊戲、秀一些花俏的東西而已，並未仔細照顧這些活動與教學內容間的連結，這就好比包著糖衣的藥丸般，縱使學生樂於吃糖衣，也不見得願意好好的吃藥丸。Wittmann認爲：「教師在離開大學時的行李之中，應該有一組具有實質內涵的教學單元（substantial teaching units）[25]，而這些單元呈現了教學的準則。」[26]（Wittmann，2000，頁 99）筆者相信許多教師和筆者一樣，檢視自己離開大學時的行李，才發現十分缺乏這樣子的教學單元。雖然這份實驗教材仍有許多待改進的地方，但是筆者仍希望透過這種經驗分享，讓這一群大四同學在教學設計上有更細膩的安排，那麼，在他（她）們即將打包的行囊中，便又多了一項教學利器。

最後一個有趣的發現，就是不少同學眼中的數學「種類」增加了。筆者曾經訪談十四位大四同學（現已畢業），發現他（她）們在中、小學數學學習幾乎是以習題演算與獲得高分爲核心，而進入數學系之後，所接觸的絕大多數是高度抽象化、形式化、以邏輯演繹爲主的數學，也就是說，十幾年的數學學習經驗讓他（她）們認爲數學是永恆、普遍並且具有絕對確定性的客觀真理。因此，當筆者介紹埃及數學時，他（她）們對之中的文化、歷史與人類活動面向展現了高度的注意，一位同學就表示：

……比較比較大的衝擊是原來數學並不是一成不變的。

更進一步地，許多同學反思了自己的數學思維：

……也許是之前接受到了一些資訊之後，我們太習以為常，且並沒有去鼓勵去作其他的思考，有時候反而抑制了我們的一些新奇的思維。

---

[22] 筆者所謂的健康，是相對於以成績爲依歸的心態或其類似心態。

[23]「能夠吸引學生、啓迪思考的教材教法」並非指經過實際教學驗證的，或是得到理論支持的，指的是大四同學們自己對該教材教法的感覺。

[24] 這些因素包括：缺乏實際教學經驗、擁有的知識過於狹隘、眼界不夠寬廣、只求標新立異等等。

[25] Wittmann指的substantial teaching unit有兩個重要的面向，一是在每個單元背後都有重要的數學概念、數學結構；二是透過單元背後的數學結構，同一個單元可以用在不同的階段以幫助學生學習上的銜接。筆者在這裡著重於前者。

[26] 整句話的原文是：Teachers who leave the university should have in their baggage a set of substantial teaching units that represent the standards of teachings.

……用一種不同的數學觀點去解釋四則運算，這讓我們對數學的包容性又加深了印象。我們常常會被某個框框限制住，用一種慣常的思考模式去進行例行性的思考，有時候我們都忘了，我們為什麼這麼想，不是嗎？

這種反思主要來自於認知到在不同的文化下，也可以生產出不一樣的數學系統，而這系統以適當的眼光來看，卻是充滿了趣味與前人的智慧。如一位同學所表示的：

……雖然過程不如所學的分數運算簡潔明瞭，不過整個運算就好像一種推理過程那樣有趣，得慢慢思考為什麼會這樣，不像我們的運算，很快速就能夠解答出來，卻反而減少些趣味性。

筆者認爲倘若有人真的突破原本的思考框架，那麼她（他）面對未來的學生、教學等等，將能夠做出更好的對應，比如說能夠從不同的角度來思考學生的錯誤與學習障礙。

雖然邱靜如老師與筆者的學識與教學經驗都相當地不足，但在合作的過程中，我們的確學到了許多難得的經驗，也啓迪了許多的想法；而從這一群大四同學的回饋之中，筆者也獲得不少寶貴的建議，在此特地向他（們）致謝。在他們之中，筆者也看到了許多位都對教育充滿了熱忱與自信，倘若能在各方面持之以恆地精進，假以時日必能在教學中闖出一片天空。

參考文獻：

邱靜如、林倉億，〈埃及數學在分數教學上的應用〉，未發表。

林倉億、洪萬生，〈數學史教學與數學觀的改變〉，《第七次張昭鼎紀念研討會會議論文集》（2000），頁 23-45。

Wittmann, Erich Ch., (1998), “Mathematics Education as a ‘Design Science’”, in Sierpinska, Anna and Kilpatric, Jeremy eds., *Mahtematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp.87-103.

『央行的新鈔』與『國王的新衣』

-----45 度也是 60 度-----

台師大數研所碩士班研究生 蔡仲彬

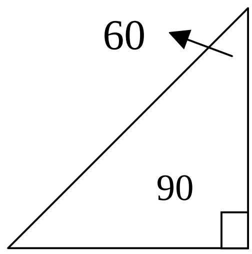
感性與理性是我們面對外界刺激時兩種相對的反應，感官的世界常有很多的迷障，所以常需要理智的協助，使兩者能夠獲得較平衡的安置，對以視覺爲第一感官的我們來說，這實在是不容易的，但這也是學習的一種樂趣，一種新眼界的開拓，一種新意義的誕生。在數學中，我們亦不斷在作這樣的發現與傳承，像數系的擴張、非歐幾何的認識、無限集合的比較、拓樸的觀點…等，都是令人讚嘆的；而這兩者的衝突也常是藝術工作者創作的題材，如 M.C. Escher 的視覺藝術（不可能的建築物、水往上流、可無限往上的樓梯、走不完路的螞蟻等等）、

魔術師們的巧妙手法（人的消失和漂浮、撲克牌、解開鎖等等）、格式塔（Gestalt）心理學的知覺圖（是鳥也是兔子、是杯子也是人等等），這些基本上都是一種超越視覺感官的知覺提昇，但前提是對它表象背後的認知配合，也就是去『know how』，不然它可能停留在『不可能』、『騙術』或錯誤印象的層次。

以上種種，對一般人來說，都是新奇有趣的，而學數學的我們對感官接觸到的訊息、圖像，常傾向以理智來思考並賦予意義，尤其是對數字或圖形也比較敏感，判斷事物也常以邏輯、論證來嚴謹的對待，課堂上，我們也常要求學生要實事求是、仔細去檢驗問題，判斷答案是否符合情境；但有時在邏輯上接受了，在心理上仍迷惑的也常有，像是『正整數和整數一樣多』、『0.999…＝1』、『線段〔0，1〕和〔0，2〕上面的點一樣多，也和 1 平方公分的正方形上的點一樣多』、『所有的圓周角都是一樣的』、『一線段，每次去掉一半，將永世不竭』、『一個有三個直角的三角形』、『10 條線共交點和 2 條之交點一樣大』、『自由落體是一視同仁的』等不勝枚舉，有的衝擊知識，有的違反直覺，不管如何，部分你將接受，部分你可能只有搖搖頭，就如海市蜃樓在眼前，你要如何反應呢？回想『國王的新衣』這個故事，讓我們看到了小孩的純真，也諷刺了扭曲的社會現象，更對聰明與愚笨的人作了一些嘲諷，事實上的沒衣服，也許前衛上是件跳脫視覺的新衣，但心理上認為的聰明、愚笨與邏輯上認知的互相消長，反而顯現人性矛盾的一面和普遍的社會現象。您認為呢？

以上這些數學及新衣和我們的新鈔有什麼關係呢？就生活必需品的實用導向而言是沒關係的，但以它所要傳達的深層意義來看可就不同了，不然也沒人要收集郵票和紀念幣來欣賞研究了；2000 年、千禧年，不管如何稱呼，對很多層面來講，這一年實在是值得深刻記憶的一年，因應即將進入新世紀，我們的新台幣也即將全面改版（實在是有感於最近提款機領到的都是千元新鈔），從今年七月起每半年會發行一種新鈔，分別為五百元（2001 年一月）、一百、兩百、兩千，各有不同顏色、代表植物與主題，現在已流通的為藍色千元鈔，主題為菊花、玉山、帝雉與小學生的德智體群教育群像，當然它 16cm×7cm的縮小尺寸及標榜美觀實用，易辨真偽的特色是新世代的縮影；在歷史意義來說，近 40 年的委託發行，現在回歸央行並定位為國幣，更有其新時代意涵，引用蕭耀輝先生（國立台灣藝術學院教務長）所說：『新版千元鈔的設計彰顯全民共有、全民共治、全民共享的全民政府。正面以教育、科學、文化為主軸，圖騰中是以小學生看地球儀、用顯微鏡、望遠鏡觀察世界，代表教育為百年大計。背面以台灣生態保育為主軸，圖騰中是以玉山薊、帝雉及雲海日出代表立足台灣、放眼天下的壯闊胸懷』。

對筆者來說，管它像不像人民幣，有沒有比美金人性化，甚至是一般人所重視的『價值效益』，身為數學教師的我們最感興趣的是當然它紙面上所傳達的資訊內容；先發行的千元鈔是以教、科、文和環境為訴求，這是值得肯定的，除了 3 女 4 男的小學生、主要的科學儀器外，我們發現它的背景有很多熟悉的數學對象，如：『整數』、『三角』、『丙＞乙＞甲』、及圓規、幾何圖形，還有右下角的分數加法的通分運算，至於數字 1000，你知道有多少個嗎？為了表示千元鈔，一共有中文壹仟圓 2 次，大字 1000 有 3 個、隱藏 1000 有 1 個、盲人用小字 1000 有 3 個、防偽線 5 個、邊線 135 個、字中字約 380 個，總共約有 529 個可辨識的字，最令人側目的是那直角三角形的度數 60，對一般學生或稍懂數學的人，怎麼看也像接近 45 度的等腰直角，這畫蛇添足的度數必然會引起有心人的誤會，誰這麼厲害瞭解這也可稱是防偽設計？（設計偽鈔者懂數學，可能自行更改？！）你要從立體三度空間的視角，才能想像這神奇的 60 度，這使人想起記者曾經誤譯 π 為有理數的媒體遺害；樂觀一點來看，這三角形也許會因此擴展大家的眼界，突破視覺的迷障，將是教育的一大貢獻，今後陸續將有 6 億張的千元生活小教材，這是令人期待又擔心的，這是不是錯誤呢？還是將錯就錯？也許只有是設計者知道答案吧！



前一陣子曾流行 3D 立體圖，有標題『恐龍』的圖形，有些人怎麼看就是看不出裡面有一隻恐龍；看看鈔票，對於央行新鈔上所訴求的未來主人翁---小學生而言，對這 60 度的反應，不知道如何回答『國王到底有沒有穿新衣服？』、『這到底是不是 60 度？』，親愛的老師，你會怎麼回答？

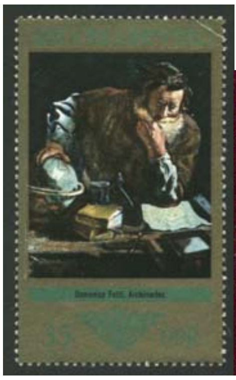
網站大公開

台師大數學研究所碩士班研究生 黃哲男

窩狼居 http://mail.mcjh.kl.edu.tw/~chenkwn/

在偶然的機會底下，筆者於師大數學系 BBS 站的 math 版（附註一）中看到一篇介紹羅素的文章，其來源就是上述的這個網址，於是便引起筆者的好奇心，決定一探究竟。

此網站乃是目前任教於台北縣金山完全中學的陳坤松老師所架設維護，誠如陳老師所言，網站定位在數學史資料的收集與其個人的作品。其中有一部份的數學史資料乃是 mirror 與整理自香港數學網（http://www.edp.ust.hk/math/），裡面有豐富的資料，如：數學史年表（網頁設有資料庫，方便查詢）、中外數學史、中外數學家、數學學科史等等。此外，陳老師還將國外一些介紹數學與數學家郵票（附註二）的網站 mirror 回來並做了中文化的工作，適當地於課堂上呈現，對於提升學生數學文化素養應該是有幫助的。



Archimedes

Newton

Gauss

除了 mirror 一些網站的資料之外，此網站也有不少講義、資料是陳老師個人的作品，其中還有其與基隆女中數學俱樂部所共同策劃的「數學遊樂園」。最令人期待的是「數學辭典」的部分，雖然還未建構完成，但看得出來陳老師想將紙本的數學辭典建構成網頁模式，方便大家查詢。由於還未完成，不清楚陳老師的計畫爲何，不過筆者倒是建議陳老師或將來有興趣建構類似網頁的有心人，數學辭典不要只有英譯中或中譯英，可以的話加上一些說明，此外，查詢辭典固然有許多方法，但架設一個資料庫，以搜尋引擎的方式去搜尋資料是最快速、方便的。

雖然此網站有許多內容是 mirror 並中文化他人的網站，不過限於頻寬與語言的問題，陳老師的努力與用心仍值得肯定，希望讀者可以利用有限的頻寬在其中找到有用的資料，也期待此網站其他未完成的部分能早日與大家見面。

附註一：

由於台灣的網路科學發展狀況與國外不太相同，BBS 仍是台灣學子甚爲喜愛的網路服務之一，因此可以在全國連線的 BBS 中找到不少好的資源。師大數學系 BBS 站自從成立以來，就設有 math 版，並與其他學校的 math 版連線，因此每天都有 200~300 篇文章匯入，目前也有固定的幾個網友在這裡盡一己之力，回答一些問題或提供一些資訊，此外還有熱心的版主整理了一個還算可觀的精華區。雖然 BBS 沒有 WWW 炫麗的聲光互動效果，但其所匯集的的人氣卻不是目前 WWW 所能比擬，歡迎對數學有興趣者來此園地，與全國愛好數學者一同交流。師大數學系 BBS 站：bbs.math.ntnu.edu.tw；140.122.140.242（請用 telnet）。

附註二：

筆者知道有許多國家鈔票上的肖像也是數學家，不知道是否有這樣的網站？