HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）
編輯小組：林榮生（西松高中） 黃振順（西松高中） 蘇意雯（成功高中）
謝新傳（五常國中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（竹北高中）
林倉億（台師大數學系研究生）陳鳳珠（台師大數學系研究生）
謝佳叡（台灣師大數學系）
北縣聯絡員：謝佩翰 （安溪國中） 中區聯絡員：顏富明（員林國中）
南區聯絡員：廖惠儀（高市大仁國中）
贊助單位：行政院國科會 西松高中教師會 彭婉如文教基金會
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

第三卷 八、九期合刊 目錄（2000 年 9 月）

重要訊息

各位親愛的讀者們：
從創刊號至今，我們也已經發行二年了。這一年在國科會的贊助之下，我們的發行網幾乎以遍及全台及金門地區！但是，國科會贊助的 money 到這一期結束了，因爲款項籌措不易，同時也希望這一份刊物得以發揮較大的效益，所以，從下一期起，我們的刊物只寄給「訂閱」的讀者。當然還是免費的啦！所以，請大家告訴大家，不管舊雨新知，請在一個月內回報給我們您的大名與住址（或是 e-mail address），我們從下一期起，就只寄或 e-mail 給那些有定的讀者們了！（最好是 e-mail 的形式，可以讓我們節省經費與人力。）

HPM 2000 台北後記

台師大數學系 洪萬生教授

歷時六天的 HPM 2000 Taipei（「數學千禧年：歷史、文化與教育」國際研討會），終於劃下圓滿的句點。

四年來的念茲在茲，我們總算不負大家的期待，在欣慰與喜悅之餘，心裡頭卻有著被淘空的感覺。

爲了舉辦此次研討會，本系同仁傾力演出，整個內部系統（infrastructure）之效能得以充份發揮，在本土的學術脈絡中建立一個先例。它證明（demonstrate）：我們可以只利用一個「系」的資源，就能布置一個充滿 HPM 願景的國際舞台。

然而，國際友人與同行對我們的接待與安排如何地滿意與讚嘆，卻都比不上我們學生輩的傑出表現。她（他）們都是畢生第一次「如此」粉墨登場，而且還是運用怯生生的英文。儘管如此，他們的言之有物與勇於表達，卻成了此次研討會的主要特色之一。過去幾個月以來，他們從零出發，如今已累積了難得的學術研究經驗，看到他（她）們的興奮之情始終溢於言表，真叫人與有榮焉！

此外，對於來不及準備上台的研究生（包括教學碩士班的成員），這一次研討會也提供了千載難逢的機會，將她（他）們充分地「暴露」（expose）在國際學術環境之中，因而得以分享國際學者的研究成果。譬如，港大的蕭文強教授就對多位學生向他請益而津津樂道。其他如來自法國的年輕學者 Frederic Metin，更是與我們的學生打成一片，成爲無話不談的朋友。當倉億告訴我說：他們想多開一場研討時段，請 Frederic 對他的論文多做一些說明時，我就體會到四年來的

籌辦工作再怎麼辛苦都值得！因爲年輕的 HPM 接班梯隊隱然成形。他們已經了解如何在國際學界結交志同道合的朋友。

國際同行與友人願意前來共襄盛舉，固然可以爲研討會增光，不過，要是少了舞台的擘建者，恐怕一切都將遜色不少。因此，我們必須在此特別提及幾位靈魂人物。首先是蘇惠玉大約是兩年前，她即著手籌備編輯《HPM 通訊》，在得到西松高中教師會的大力襄助之后，即順利於 1998 年 10 月出刊。本刊對這兩三年畢業的本系學弟妹，有一定影響力。爲了贈送與會者紀念品，惠玉也特別校訂出版了合訂本。

林倉億在國科會贊助我們的籌備工作之后，同意出任此一計劃的兼任助理。在過去一年之間，倉億任勞任怨，在張靜宜、邱靜如的協助下，總管研討會籌備的各項工作。爲此，他還因而被迫放棄提及論文的機會。同時，他也利用課餘時間帶領大學部的學弟妹研讀數學史，與她（他）們共同開拓一個數學的人文空間。這些學弟妹都成了此次研討會的工讀生主力，他（她）們的付出與熱情，絕對是大會成功的最佳保證。

還有，陳鳳珠也出力甚多。她除了與倉億、惠玉、靜宜、靜如、清揚等共同討論諸如海報、紀念品等設計之外，也在鄭芳枝、邱溫玲老師的指導下，負責規劃研討會期間的餐飲。黃清揚則在后期歸隊，他在黃文達老師的指導下，負責旅遊的安排與規劃，陽明山上小油坑的冒雨健行與日月農莊的溫泉與啤酒，是讓很多與會朋友回味無窮的一次旅遊！至於《論文彙編》（Proceedings）的編輯，則必須歸功於黃哲男。他爲了儘可能納編國內與會者預定提交的論文，一再地延后截稿，爲此，他不眠不休地工作了幾天，「差點撐不下去」！（據倉億轉述）。最后，我們還必須提及陳瑩琪，她爲了協助我們做英文的接待工作，特別向蘭陽女中請假，會中她承受了一些不足爲外人道的壓力，讓我既愧疚又感激！

就是因爲有這幾位可愛的年輕人（也包括參與我研究計劃的其他成員及本系助教）的智慧與投入，我們才有機會在國際舞台上展現台北 HPM 的動人能量。對我個人而言，有幸與他（她）們同台演出，實在是難得的緣份，值得永遠珍惜！

回想參加 1996 HPM Braga 時，有一天中午婉如、Jan van Maaner、John Fauvel 與我同桌吃飯。Jan 與 John 再次徵詢我承辦 HPM 2000 的意願，我當下承諾但特別請他們參考（refer to）婉如的高見，希望得到她的支持，因爲她是 DPP 婦女部主任！婉如終究沒有機會見到我完成這項付託。然而，此次 HPM 的與會者畢竟沒有忘記她，Jan 與 Marjolin Kool 在離台前，特別要我轉交 2000 元代捐給彭婉如基金會，以示對她的懷念。至於林芳玫通過青輔會對與會的中學數學教師之贊助與鼓勵，則代表另一種形式的追念。

在贊助者的名單中，除了上述的青輔會與國科會之外，民間部門的社團與出版社也給了我們很大的支持與鼓勵，他們是：台北市開平中學、彭婉如文教基金會、張昭鼎紀念基金會、遠哲科學教育基金會、科學月刊、遠流出版公司以及九

章出版社，他們的大力贊助，允許我們得以對國內與會者提供更寬裕的接待與服務。

最後。謹代表籌備小組，向出席此次研討會的十八個國家的貴賓與國內與會者，致上最高的敬意與謝意！由於大家的熱情參與，所以才有成功的 HPM 2000 Taipei!

（寫於美國 UB Student Union 8/22/2000）

科技在配合歷史的數學教學中之運用

－－由數學史所得到啓示的現代科技教學－－

日本筑波大學教育研究所　礒田正美

台師大數研所碩士班研究生　黄清揚摘譯

摘要：

數學教育的主流議題之一是配合科技的課程改革。這個議題似乎與配合歷史來教授數學有著很大的差距，但是一些活動可以把歷史融入使用科技的數學教學中。本文第一部份將討論爲何要將科技用在輔以歷史的數學課程中，第二部分則針對上述內容略述一些活動。

一、爲什麼應該使用科技在輔以歷史的數學教學

若不使用筷子，我們將不能真正品嚐到東亞的美食

一位老師若不太了解數學史，則他將傾向於孤立的教學，不能與其所生成的問題及概念連結起來。爲了讓教數學成爲人的活動，數學史融入了這個活動的模型－－數學化。事實上，在二十世紀最後十年，有一些研究專注在用傳統或現代科技來教授輔以歷史的數學。他們的觀念需要大家現在及下一個十年去注意，因爲我們已經進入媒體革命的年代，而且在不久的將來每一個人將會在數學上使用更多各種不同的科技。

舉例來說，若我們不能夠使用適當的工具，我們將無法把幾何的問題呈現出來。使用工具在歷史的重要性，不僅在於工具本身讓學生得到回饋，也在提供文化的透視，像是媒介的限制及源起於選擇媒介的衝突上。

也因爲把工具當成媒介是深植於人類的歷史及文化本身中，我們有必要用傳統的工具來將把教數學當成是人的活動。

爲什麼要用現代的科技－－數學史是困難的－－

科學家總是將其作品寫給同行及專家來看，所以學生要看懂內容是不容易的。非數學家在看這類數學作品時，若能藉網路或軟體之類較實際的工具的話，則可以減少一些困難度。從另一方面來看，學生的程度如何，只有老師能真正了

解，所以老師可由此來計劃學生在課堂上的活動、安排可用的工具，老師可以將歷史上的作品轉成學生易懂的面貌。在日本，笛卡兒的幾何作品有 Koukich Hara 的翻譯，其有代數的註腳，所以一般的人可由註腳了解內容。但這仍是不夠的，因爲要從代數式去想像曲線不太容易，而現在我們有動態幾何（GSP）這套軟體，我們就能把笛卡兒的作品呈現出來，使學生不再覺得數學是那麼遙遠的。

二、在課堂上使用’現代’科技的活動

將現有科技用在數學課堂上的 IT 革命

使用現代科技是在數學課堂上革命性的改變，利用函數或巨集指令，我們能設計特別的工具，這些工具軟體的介面使得一般人很容易去接近而且透過整合，學生可在任何地方使用。目前有許多多重表徵的數學套裝軟體，且經由 Java 能在網路上使用。利用那些軟體，我們由不同的表徵幫助學生探尋數學的觀念或概念。

用現代科技改變陳述爲探尋的面貌

IT 革命在數學課堂上一直運用字詞如探究或探尋，所以我們將焦點放在探尋過程中工具所扮演的的角色：

a)決定探尋的主題；

b)發展探尋的方法；

c)顯示在特殊背景中，使用這樣的工具而隱藏在其中認識論的障礙。

在課堂中，爲了使用工具，我們增加了以下的概念：

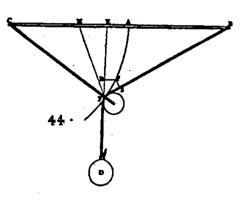
1)根據不同的背景，改變工具的角色；

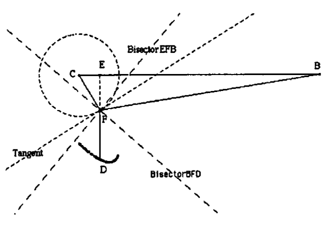
2)支持學生在經由改變工具及表徵上的理解；

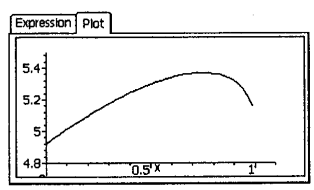
3)雖然數學概念的一般性及發展性隨著不同的表徵而不一樣，但爲了建構知識，我們應該給學生選擇、尋找及創造新工具或表徵的機會。

由現代工具輔助及由歷史價值驅動的數學經驗

這裡分享一個活動－－L’Hôpital 重量問題，學生在處理這個問題時使用 CAS 或 GSP，他們在討論問題時與原作者的討論不盡相同，但學生卻也能經驗到 L’Hôpital 希望去強調的部分。從這個活動來看，多重表徵的軟體幫助我們來增強文本中歷史問題的了解。事實上，在這個活動中學生必須去解三次方程式，若沒有 CAS 這個程式，他們將不能分享其中的關聯性。





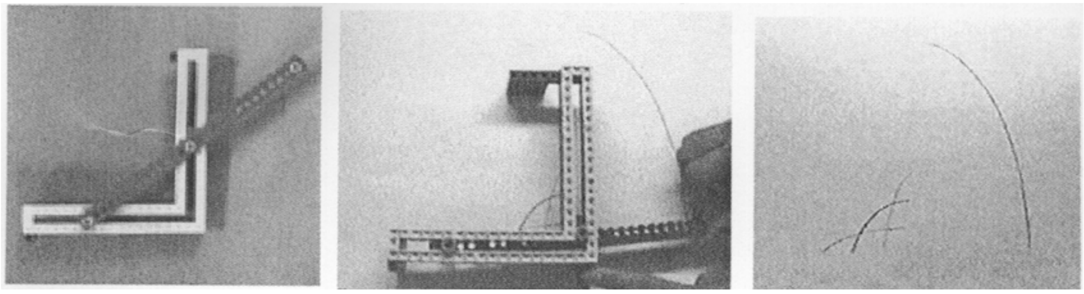


超越工具的限制

每一個儀器看起來都是唯一的，但卻有許多的表徵形式，像是物理的、虛擬

的或是數學的。為了統整不一樣的工具或表徵，目標之一，就是要去發展學生在選擇創造合適的工具或表徵的能力。在此，用不同的表徵來繪橢圓為例，學生在用樂高(LEGO)時會遇到較大的阻力，但是換成 GSP 時他們就能描繪橢圓的一部分，但要畫其他的部分時則要花更多的努力，這往往需要老師的指點。於此，不同的表徵給予學生多重的理解及相關的了解。

所以，老師用現代科技教學時，不應把傳統拋棄掉，一開始，使用工具的需要性是從社會-歷史-文化的展望來討論的。現代科技的發展是可以得到超越傳統的益處，但這些是有限制的。因此我們應該發展學生選擇工具的能力，這依賴於像他們在課堂上使用每一個工具能力一樣的需求。就此而論，數學史是很好的選擇。

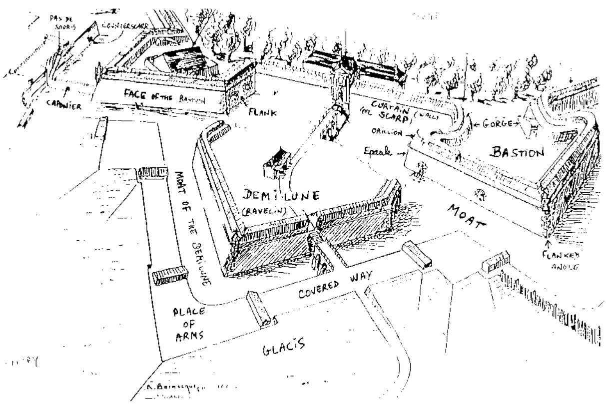


註：有關樂高(LEGO)的內容可至http://130.158.186.11/mathedu/forAll/index.html 或http://mathmuse.sci.ibaraki.ac.jp/index.html參考。

介紹 Frédéric Metin 的文章：”Teaching Fortification as part of Practical Geometry: A Jesuit case” (把防禦工程學作為實際幾何學的一部分來教授：一個耶穌會的例子)

台師大數研所碩士班研究生 林倉億

Frédéric Metin 是來自法國的一位學者，筆者在研討會期間，除了感受到他的親切和善外，更是被他的演講內容深深吸引，因此還特地邀請他另外再給筆者及其他與會者一場更深入的演講，收穫頗豐。研討會結束後，HPM 通訊決定要出一期關於研討會的專刊，希望介紹一些文章與心得和所有 HPM 通訊的讀者分享，因此筆者



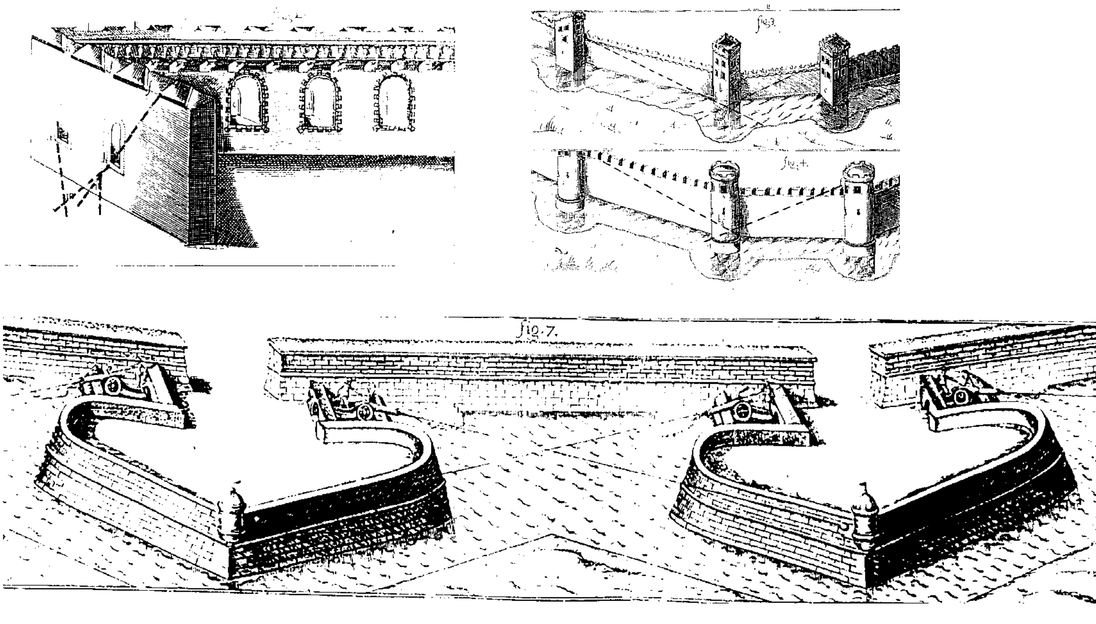
圖一：十七世紀的法國碉堡


圖二：一本防禦工程學書的封面

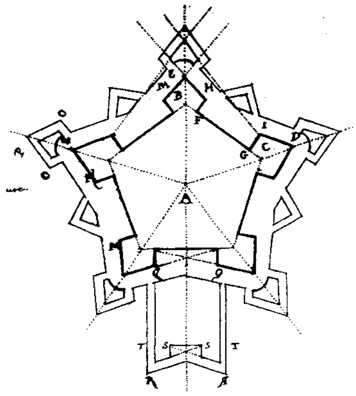
就選擇介紹 Metin 這一篇文章。

如同 Metin 在他的文章一開頭所說的，將防禦工程學、實際的幾何學以及耶穌會這三者放在一起是種奇特的組合：防禦工程學是用在軍事作戰上的，實際的幾何學是處理尺規作圖及測量問題，而耶穌會是一個宗教組織，這三種怎會湊合在一起呢？在十七世紀，歐洲可以說是烽火不斷，一個世紀中就只有兩年沒有戰爭，因此不難理解防禦工程學的重要性了；而在那個時代，法國的主要教育機構都是由耶穌會所成立的，歐幾里德的幾何學更是大學中的指定課程，所以，在這樣的時代背景之下，創造了一個讓防禦工程學、實際的幾何學以及耶穌會這三者共舞的舞台。上述這些，在 Metin 的文章中有比較詳細的介紹，而他的文章最主要也就是在介紹十七世紀的法國大學課程如何教授防禦工程學，以及有哪些人的著作產生了重要的影響。

就防禦工程學的演化來看，槍砲的發明帶來了很大的影響，在 Metin 的演講中，他展示了幾張投影片，以碉堡樣式的改變來說明此一影響。要建立一個易守難攻的碉堡，減少甚至沒有射擊死角是首要之事，至於如何設計就要考量到守方槍手的安全性、槍枝的射程、幾何圖形的優缺點、以及切線等等問題，這幾點 Metin 都一一的從碉堡樣式的演變上為聽眾解說（圖三）。筆者當時在臺下聽得興味盎，這是數學整合地用在實際生活中的具體例子，可惜的是 Metin 並沒有把


圖三

這一部分寫在文章之中，只有當場的聽眾有福氣得到這一有趣的事例，再加上謝豐瑞老師的”義舉”，使得我們得以影印這些精彩的投影片，說不定以後有機會可以在課堂上與學生分享。



圖四

至於要建造真正的城墻與碉堡，如何按照比例在紙上畫出設計圖就是十分重要的技能了。經由 Metin 的介紹，我們可以清楚地看到歐幾里德幾何學的影響，因為當時的學生在學習畫圖時，還是採用《幾何原本》中的作圖模式，也就是尺規作圖，並沒有採用較簡便、多功能的工具。行遠必自邇，基礎的尺規作圖當然就是那時代學生的必學課程，而在 Metin 文章所介紹的古文本中，我們更可以進一步地了解當時學生的學習與考試的內容。有一點是筆者要提醒各位讀者注意的，就是那時代的教育會堅持採用尺規作圖，是有其歷史、文化上的意義，更直接地說，歐幾里德的幾何學對當時的學者與大學教師（註一）來說，並不僅僅是一門數學而已，還具備了哲學與神學上的意義。（註二）

在 Metin 文章的最後，他舉一個例子說明若要以正方形做為碉堡的內部形狀時，設計圖要如何畫。不過，在演講時，Metin 舉的例子中，碉堡的內部是正五邊形的（圖四），並且利用電腦軟體呈現整個過程，我想在場的聽眾一定都會有與筆者相同的感受，這麼漂亮的圖形真的是利用尺規作圖就可以做得出來，不得不教人佩服前人的巧思！總之，Metin 文章中所介紹的是一個相當有趣的主題，社會、文化背景對數學發展的影響在此篇文章中展露無遺，各位讀者或許無緣聽到他精彩的演講，但仍可以從他的文章中一窺奧妙，以補未能親身體驗之憾。

註一：這兩者多數具有神職人員的身份，即便不是，也都是虔誠的信徒。

註二：在此筆者並不是否定尺規作圖在數學上的意義，只是欲藉此提醒數學老師，當在教授尺規作圖時，不能不思考它在數學上與教育上的意義。

感謝各校聯絡人：
●永春高中 陳明山 ●內湖高中 潘國華 ●松山高中 郭耀昇 ●中山女高 劉天民 ●成功高中 繆友勇 ●大直國中 陳文鴻 ●北投國中 黃國斌 ●石牌國中 張添順 ●大理國中 汪錫霞 ●永吉國中 謝朝隆 ●天母國中 賴春錦 ●蘭雅國中 李信仲 ●景興國中 彭君智 ●開平高中 林裕意 ●民生國中 程麗娟 ● 金山中學 陳坤松 ●基隆女中 林瑞淑 ●土城國中 賴炘堂 ●羅東高中 賴順基 ●復興國中 陳瑩琪 ●台南女中 吳昭榕老師 ●台中女中 陳勇政老師 ●安康中學 白家結 ●三峽明德中學 劉建宏 ●竹北國中 賴育伸 ●嘉義協志工家 朱清國 ●馬祖中正國中 陳君武 ●台南和順國中 林玲誼 ●北縣三民中學 楊建泰 ●高市興仁國中 歐志昌

當東方遇見西方

師大數研所博士班 蘇意雯

一、前言

此次數學千禧年-HPM2000 能夠順利在台灣舉辦，實在是因緣殊勝。短短五天緊湊的研討會，筆者自覺收穫頗多。在眾多與會學者中，來自韓國的朴星來教授發表了西方科學在中國、日本和韓國的比較評論。關於中國和日本的部份，相信大家較爲熟悉，因此，筆者在此僅摘錄西方科學如何傳入韓國之始末，爲讀者揭開朝鮮半島神秘的面紗。

二、節譯

在本篇文章的前半部，作者提到西洋傳教士是從十六世紀中葉開始，把西方文明逐漸介紹到中國和日本。但是在西方文明登陸中國和日本之後的三百年間，並沒有一位西洋傳教士到訪韓國。在韓國，首次有一些來自法國的天主教神父從事傳道活動是在 1835 年，但是卻於次年遭到逮捕以及斬首的命運。這樣的情形一直到 19 世紀初期才有西方人自願來到朝鮮半島。而在之前的這一段時間，朝鮮接觸西方文化只有兩種方式，那就是：朝鮮人到北京偶遇到訪中國的西洋傳教士；以及遭遇船難的西方人偶然地漂流到朝鮮海灘。可以想見上述的這兩種接觸，對朝鮮人來說幾乎是一無所獲，因爲這種機會微乎其微，而且那些到達朝鮮半島的西方人又大部份都是知識貧乏的水手，他們對於朝鮮人智識上的喚醒是沒什麼幫助的。所以在朝鮮的歷史文獻上只有少數被記載著。

如前所述，最有可能接觸西方人的時機，大概就是經由每年一次朝鮮使節到北京進謁的機會。此時朝鮮大使會率領數百名朝鮮人到中國以納貢之名，行貿易之實。不過這些使節團的目的並不僅止於此，事實上，有很多年輕的學者都亟於爭取造訪中國的機會，但因爲與外國人的這類接觸並不被朝鮮宮廷所鼓勵，因此這些人中也只有膽子夠大或智識過人的才有足夠的勇氣造訪停駐於中國首都的西洋傳教士。

雖然有一些有關西方科學和數學的書（包括 1607 年 Matteo Ricci 翻譯的歐幾里得幾何原本）傳入朝鮮，但是數目相當的少，少到在 Yi IK(1681-1763)寫作的百科全書中，有關此類的書目僅有個位數。儘管如此，Yi IK 卻承認西方的嚴正科學比傳統東學要優良許多，甚至他還曾說過要是孔子重生，必定會遵循西方的天文學而不是照著東方的方法。在這之後，陸續有人了解西方科學和數學的重要性，也提出了邀請西方人到朝鮮訪問或由政府成立學習西法的機構。

朝鮮在 1876 年對外國人開啓了大門，就在韓國努力地想要轉型爲一個現代社會時，日本佔領了這個國家。從 1910 到 1945 的殖民地時期，日本帝國只准許韓國人民接受最少量的科學數學教育。在三十五年的統治期間，只有二百多的韓國人從日本的大學獲得物理科學和工程學的學院文憑。令人震驚的對照是同時候的日本有成千上萬的人獲得相同的學位。日本殖民政府也很少允許韓國學生到西方國家留學。於是，韓國和西方文明真正和直接的交流又被延遲至 1945 年的韓國獨立之後，即是從 1953 年南北韓戰爭結束後開始。此時韓國僅有少數的科學家和數學家，而且在這之中的大部份都是在日本受完大學程度的訓練。由此之故，作者認爲真正韓國的現代科學和數學是由那些科學家在海外求學和受訓之後回到韓國所展開。換句話說，也就是從 1950 年代開始。

三、後記

與韓國接受西方文化相比，中韓的交流可就有趣多了。以數學為例，在朝鮮李朝，其算學的考試科目就明訂有「啓蒙算」、「詳明算」等。中韓文化交流源遠流長，下次有機會，筆者將再為讀者介紹。

兩種不同的數學典範：東方與西方

國立新店高中 蘇俊鴻老師[1]

前言

一位數學教師對數學本質的理解會影響教學上的安排，因此有效地提供教師一些歷史例証，澄清對數學本質的認識，是歷史學家在教學上能夠著力的地方之一。此次演講的主軸將圍繞在東方與西方文化中數學傳統本質不同的介紹，但注意的是，我們並無意去比較這兩種文化的優劣，套用孔恩(Thomas Kuhn)的觀點，東方與西方文化是兩種不同的典範，根本毋需費心比較。建議讀者採用互補替代的觀點，來省察這兩種不同典範所呈現的想法，進一步思考在教學上所產生的啓發。

西方數學的傳統—對証明的熱愛

西方數學傳統的本質是「証明」，這個風氣奠基於希臘人的貢獻。在現存的希臘文本中，討論數學的部份經常出現幾個字眼“epideixis”、“apodeixis”和“deiknumi”，對應於現代的英文翻譯即為 proof 或是 prove(証明)。而証明形式及方法的確立則是由歐幾里得(Euclid，西元前 3 世紀)所建構完成，並且呈現在他的著作《幾何原本》上，因此《幾何原本》的寫作形式成為後來其他數學書寫作的典範。事實上，希臘人對於數學定理証明的熱愛更勝於對定理本身所描述的事物。有個很好的例子是著名的注釋家普羅可勒斯(Proclus，西元 5 世紀)在評註歐幾里得的《幾何原本》時，有關畢氏定理的部份，他寫到“對我來說，當我讚美第一個發現這個定理事實的人時，我對《原本》的作者卻更加好奇，因為他利用一個非常容易明瞭的証明建立了它。”根據現在的文本証據顯示，畢氏定理的性質並不是由畢氏學派所發現，早在巴比倫時期它就被人發現，也被使用了好幾個世紀沒有發現任何錯誤，令普羅可勒斯驚訝的是竟然有人能証明出它永遠是對的。對普羅可勒斯來說，「証明」它的重要性遠超過對它的「發現」。

歐幾里得對西方數學傳統的影響在普羅可勒斯之後，又持續了一千五百年之久。使用孔恩的語言來說，這個時期的西方數學正被歐幾里得的《幾何原本》的典範所籠罩著。對當時的學生而言，數學就是利用少數的設準、

[1] 本文主要是根據Crristopher Cullen (倫敦大學東方與非洲研究研究所)在HPM2000 研討會的演講內容改寫而成。原文可參見Proceedings of the HPM 2000 Conference, pp18-26.

公設與定義，便能將其餘的定理逐一推衍出來(承襲歐幾里得巧妙建立証明結構的想法)。雖然我們已經不再直接學習歐幾里得的《幾何原本》，而且在幾何証明上給予更成熟精心的訓練，但歐幾里得式的論述仍然對我們的數學訓練有所影響，証明才是真正的數學，解題的能力是証明建構的訓練過程中可預期的副產品，這是今日大眾對數學的普遍印象。不信的話，可以想想費馬最後定理，儘管許多知名的數學家無法找到具體的例子來反駁它的真實性，但我們仍然是等到安德魯・懷爾斯發現了它的証明，才願意相信費馬最後定理的真實性，在數學上証明的重要性淩駕於一切事物之上的概念一直是深植於人心的。


Fermat

但是，將明確的証明當成數學不可或缺的核心可能不是教學上最理想方式。讓我們更進一步來說明，首先由孔恩的觀點談起。

孔恩對解題的觀點

孔恩的著作《科學革命的結構》初版在 1962 年問世後，遭受很大的爭論。因此在 1969 年的第二版中，他增加了一篇後記加以說明。在後記中，孔恩嘗試討論他對典範(paradigm)的概念，其中有一個很重要的看法是，孔恩將典範看成共享的範例(shared example)，因此解題(problem-solving)變得相當重要。正如孔恩所寫“科學的認知內容蘊涵在理論與規則中的這個看法，我已嚐試辯明是錯的。…在一開始，以及以後的一段時間內，做問題是在學習有關自然的重要事物。要是沒有這些範例，他先前學到的理論與定律就不會有多少經驗內涵。”[2] 讀者將發現，只要作一小小的替換，孔恩的看法也能適用於數學這一門學科上。除了對理論及定律增加更多經驗性的認識外，學生做這些範例還有其他方面的作用，孔恩寫到“學生常會說他們已經精讀教科書的某一章，但這一章末的許多問題他們解答起來仍感吃力。…學生會發現—也許透過老師的指引—將他的問題看成像是一個他以前碰到過的問題的方式，看出相似性，…，再以以前証明為有效的方式，使符號與自然產生對應關係。……通報學生觀看這個情境的蓋士塔(gestalt，也稱為知覺模式)是什麼，最後所獲得的在各種情境中看出它們彼此的相似處的能力，我認為是做完範例問題後主要收穫。不管學生是以紙筆做的，還是在設備完善的實驗室中做的。”[3] 無論從教學者或學習者的立場，應該對此一描述不感陌生才是。然而，孔恩所指出的事實，並非由歷史的角度識別出西方文化中這種教學的模式(the patterns of teaching)。

實際上，許多數學教師採用歐幾里得式的想法來看待數學—定理具有美麗與清晰的邏輯結構，並且被巧妙設計、堅固且優美的演繹推理所連接的事物。不論在幾何、代數或分析的課程上，典型作法都是如出一轍，老師在課堂上先是對一些定理小心的說明與証明，學生將它抄寫在筆記本上，接著在測驗中重現課堂上所討論的內容。學生總是被假設：如果上課能注意老師的講解，便能對上課內容

[2] 此段引用王道還等人譯的《科學革命的結構》書中的內文，第 247 頁。
[3] 此段引用王道還等人譯的《科學革命的結構》書中的內文，第 249 頁。

清楚地了解，進而能解決章末問題及老師所交付的回家作業。學生如果解不出問題，一定是不夠聰明或者是上課不夠認真聽講。在這樣的假設之下，對定理學習困難的學生將無法躍過障礙，進入自行解題的境地，從而享受做數學的樂趣。難道這是學習數學的唯一途徑嗎？事實上，中國古代的數學似乎可以提供我們解答。

一個替代性的典範—中國古代的數學

正如先前所討論希臘的數學傳統，它賦予「証明」崇高的地位，並且由極小量的基本性質當成証明的基礎來推論出其他的定理。如果以這樣的標準審視中國古代的數學，將會大失所望，到處充滿許多實例及有用的方法，卻沒有基本的邏輯証明與結構。這正是提醒各位需要注意的，別忘了孔恩說過，典範之間是沒有比較的需要。

想要了解古代中國數學的風貌，可以採取的策略相當的多，此處採用的方法是透過還原當時從事數學活動的對話加以觀察，以《周髀算經》中榮方問於陳子的一段對話爲例。[4] 《周髀算經》爲《算經十書》之一，原名周髀，算經二字是唐代才加上的。它並不是一本算學入門書，讀者被假定已經會加減乘除及龐大數字的開方。全書並沒有數學性的原理被提出，僅是一些單純的幾何測量問題，如何運用畢氏定理(即句股定理)解決，稍後會談到的《九章算術》也是類似此種問題導向的形式。但兩書不同的地方，《周髀算經》內容的第二部份“榮方問於陳子”的對話，主要是談論學習數學的方法，藉由兩人的對話，我們可以看出當時對數學本質的看法，以及該如何學習它。

對話開始是榮方聽到陳子講述周公與商高的問答[5]，便請教陳子其中道理，陳子告訴榮方其法出於算術。因此榮方回家苦思數日不得其解，再度求教於陳子，陳子認爲原因出於“子之於數未能通類，是智有所不及而神有所窮。”此處陳子所說的“類”所指涉相近的意義應是“類型”，陳子認爲學數必須通曉它的類型，方能舉一反三，推廣至各個層面，“是故能類以合類”。這樣的想法，劉徽在《九章算術注》序中也有所呼應“事類相推，各有攸歸，故枝條雖分再本幹知，發其一端而已。”[6]《九章算術》以歸納的方式將許多實際問題分爲方田、栗米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股等九章。對劉徽來說，每種事類都像樹木的枝條一樣，雖然各自分出，但卻是來自相同的樹幹，同樣的根源。因此，歐幾里得的目標是由少數的公理推導出許多的定理；

[4] 現傳的《周髀算經》分爲上、下兩卷，爲中國最早的一部有關天文與數學的著作，由東漢趙君卿作注。在天文學方面，它是蓋天說的代表；數學方面則是提出句股定理，並且趙君卿給出著名的弦圖証明。據數學史家李迪的考察，此書是經過長時間逐步充實而成，流傳於官方的一部天文曆法著作，內容依順序分成三部份，榮方問於陳子的對話則是第二部份。

[5] 此爲《周髀算經》第一部份的內容。

[6]劉徽的生平、籍貫均無可靠的記載，據郭書春的研究，劉徽約莫是魏晉南北朝時齊魯地區的人士。《九章算術》其成書作者已不可考，但《九章算術》書寫的体例及內容卻奠定中國古代數學体系的形成。《九章算術》沒有對任何的數學概念留下定義，對術文也沒有任何推導與証明，只是建構了數學知識的框架。劉徽最重要的貢獻是注解《九章算術》，爲框架填入理論基礎！

劉徽則告訴我們《九章算術》的目標是將許多的問題歸納出少數的方法。明顯地看出，這兩種數學訓練的進路(approach)是彼此不同，卻可以互補的。

結論

爲何希臘的數學作品充滿著對証明的討論，而中國古代的數學作品卻是喜歡說明如何解題呢？這個問題的答案可以從這兩種不同文化形成的社會背景來探討。在古希臘，許多的數學作品都是在同一學派的人經由廣泛的爭論(debate)所形成的。在首都雅典，人們被允許可以在公開場合發表言論，卻也得接受別人的挑戰與質疑，因此必須用証明的手法來正當化自已的觀點。當時蘇格拉底公開抨擊先前的宗教思想體系時，也曾與他所居住城市的市民有過一場公開辯論呢！在古希臘的傳統中，知識份子想要維持生計，是不能依賴政府提供工作，他必須隨時接受競爭者的挑戰，設法証明對手論述的盲點與錯誤，爲自已贏得名聲，吸引學生進入門下。[7] 在這樣的脈絡下來審視歐幾里得的作品，便不難理解爲何普羅可勒斯會認爲証明爲真比發現要來得重要。

反觀古代的中國，無論社會或政治的背景，均與古希臘截然不同。知識是不被公開討論的，只能在官方体系中以師徒關係傳承下去，數學知識當然也不例外。陳子與榮方的對話，也是老師向學生傳授知識，榮方毫無懷疑地接受陳子所說的一切，不會要求老師必須証明論述爲真。所以在對話中，陳子不曾使用「証明」的字眼，但這並不意味中國人就對証明毫無興趣，劉徽在注解《九章算術》時，就設法要說明每個問題的術文爲真的理由，只不過形式與希臘人不同罷了。在師徒授與的過程中，老師的工作主要是幫助學生學習解決問題的能力，像陳子的作法便是將解題的方法歸成「類」的概念，數學的特徵便隱涵其中。因此論述數學形式的差異深受不同的社會環境的影響。

這樣的歷史事件對今日的數學教學有什麼的幫助？它至少讓我們了解，長久以來西方數學傳統將「証明爲中心」視爲最佳的數學知識討論形式，其實是受到特殊歷史環境影響所造成。事實上，在不同的文化-政治環境的影響下，人們是會建構出不同的數學知識論述形式。因此，我們應該選擇適合學生的數學風格(mathematical style)來進行教學活動。如果學生能夠駕馭「証明-定理」，當然適用以「証明爲中心」的數學課程安排。反之，教師爲何不更弦易張，嘗試採用以解決實用問題爲主，培養解題的技能的課程呢？歷史已經提供我們答案。

參考書目

Christopher Cullen, (2000), Becoming a mathematician in East and West: some cross-cultural considerations, Proceedings of the HPM 2000 Conference, pp18-26.
王道還等譯，孔恩著(1991)：《科學革命的結構》，遠流出版事業股份有限公司。
李迪(1997)：《中國古代數學通史》上古到五代卷，江蘇教育出版社。

[7]這是Geoffrey Lloyd的觀察。

靖玉樹編勘(1994)：《中國歷代算學集成》，山東人民出版社。
郭書春匯校(1990)：《九章算術》，遼寧教育出版社。
郭書春(1995)：《古代世界數學泰斗—劉徽》，明文書局。

〝The Notion of Volume in the *Jiu Zhang Suan Shu*, and Japanese Mathematics（《九章算術》與日本數學中的體積概念）〞之內容簡介

師大數研所碩士班　陳鳳珠

作者城地　茂（JOCHI, Shigeru）在此篇論文中明白指出，傳統的中國數學中的維度概念是模糊不清的。事實上，中國最古老的數學教科書《九章算術》是利用相同的單位去測量物體的長度、面積和體積，換言之，所採用二次方、三次方或更高次方的單位之間並沒有任何差別。它所採用的基本測量單位，正是人類身體部位的長度如「尺」和「步」。

《九章算術》約成書於東漢時期（25-220 A.D.），是中國最早和最完整的數學書之一，它總結了東漢以前的中國數學知識。因此，它可作爲研究中國數學概念發展的對象，這正是作者以《九章算術》作爲研究中國體積概念的主角之緣故。於是，作者詳細探討了《九章算術》中含有的長度、面積和體積概念。《九章算術》中一維的長度單位是因應日常生活使用的需要而出現，它是依據人類身體部位的長度來定義，正如《說文解字》中所云：「尺。…周制、寸、尺、咫、尋、常、仞諸度量、皆以人之體爲法。」此外，根據《漢書．律曆志》的記載，可知漢朝和周朝的長度基本單位皆爲「尺」。至於《九章算術》中長度基本單位也是採用「尺」，其中所使用到的長度單位有「寸」、「尺」、「丈」、「步」和「里」（如下表格），甚至劉徽（3c）在注釋《九章算術》時，以「寸」爲基準將長度單位推廣到「分」、「厘」和「毫」（如下表格）。

單位	定義	備註
毫	1/1000 寸	
厘	1/100 寸	
分	1/10 寸	
寸	1/10 尺	
尺	標準	22.5 公分
丈	10 尺	
步	6 尺	
里	1800 尺	

（摘自原文 1-2 中的表一與表二）

可知，此時《九章算術》中的長度單位已是頗完整的十進位制。

《九章算術》中的面積概念則與西方相當接近。其中的面積單位是百進位制，例如：面積一百「步」（平方「步」）爲「畝」、一百「畝」爲「頃」，與長度單位看似不同，但是體積基本單位「步」（平方「步」）和長度基本單位「步」的名稱卻一樣，我們從《九章算術》中的第一章第二問：

今有田廣十二步、從十四步。問爲田幾何？

答曰：一百六十八步。

可以發現，甚至連數學家也可能被相同的單位「步」所混淆。由此可見，《九章算術》中的長度和面積的概念並沒有被清楚的區分開來。

此外，《九章算術》中體積的基本單位和長度單位也一樣是「步」。例如《九章算術》中的第四章第十九問：

今有積一百八十六萬八百六十七尺〔此所謂立方之尺也。凡物有高深。而言積、曰立方〕。問立方幾何？

答曰：一百二十三尺。

然而，比起《九章算術》中的面積和長度概念，其中的體積概念卻是比較模糊的。譬如體積一「寸」並非等於一立方「寸」或一千「分」，而是相當於一平方「尺」乘上一「寸」長。値得注意的是，雖然劉徽在《九章算術》的注釋中，已將面積和體積單位「尺」分別註解爲「平方尺」和「立方尺」，但是一直未被其他當代或後世的數學家所接受。

因此，也難怪乎中國數學家可以自在地計算不同單位的量。在《九章算術》的解題過程中，可以完全不考慮各數量的單位關係來作計算，正如《九章算術》的第六章第七問：

今有取傭負鹽二斛、行一百里與錢四十。今負鹽一斛七斗三升少半升，行八十里，問與錢幾何？

答曰：二十七錢十五分錢之十一。

術曰：置鹽二斛升數，以一百里乘之為法。以四十錢乘今負鹽升數，又以八十里乘之為實。實如法得一錢。

在這個問題裡，中國數學家同時計算長度、體積和錢數三種單位：

（40 錢 ×173 1/3 升 ×80 里）÷（200 升 ×100 里）＝27 11/15 錢

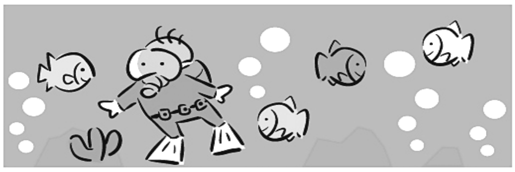
由此可以說明《九章算術》中並沒有嚴格的維度概念。

在另一方面，雖然《九章算術》約早在日本 Nara 時期（710-794 A.D.）左右已傳入，成爲當時日本官方學校的重要數學教科書之一。但是，由於後來古算書的失佚嚴重，一直要到西元 1782 年中國清代（1644-1911）的學者戴震（1724-1777）重新整理中國古算書，中國的《九章算術》才有機會再次傳入日本。然而《九章算術》的傳入對於日本數學的影響究竟如何？或許從體積概念的呈現可以得到適當的解答。事實上，日本 Edo 江戶時期（1603-1867）的學者採用體積一立方「寸」等於一千立方「分」的單位制度，顯然和《九章算術》中所採用的體積單位不同。可知，在日本 Edo 江戶時期，《九章算術》對日本數學的影響非常有限，作者認爲或許與當時的日本數學家和學者普遍無法閱讀到《九章算術》的情形有關，這

也是本篇論文的主要結論。

作者在此篇論文中詳細地分析了《九章算術》中的長度、面積和體積概念，除了與西方的維度概念作簡單的比較，並且指出其中的體積概念與日本有明顯的不同，藉此說明《九章算術》對日本Edo江戶時期的數學之影響並不大。筆者認為數學史中維度概念的發展是相當有趣的，值得做進一步的探討與分析，正如作者在文中提及《九章算術》中的面積概念和西方極為類似。若可以將中國和西方的維度概念作進一步的分析比較，相信除了可作為研究幾何概念發展的另一切入點，或許也可延伸至東西方代數概念發展的討論上，如十六世紀的法國數學家韋達（F. Vieta）符號運算的「齊次律」（law of homogeneity）和中國《數理精蘊》編者對於不同次數的項自在地進行加減運算之間的差異探討[1]。

註 1：請參考洪萬生（2000），〈數學典籍的一個數學教學的讀法：以《赤水遺珍》為例〉，《中華科技史同好》第一卷第二期，頁 35-43。



數學史、數學教育與終身學習：來自紐澳的啓示

百齡中學　唐書志老師

在千禧年這場數學史與數學教育盛會的最後一天，來自澳洲的 Gail E. FitzSimons 和來自紐西蘭的 Andy Begg 分別為數學教育裡的數學史提出不同於其他與會學者的思考路徑。當許多關心數學教育的學者從數學史中尋找數學教學的素材與靈感，報告自己在數學課堂內應用數學史或數學文本的研究和經驗，這兩位卻轉入更深一層的考量：Gail 將視野擴大，探究終身學習概念下數學史的教學地位，而 Andy 則回到根本，重新思索數學教育中引進數學史的理由與發展空間。

Gail 這篇論文名為「澳洲觀點下的終身學習與數學史」，一開始先簡介「終身學習」的概念，以及澳洲數學教育在這個概念下的發展現況，隨後根據這些概念現況與數學教育的理想，建議數學史在其間可能扮演的角色。Andy 則是在他的論文標題裡直接質問數學教育裡「為什麼有數學史？它足夠嗎？」，從「數學」、「教育」的內涵出發，賦予數學史在數學教育中的定位，並且為應用數學史於數學教育界的教師和研究者們提出一些作者認為居於關鍵的問題。乍聞之下，除了都是與「數學史」有關外，兩位學者所注意的領域並不相同，然而細讀以後，將會發現他們都企圖以「數學教育」為基準，探討引入「數學史」的「合理性」與「必要性」，而非總是「為了要數學史才引進數學史」，只不過因為依循的脈絡方向不同，才會呈現不一樣的論文主題。

在 Gail 的文章裡，「終身學習」是重要的脈絡主線。聯合國教科文組織曾經揭示如下的主張：我們有必要重新思考與拓張「終身教育」的想法－－它不僅是要能讓人適應工作本質的變化，也要能建構出一條發展人格的連續道路來，好讓

人可以發展對自我與所處環境的知覺，並且進一步鼓勵他們自己在工作與社會上扮演好社會角色。Gail 覺得，這股世界潮流意謂「義務教育」與「義務後教育（post-compulsory）」中的數學課程必須從「民族數學（ethnomathematics）」與數學史取材，而不強調傳統的數學教育方式。之所以有這個想法，乃是因為傳統課程中的數學常被看成不沾人性、亙古不移、隨時隨地可以取用，其中的歷史與文化成分雖然被拿出來說說，但總被看成聊勝於無。可是「終身學習」的世界裡，不論「彈性學習（flexible learning）」或「職場學習（workplace-based learning）」，「人」的歷史、文化、發展與主體性總是被強調出來，而以往常成為隔閡的身份、階段、與空間上的界線都顯得模糊了。要讓學習者**在數學課堂體會這些重要的轉變，學到足以應用的數學知識和數學能力**，Gail 認為「數學史」佔有相當重要的份量。

早期在澳洲談及培育基本能力的時候，除去「蒐集、分析、組織資訊」、「溝通想法和資訊」、「計畫與組織活動」、「與他人及團隊一起工作」、「使用數學想法與數學技術」、「解決問題」、「善用科技」等等核心技能外，「理解文化並且善用這種文化理解」的能力也被提出來討論，但成人教育界的數學課程仍常以實用技術掛帥，並未讓學習者從民族數學或數學史中得到文化理解的陶冶。可是澳洲「成人教育、社區教育暨進階教育委員會（The Adult, Community and Further Education Board，ACFEB）」在 1996 年的成人教育課程綱要中開始明白指出「文化理解」的重要，同時要求**成人必須使用「一種可以讓人認知數學文化與歷史源頭的方式」來學習與數有關的技能**。稍早在 1990 年由澳洲教育協會（Australian Education Council，AEC）公布的「澳洲學校數學說帖（National Statement on Mathematics for Australian Schools）」中更直接點明數學史的角色，要讓在學學生經驗數學發展的歷程，有機會探索錯誤的概念與推理、還有前人悠游於數學中的動機，以及許多想法及技巧的源頭，感受過去現在社會與文化的脈絡，滿足他們在功利與美學上的需求。換句話說，如果將「數學教育」放在「教育」與「終身學習」的大架構裡觀察，為了培育「人」的文化理解和自我發展，數學本身的歷史與文化成分當以「數學史」的形式在數學教育中起相當重要的作用。Gail 介紹了他們在澳洲的努力，但直到現在仍只是個起頭而已。

有趣的是，如果我們不將「數學教育」放入「終身學習」的大框框，而是直接了當地剖開來分析，那麼 Andy 的文章恰好讓我們有個省思「數學教育」的機會。站在「教數學」的角度，數學史可以引發學生學習數學的興趣，也讓數學更添人味，同時學生有需要知道數學這個科目所牽涉到的一切，以及數學家如何使這些數學技能發揮功用，才能培養觀照全體的能力，數學史在此提供了一條不錯的路。不過話說回來，Andy 也在此處給了這樣的一些問題：我們究竟希望學生學到有什麼內容的數學？想讓數學增添的是西洋味兒還是本土味兒？所要利用的數學史是男人觀點的歷史還是女性觀點的歷史？甚至有些地方的數學從未獨立出來教授，那麼我們又能夠做些什麼呢？

Andy Begg 注意到，時下討論數學教育的論述中，「製造連結（making connections）」是個常常聽到的詞彙。他認爲這個詞彙的意義應該包含好幾類向度：既是學科內各部分間的連結，也是同學科外其他科目的連結，既是和日常生活的連結，也是和將來可能遭遇工作的連結，既是與學生自己先備知識的連結，也是與他們所處歷史、文化脈絡的連結。在他看來，這些部分正是數學史會遇到的。當教師透過有趣的歷史敘述爲數學教材「製造連結」，便是爲這個科目擴充或增添了額外的向度和人情味。Andy 將這些連結甚廣的課程，統稱爲「整體課程（holistic curriculum）」。

藉由學習理論（主要是 enactivism）的探討，Andy 指出數學學科、日常生活和文化、歷史間的「連結」本就是自然「存在」而非刻意「製造」出來的。一旦我們體認到教師與學生正在共同參與這些「連結」和「脈絡」，那麼究竟是要教授西方的數學還是多元文化觀點下的數學，要教授學生傳統學術性的數學成果還是爲學習者呈現數學活動的各個層面，端視我們心目中「知道（knowing）」與「學習（learning）」的定義是什麼，我們想要在學校教的是什麼，以及我們準備怎麼引用歷史而定。「整體課程」的觀點便是爲了讓我們重新思考目前的處境與往後的發展，進而透過「大處著眼，小處著手（think globally, act locally）」的原則，回應當下數學教育面臨的各種挑戰。僅僅「教數學史」並不夠，背後的思考路徑和更多的省思才足以影響數學與數學教育發展的方向。

就文意來看，Gail 和 Andy 的這兩篇文章都沒有完足，讓人在讀完後仍感到意猶未竟。筆者就覺得 Gail 的文章裡常常有一股想要細說從頭的衝動，想告訴你「終身學習」的意義，想告訴你這幾年澳洲制度的演變及理由，Andy 的文章則不時提出問題要讀者思索，答案卻彷佛一直藏在雲深不知處。

其實，再想一想就會發現這些是有道理的。終身學習理論的形成並沒有多久，數學教育爲世界所重視也是最近的事。如果我們**相信數學教育的功能絕對不僅止於培育數學家**，看出參與數學學習課程的人**來自四面八方、帶有各種文化淵源**（當然這些人又都是獨一無二地重要），而我們又總是期望受過數學教育的學生能夠**在不斷變動的未來善用數學技能與素養**，那麼我們將會同意：創造一個適合人們不斷進行終身學習的數學學習環境是必要的，培養人們足夠在往後生活中學習數學的基本能力與興趣是必要的，進而要求人們可以理解和包容不同脈絡下的數學觀點與數學表現，以期維護數學和社會文化的生命力也是必要的。如此一來，在數學課堂中所展現的教材與教學技能才有可能因爲教師的信念產生一定的「正確力量」。這種從對數學教育的「心」或是「哲學觀」所產生的影響，將具體表現在學生的學習成果上。Gail 要細說從頭，正是因爲「終身學習」已然成爲教育思潮的主流，而數學教育又是所有教育中的重要部分；但終身學習理論的發展迄今不超過半世紀，且一開始所圍繞的主體大都是在職成人，這些恰恰爲數學教育界較少關注的部分。「爲何」以及「如何」將終身學習的理想，結合數學教育的理論、實務，算是一門剛起步的學問，Gail 自然要用不少篇幅讓讀者概略認識一下談論的背景。筆者更猜想 Andy 是因爲體認到「哲學觀」的影響深遠，才

努力提醒各位讀者必須不斷質問自己問題，畢竟一條思路不見得就適合每個數學學習環境，兩位學者也自認文章中的論述仍有繼續發展的空間。

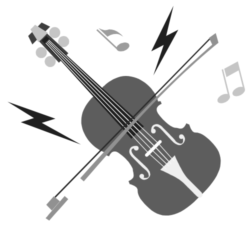
有意思的是兩位學者的想法中，數學史正好在探討終身教育與數學教育的連結、以及探問數學教育需要什麼、可以怎麼發展的狀況裡居於樞紐位置。假如暫且拋開哪些歷史題材可以運用的問題，數學史所象徵的人文精神和學習研究模式，似乎恰好承擔了凸顯數學教育所處脈絡的角色。筆者建議，數學教育工作者可以考慮在從歷史尋找教學素材靈感的同時，也繼續本著關懷歷史、尊重歷史與開創歷史的心，面對數學教育中的「人」（例如學生和教師同仁），在致力教學之餘，也依循必要的脈絡參酌其他領域的研究所得（像是數學學習心理學或終身學習理論），思索數學教育之所從來與何所去。

參考文獻：

Begg, Andy. (2000): History of mathematics: why, and is that enough? In *Proceeding of the HPM 2000 Conference, History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium*. Taipei: NTNU.

FitzSimons, E. Gail. (2000): Lifelong Learning and the History of Mathematics: A Australian Perspective. In *Proceeding of the HPM 2000 Conference, History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium*. Taipei: NTNU.

唐書志與謝豐瑞（2000）：高職補校學生的數學印象－從文本到模型。In *Proceeding of the HPM 2000 Conference, History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium* 。Taipei: NTNU。



HPM 2000 論文發表觀後感

論文發表者： Oscar Joao abdounur（University of Sao Paulo, Brazil）

講題：*Theories of ration and theoretical music: an education approach*

台灣師大數學系助教 謝佳叡

不可否認的，這場論文發表是整個研討會最受歡迎的演講之一。除了講題本身具有高度的吸引力外，來自巴西的年輕學者 Oscar 其全身散發南美洲的熱情與風趣隨性的相處方式，早已在論文發表前為他招攬了不少聽眾。而 Oscar 充滿『活力』的演講更沒有讓在場的聽眾失望，極其豐富的投影片資料、緊湊的演說（配合葡萄牙語調的英文）、生動的肢體表現、各式各樣的樂器（南胡、鍵盤樂器、排笛，甚至不同水位的玻璃杯也派上用場），實際展示比例和音樂理論之間的關係，加上具有『表演』天份的他，整場半個多小時的演說絲毫沒有冷場，讓聽眾直呼過癮。

這篇論文將主要的焦點置於比(ratio)、比例(proportions)及音樂理論三者之間

的交互關係，以另一個不同的觀點---教育觀---作爲研究的方向。將數學與音樂兩者緊密相繫可遠溯至古希臘畢達哥拉斯學派，畢達哥拉斯這個希臘哲學家兼數學家用數學方法研究音階的定義法則，找出了音樂史上影響深遠的「五度相生律」，延續至中世紀之前的近兩千年，不少學者都曾爲兩個學門之間相輔相成的絕妙關係做出了貢獻，如阿基塔斯（Archytas，400-365 B.C.）、伊拉托斯瑞那斯(Eratosthenes 276-195 B.C.)、托勒密（Ptolemy ？－168）、尼克馬庫斯（Nichomachus 約紀元後 100 年）（進一步的資料可參閱 HPM 通訊第二卷第八、九期『音樂中的數學』一文），然而這段時間大多是站在算術（arithmetic）的角度，亦即探討音樂理論和『整數比』（離散本質）之間的關係。進入文藝復興時期後有了重大的改變，音樂與幾何（連續本質）有了關連，使得音樂上也有了驚人的發展，甚至到了１８世紀，振動弦（vibrating string）所引發的問題更帶來數學界無限的活力，如偏微分方程、富立葉級數、集合導論等。

然而，在教育脈絡下，這兩個學門卻行同陌路。數學教材中看不到音樂的影子，音樂課中（樂理課程）也不太有人願意加入數學材料，深怕與數學沾上邊而被『拖累』了，而這篇報告要做的正是在課堂中將兩個科目在選定的單元中合而爲一。

在數學教科書中，『$a:b$』、『$\frac{a}{b}$』、『$a \div b$』之間的相等關係，以顯然且直接方式呈現給學生，他們認爲 9：12＝12：16 是自然且天經地義的。接受了這個如同定義一般的概念後，要如何才能讓他們體會，在歷史上有多麼長的一段時間裡，『相等（equal）』和『等同（is as）』或『有相同比（in the same ratio）』是分的很清楚的？（當然了，如果你不認爲有必要讓學生知道這兩個的區別就另當別論了）Oscar 認爲藉由音樂的音程來重新認識『同一（identity）』和『成比例（proportional）』是一個很好的方法。例如 9：12 和 12：16 在音程上皆屬四度（如『Do-Fa』和『Fa-Si』），在數學上也都等於 3：4，但學生可以直接聽出這兩個四度並不『相同』而只是有『相同比』，這是一種實際且有感覺的方法。

『比的合成』在這樣的活動下也是自然且富有意義的。一個五度音程（2：3），再往上一個四度音程（3：4）正是一個八度音程（1：2），

$$(\mathbf{2:3})(\mathbf{3:4}) :: (\mathbf{1:2})$$

這從音樂的角度來看是多麼的自然。至於數學脈絡下則必須轉換成 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 或者 a:b=2:3, b:c=3:4, a:c=…。但對於前者必須留意，合成（compounding）和乘積（multiplication）是不相同的；而後者的透過連比例運算又顯得不夠直接，當然感受也比不上直接操作來得深。

如何將這兩個題材設計成有趣的教學活動？論文中提供的一個範例。

- 先簡單介紹古希臘關於所發現的一些簡單的比例所產生的基本音程的故事。
- 給定一條調好音高的單弦（如 Do），長度為 L（製作實物），問學生要發出高八度的音，弦長為多少？請學生動手操作，並配合鋼琴（或其他

樂器如 Keyboard）確定答案。

- 要發出五度音（Sol）又是多長？ 四度後再四度又是多長？ 並與鋼琴上的音做驗證。
- 反之，長為 M 的弦，則 $\frac{2}{3}$M 與原來產生幾度音程？與鋼琴的音做對照。
- 再延伸，$\frac{32}{27}$ M 是哪一個音？
- 某弦長未知，告訴學生其四度音程長，讓他們找出原長，並與鋼琴的音做比較。

這些活動都是可以實際操作的。Oscar 對實際巴西 11-14 歲孩童進行如此的教學，發現不但喚起了學生們的好奇心， 也通時間試探了學生音樂或數學的天賦，學生也有可能從原本只對其中一科有興趣而激起對另一科的學習意願，無論對於音樂課或數學課都有正面的效果。利用計算或找尋音程來解決上列問題的機會，不但可以實際經驗比、及比的合成運作，也可以更貼近歷史，動手操作古希臘即發現的數學事件，使得數學史真正融入課堂中。

此外，從其他領域的旁敲側擊或許能提供一些當時代的數學知識背景。Oscar 就指出，在《幾何原本》第五卷定義 9、10 關於二次比（duplicate ratio）和三次比（triplicate ratio）就是討論 a:b 和 b:c 成為 a:c 的比的合成，這種前一個比的後項必須和後一個比的前項相等，從數學的觀點來看是沒有必要的，而但如果從音樂的觀點來看便可得到理解。

最令人印象深刻的，是 Oscar 將音程和『對數』做一個連結。對數的一個很重要的功能是將乘除運算降爲加減運算，這大大減輕了一些繁複的運算。從字源學上看，logarithm（對數）是 logos [ratio]+ ariqmos [number]兩字合成的，可見對數和比是脫不開關係的。以往對數的教法都依隨於指數（律），而文章中利用音程來說明倒是筆者頭一次見到。冪次的增加可視爲比的連續合成，而比的連續合成又是音程上的疊合，舉一個簡單的例子，一個音每高四度弦長就會是原來的$\frac{3}{4}$倍（幾何級數），但在鋼琴鍵上固定往上移動六個鍵（半音），這是等差級數增加。也就是說這種對數的實作，可以在音樂上得到實踐。

筆者認爲，本報告最大的意義，在於 Oscar 能從其他領域與數學在實際教學上做一連結，爲多學門合作的實踐又添一例，你或許不一定也能在音樂上做到如此駕輕就熟的地步，但相信每個教師都有其專長處（筆者曾私下問 Oscar，他也不會演奏任何樂器），如去細思，何處不是教材？這種精神才真正是值得我們效法之處。

1. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。爲編輯方便，投稿請在 2000 字以內，並以電腦打字，將檔案磁片郵寄至：台北市健康路西松高中蘇惠玉收；或e-mail至：suhy@hp715.math.ntnu.edu.tw