HPM通訊

第三卷 六、七期合刊 目錄（2000年6月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）
編輯小組：林榮生（西松高中） 黃振順（西松高中） 蘇意雯（成功高中）
謝新傳（五常國中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（竹北高中）
林倉億（台師大數學系研究生）陳鳳珠（台師大數學系研究生）
謝佳叡（台灣師大數學系）
北縣聯絡員：謝佩翰 （安溪國中） 中區聯絡員：顏富明（員林國中）
南區聯絡員：廖惠儀（高市大仁國中）
贊助單位：行政院國科會 西松高中教師會 彭婉如文教基金會
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

數學教育新思潮

如何詮釋數學文本？

台師大數學系 洪萬生教授

在「數學史」課堂上，如何在第一手文獻（或原典）(primary source)與第二手文獻(secondary source)之間取得平衡，應該是嚴肅地對待數學史教學的教師，都必須好好地考量的問題。這幾天才收到「加拿大數學史與數學哲學學會」(Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics，CSHPM)寄來的《論文彙編》(Proceedings) 第十二卷，其中有一篇由 Duncan J. Melville 所寫的〈在數學史課堂上詮釋文本〉(Interpreting Texts in a History of Mathematics Class)，就談到這個問題，我們且看他怎麼說！

首先，Melville 指出：在北美洲的大學數學系中，數學史課程多半在大三或大四開授，此時，由於學生大都擁有了相當成熟的數學訓練，因此，課程所涵蓋的時間軸至少可以上下縱橫五千年。不過，學生熟悉現代數學領域中的解題技巧與理論建構之後，對於十九世紀之後的數學發展，固然比較容易入手，但也由於專業技能的訓練過程中，邏輯嚴密規格的刻意講求，所以，他們所能想像的數學之歷史風貌，大概是傑出數學家一棒接一棒的累積過程。如此一來，每一代的「數學史學」(historiography of mathematics)，就只不過是為偉大數學家不朽貢獻，撰寫一些具有當代頌辭特色的注腳罷了。

以上這一種「歷史」，專業數學史家當然期期以為不可！可惜，受限於篇幅，我無法在此重複他們的論點。但是，有關數學史家如何看待過去的數學發展，讀者不妨參考道本周 (Joseph Dauben) 的“Mathematics: An Historian Perspective”或拙文〈數學家書寫歷史－兼評 John Stillwell 的《數學與它的歷史》〉。無論如何，「數學史家」涉及數學知識的成長或改變，所以，「數學」當然是史家專業研究的一個必須跨過的門檻。事實上，正 Melville 所強調的，要想在數學史課堂中同時納入「有意義的數學」(significant mathematics)與「有意義的歷史」(significant history)，的確不是一件容易的事情。在他的數學史課堂上，為了讓「有意義的歷史」也有現身的機會，Melville 特別以巴比倫“Plimpton 322”楔形泥版此一文本

的詮釋爲例，指出不同史家所提供的互異說明，都可望豐富我們對過去的了解，儘管此一所謂「真相」，總是隨著文本的不同詮釋而改變。

普林頓 322 是從市集購得的泥版文書，因曾被一個叫普林頓（G. A. Plimpton）的人收藏而得名（322 為其收藏編號）。現存於美國哥倫比亞大學圖書館。
普林頓 322 是一塊更大泥版文書的右半部份，其左邊緣斷裂處有現代膠水痕跡，說明缺損的左半部份是出土後遺失。現存部份長 12.7mm，寬 8.8mm，上面記載的文字屬於古巴比倫語，因此其年代當在公元前 1600 年以前。

Melville 的教學策略，是提供關於此一泥版的二手文獻，讓學生暴露在史家對它的不同「解讀」/「意義賦予」。這些文獻分別是 O. Neugebauer 與 A. Sachs 的“Mathematical Cuneiform Texts”(1945)；E. M. Bruins 的“On Plimpton 322: Pythagorean numbers in Babylonian mathematics”(1949) 與“Pythagorean triads in Babylonian mathematics; the errors on Plimpton 322”(1955)；D. J. de Solla Price 的“The Babylonian ‘Pythagorean Triangle’ tablet”(1964-65)；R. C. Buck 的“Sherlock Holmes in Babylon”(1980)； O. Schmidt 的“On Plimpton 322. Pythagorean numbers in Babylonian mathematics”(1980)；J. Friberg 的“Methods and traditions of Babylonian mathematics”(1981)等等。在上述這些論文中，Neugebauer 與 Sachs 認爲此一泥版呈現了部份的畢氏三數組（此一文本有十五列六十進位數碼），並且相信它是純數論性格的一個文本。Bruins 基本上認同前者的觀點，不同的是，他認爲泥版應該由右至左來解讀，而非由左至右，如此看來，此一文本看起來應該完好無缺。相反地，Price 認爲此一泥版殘缺不全，只是原有的三分之二，至於其製作目的，則是爲了測量用途，而非原先被認定純數論旨趣。

上述爭論停格在二十世紀六十年代。到了八十年代，才又有出人意表的發展。先是 Schmidt 經過文本的另一種「解讀」/「重建」，認定此一泥版與直角三角形無關，而是一張倒數表 (table of reciprocals)。緊接著，醉心於「數學考古學」(archaeology of mathematics)的 Buck 以巴比倫的福爾摩斯(Sherlock Holmes in Babylon)自居，在重建「現場」的同時，也向我們指點 Neugebauer 與 Sachs 如何得到他們的結論。而在提出他自己的結論時，Schmidt 附和 Bruins 的觀點，亦即此一泥版無關畢氏三數組或三角學，反倒可能是當時一種教學工具，幫助教師來設計二次方程習題。此一作爲『教學輔助』之觀點，立即獲得了 Friberg 的迴響，只不過，他相信此一泥版作者的主要目的，在於設計 / 求解與直角三角形有關的二次方程問題。

從數學史研究的觀點來看，文本的詮釋並不見得都是如此多姿多彩。不過，

通過數學文本的幾種相互矛盾解釋，的確可以啓發學生領悟數學知識成長的複雜風貌，從而賦予數學知識活動的人文意義。誠然，Melville 在他的論文中所揭示的數學史教學活動，爲我們提供了這一種可能性。只是成效如何，我們倒是非常樂意瞭解，可惜作者並未進一步說明。

參考資料

洪萬生，2000，〈數學家書寫歷史：兼評 John Stillwell 的《數學與它的歷史》〉，預定《數學傳播》刊出。

洪萬生 (待定稿).〈數學典籍的一個數學教學的讀法：以《赤水遺珍》爲例〉。

Bunt, Lucas N. H., Phillip S. Jones, Jack D. Bedient , 1988, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, INC.

Dauben, Joseph , 1993, "Mathematics: An Historian's Perspective", *Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal* 2(1): 1-21.

Horng, Wann-Sheng (submitted). "Reading into Mathematical Texts: A multicultural perspective".

Tattersall, J. J.ed., 1999, *Proceedings of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics*. Vol. 12. Toronto: University of Toronto.

數學之美-淺論美學與數學美學

師大數學系研究生　黃哲男

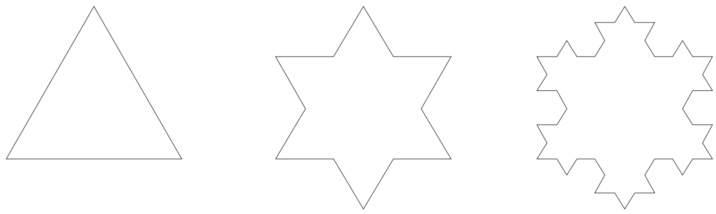
現在也許很難以找到一個受過教育的人，對於數學美的魅力全然無動於衷。數學美可能很難定義，但它的確是一種真實的美，和任何其他的美一樣。

—Hardy《一個數學家的辯白》

筆者進入大學數學系就讀以前，雖對數學有興趣，但興趣的來源卻不是對數學本體的喜好，而是在獲得高分之後的喜悅。也許是上天有意安排，筆者對於數學的另一種觀點乃是在大學聯考時所獲致。

民國 84 年大學聯考，有一個題目如下：

設$T_1 , T_2 , T_3 , \cdots$爲一群多邊形，其作法如下：T_1爲邊長等於 1 之正多邊形；以T_n每一邊中間三分之一的線段爲一邊向外做正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得到的多邊形爲T_{n+1}，其中$n = 1 , 2 , 3 , \cdots$（如圖所示），令a_n表T_n的周長，請計算T_3之面積及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$之和。

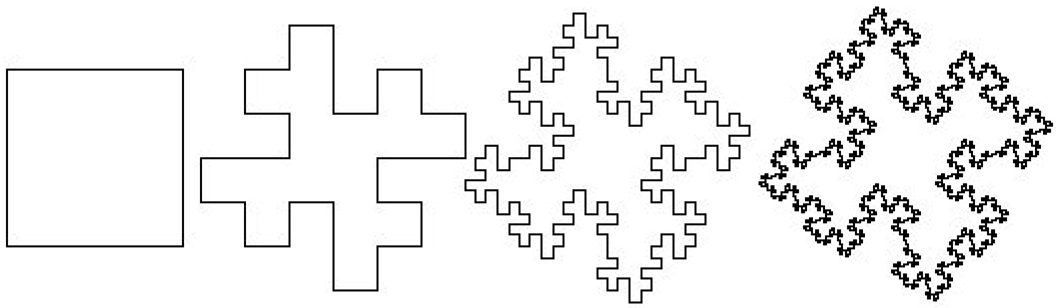


T_1 T_2 T_3

還記得當年筆者在考場中非常的掙扎，倒不是這題很難，而是筆者發現了一件事：a_n 為一等比數列，且公比大於 1，也就是說 T_∞ 的周長為無限大，但是面積卻是有限的（因為 T_∞ 始終比考卷小，而考卷的面積卻可以由長乘以寬計算而得）。

在理智上，筆者可以算出答案，但在情感上筆者卻是感到恐懼的，因為在過去的經驗中從來沒有遇過一種多邊形具有如此怪異的特性，經過兩次計算確定答案無誤之後，理智還是戰勝了情感，戰戰兢兢地把答案寫在卷子上。

後來在大二學到 Cantor 集以及其相關性質時，這段陳年往事又浮上心頭，於是便找了一些有關於碎形的書籍來研讀，不過這次沒有答對答錯的壓力，對於這樣的圖像不再感到恐懼，反而是一種讚嘆，對數學形式與力量的讚嘆！



（請讀者自行驗證上面四個圖形的面積與周長，並觀察其有何異同）

由於以上的這些經驗，筆者認為數學是美的；相信大部分數學的愛好者也都有類似的感受，但到底什麼是美的？什麼樣的條件下才是美的？要回答這些問題非得回顧數學發展史不可。本文先簡單介紹「美學」及「數學美學」，未來在一系列的文章中將從數學史以及一些初等的數學問題給予「數學之美」簡單的概述。

一、美

什麼是美？這個問題的答案會隨著文化、時代以及個體的解釋不同而不同，很難如數學定義一樣非常的明確。人類社會發展到一定階段，開始披樹葉遮羞、圍獸皮禦寒，以獸牙、貝殼、石子等製造珠串裝飾自己，以壁畫、雕像、舞蹈、音樂等活動娛樂自己的時候，美的觀念就已經開始萌芽了。

進入文明時期之後，世界上的幾個文明都各自發展出其對於「美」的看法；例如在中國春秋諸子百家爭鳴的時代，老子便認為「天下皆知美之為美，斯惡已」，其把美與醜看做對立且互相依存、互相轉化。孔子則認為美與善密切相關但有差別，如「子謂韶盡美矣，又盡善也。謂武盡美矣，未盡善也」。

在西方，美則是古希臘人心靈的外化，是希臘文化精神的結晶。蘇格拉底以

功用爲標準，認爲美與善是統一的，而藝術只不過是模仿美的形象與美的性格。柏拉圖則不同意美是有用、美是恰當、美是快感等說法，其認爲美是超現實的理想，萬物僅是其影子，而藝術則是其影子的影子。亞里斯多德則認爲美的主要形式乃是秩序、對稱與明確；客觀事物的美不美，端視其所構成的元素是否結合成和諧、對稱的統一體；由於亞里斯多德對於「美」的諸多論述，因此其被後人稱爲歐洲美學思想的奠基人。

美的概念隨著時代的演進有很大的改變，本文將不對其作深入的討論。一般而言，較爲通俗且被較多數人所接受的看法是：美乃是人或事物中所引起感官愉悅感受並且提高心靈或精神的某種特質，或這些特質的集合。

二、美學

雖然美的概念很早就被提出來討論，但其內容往往與哲學、政治、宗教、道德、藝術等混雜在一起，沒有成爲獨立的一門學科，真正使其成爲獨立的一門學科是十八世紀德國的 Alexander Baumgarten (1714-1762)。

Baumgarten 是萊布尼茲傳人 Wolff 的大弟子，思想上屬於德國的理性主義派。萊布尼茲曾把人的知識領域分成理性與感性兩種，並且把對美的鑑賞歸於後者。理性的知識與感性的知識至少有三點不同：(1)理性知識的對象是普遍、抽象的概念，而感性知識的對象是特殊、具體的事物；(2)理性的知識是比較高級，感性的知識是比較原始的；(3)理性的知識是清楚(clear)與明白的(distinct)，感性的知識雖可清楚，但卻不是明白的(indistinct)。

在 Baumgarten 之前，理性主義者所謂的邏輯學乃是對理性知識研究的學門，而 Baumgarten 的貢獻便是指出應有一獨立的學問來研究感性知識。

1735 年，Baumgarten 發表了一篇拉丁語學位論文《Philosophical Thoughts on Matters Connected with Poetry》(《關於詩歌某些問題的哲學思考》)，首次使用 Aesthetic 這個字，並且建議以其來稱呼感性知識的學問。1750 年，Baumgarten 出版了《Aesthetik》一書，這是世界上第一本以「美學」爲名稱的著作。在該書中，Baumgarten 對美學作了以下三個界定：

1. 美學是研究美的藝術之理論(theory of fine art)；
2. 美學是研究較低或感性知識的學問；
3. 美學是研究完滿地運用感性知識的學問，而感性知識完滿狀態的對象就是美的對象，所以美學便以研究美爲其目的。

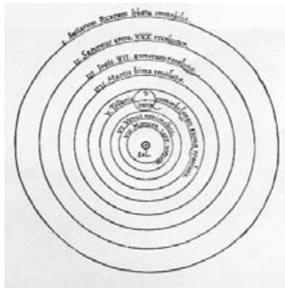
由於 Baumgarten 的特殊貢獻，於是後人便稱其爲「美學之父」，在其之後對美學發展作過貢獻的人很多，例如康德在《判斷與批評》這本著作中，便以哲學的觀點闡述美學是關於美的科學，使美學有了嚴謹的理論型態；另外，黑格爾也在其多卷本的《美學》巨著中，把歷史方法與邏輯方法結合起來，進一步地建構了美學的哲學體系。

現今英文以 Aesthetics 表示美學，這個字來源於希臘文，原意是憑感覺去認知，具有直覺的意思，並不等同於英文中的 science of beauty，翻譯成美學在中文中是一種約定成俗的用法，事實上其在康德哲學中指的是觀念法則，爲認識論中

的一部份，因此譯成審美學可能會更恰當一點。另外值得注意的是，美學並非單單指對藝術品或自然界物體的價值判斷，事實上美學乃是哲學中的一個部門（例如 Baumgarten 便把美學與邏輯看做是哲學的兩個部門），不但研究客體（如美的本質、美的型態）、也研究每個主體（如美的感受及其心理過程等），更研究主客體之間的關係（如美的創造過程、美的追求等）；因此美學作爲一門課程時，往往設在哲學系中，被當作認識論與價值論的一部份來看待。

三、數學美學

談到數學美學，就不能不回溯至古希臘時期：希臘文化的根本就是人與宇宙、人與社會的和諧，和諧的光芒照耀著整個希臘藝術。畢達哥拉斯提出「美就是和諧」，正是這種藝術精神的理論概括；也許是受了這種觀念的影響，希臘數學家在某種形式上亦是美學家，他們在整理和研究數學問題時，同時候受到美學觀點的影響，例如亞里斯多德便認爲「美的主要形式爲〝秩序、對稱與明確〞……又因爲這些形式顯然是許多事物的原因，數理諸學自然也必須研究以美學爲目的的這一類因果原因」。



受到希臘數學家的影響，其後的數學家在研究數學問題時，皆會情不自禁地以「美」的標準來衡量，例如 1542 年，哥白尼出版了《天體運行論》，在該書首篇寫道：「在哺育人的天賦才智的多種多樣的科學和藝術中，我認爲首先應該用全部精力來研究哪些與最美的事物有關的東西。」，另外他還提到：「太陽在萬物中的中心統馭著，在這座最美的神廟裡，還有什麼更好的地點能安置這個發光體，使它能一下子照亮整個宇宙呢？……我們就是在這種佈局裡發現世界有一種美妙的和諧，亦即運行軌道與軌道大小之間的一種經常的和諧關係，而這是無法用別的方式發現的。」由哥白尼的講法來看，便可瞭解在觀察數據與其理論不完全吻合的時候，爲什麼他還能對日心說那麼地有信心的理由了。

類似的事件在歷史上不斷的重演，例如愛因斯坦便曾經問海森堡：「爲什麼這麼多關鍵問題還沒有完全解決的時候，你能夠對自己的理論具有那麼大的信心呢？」海森堡的回答是：「就如同你一樣，我相信自然規律的簡單性具有一種客觀的特徵，它並非是思維經濟的結果。如果自然界把我們引向極其簡單而美麗的數學形式一我所說的形式是指假設、公理等貫徹一致的體會一引向前人所未見過的形式，我們就不得不認爲這些形式是真的，認爲它們是顯示出自然界的真正特徵。」

美麗的形式會影響人的選擇，數學抑或是其他自然科學皆是如此！

回顧 Baumgarten 對美學的界定，本質上屬於理性知識的數學便被認爲與美學完全無關，可是有如此多的數學家曾經讚嘆過數學的美，這又該如何解釋呢？理性知識就不會有美的感受嗎？關於第二個問題，也許龐加萊的一段話可以當作簡單的答案：「野蠻人愛好刺眼的顏色和聒耳的鼓聲，這只能充塞他們的感官，而希臘人則愛好潛藏在感性美之後的理性美，這種理性美使理性變得可靠、有力。」筆者相信幾乎所有的數學家與龐加萊所言的希臘人一樣，當欣賞到隱藏在數學客

體背後的形式以及經過一番論證從而提升自我信心的那種愉悅感時，數學美便油然而生！而這便可當作第一個問題的解釋吧。

如同美與美學一般，欲對數學美學下一個簡短易懂的定義是很難的一件事，不過由於筆者的數學背景作祟，因此筆者還是斗膽地給了一個看法：

數學美既不純粹是外部自然的客觀存在，也不純粹是主體內部的主觀狀態，它起源於數學思維對自然規律的洞悉與領悟，表現於主體情感上的某種愉悅和快意。同時，由於感官僅能認識事物的表象或外表，只有理性才能把握自然界或理想界的內在規律，因而實質上數學美是一種理性美，而數學美學即是探討此種理性美的學門。

由於數學美學的內容廣博浩大且礙於筆者的學識淺薄，因此在未來的一系列文章中，筆者將僅從數學事件的歷史演變以及一些有名的數學問題給予「數學之美」簡單的概述。

最後筆者引用羅素的一段話來結束本文：

數學，如果正確地看它，不但擁有真理，而且也具有至高的美，正像雕像的美，是一種冷而嚴肅的美，這種美不是投合我們天性微弱的方面，這種美沒有繪畫或音樂的那些華麗裝飾，它可以純淨到崇高的地步，能夠達到只有最偉大的藝術才能顯示的那種嚴格完美的境地。

註：筆者乃是美學與數學美學的門外漢，本文的許多內容乃是整理自下列參考書目。文中若有不足或謬誤之處，乃是筆者學識不足所致，尚乞各方先進指正。

參考資料

劉昌元，1989，《西方美學導論》。台北：聯經。

鄭松生、陳惠珍，1994，《美學漫談》。台北：花田。

T. Munro 著，安宗昇譯，1987，《走向科學的美學》。台北：五洲。

徐炎章等，1998，《數學美學思想史》。台北：曉園。

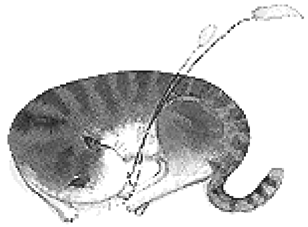
汪信硯，1994，《科學美學》。台北：淑馨。

M. Kline 著，張祖貴譯，1995，《西方文化中的數學》。台北：九章。

歐陽絳，1996，《數學的藝術》。台北：九章。

M. Kline 著，林炎全等譯，1991，《數學史-數學思想的發展（上冊）》。台北：九章。

鄧東皋等編，1994，《數學與文化》。新竹：凡異。



Math & Poetry—數學與詩

北縣福和國中 陳昭蓉老師翻譯整理

繼上期中眾人對 Weirstrass 的話語各有解釋而引發的討論，這一期當中我們再來看看更多想法與意見，不論是針對數學、詩文或是二者的關聯，或是對於數學家與詩人的關係，都有精采的討論。

Robert Tragesser----

在文藝復興後期，凡受過良好教育的人必定都曾學習如何譜寫精緻優雅的詩文，如何欣賞淬鍊而出的篇章；而詩作的邏輯嚴謹，往往遠勝於數學的合理。

在他們的邏輯課程中引用大量的詩文作為典範，展露詩篇感性曲線下的理性架構；詩人們其實是文句優美、字字珠璣的數學家。透過各種資料的研究，我們足以相信在這時期中，詩的藝術呈現出比數學更精細更完整的合理性與邏輯性。詩人藉由其作品將自身的感性想像與理性思考細密交織，這樣的呈現方式也對日後數學思想的發展有極大的助益。

Michele Fanelli----

對於數學與詩文的關係，除了上面提到的之外，我還想提供另一個不同的觀點。事實上除了大家討論到的思考模式上的相似，也有一些詩人在他們的文學創作中引用了數學或物理的觀念，因而詩中包含著數學物理，數學物理也融入其詩作之中。

最近由於翻譯了但丁(1265-1321)的不朽之作「神曲」(Divina Commedia)，我有十足的把握告訴大家，在這部作品中他至少提到下列幾個數學概念：

----沒有任何三角形可以同時有兩個鈍角

----一個直角三角形恰可對應一個外接半圓

----三角形的內角和恰與兩個直角的和相等

----一個圓的圓周長與其半徑的比並非有理數

----光線的反射具有入射角等於反射角的特性

我無法一一指出這些概念分別在哪些章節被提到，但是絕對是有被寫到的。事實上連相對運動的概念都有呢！在但丁描述自己筆直落下墜入黑暗地獄的時候，他如是寫到：「若不是空氣自下方吹擊我的臉龐，我必定察覺不出自己正在往下。」

但丁之所以能將文學創作與數理概念作完美的結合，我想應當歸功於當時的教育。在當時，數學與幾何學也被歸類為通識教育，和文法、修辭學等人文學科是一起的，而不是分屬兩個毫不相干的體系。

Fernando Gouvea-----

在美國物理學刊第 47 期中，物理學者Mark Peterson曾有一篇論文討論到但丁的作品中的物理概念。這篇名為「但丁與三度球」的文章中他提到，但丁的作品中認為宇宙乃是一個三度空間的球體。Mark Peterson也特別在著作「但丁與物

理」一書中指出，但丁的確是個思想走在尖端的作家，其對宇宙萬物的觀察更是細微深入，是自然世界的優秀觀察家。

眾所皆知的大科學家與數學家牛頓也是如此，他的許多著作中同樣有許多以詩的形式闡述的數學概念，充滿創造力且蘊含對天地萬物與自然定律的敬畏。

Antreas P. Hatzipolakis-----

我提供一個知名數學家的小小插曲：一個學生上了幾堂他的課之後，就在也沒有出現，轉而寫起詩當起詩人來。這名數學家聽到消息後就說：「他的想像力的確是不足以勝任數學家的工作，當個詩人倒是還可以。」

在他的話中我們可以發現這樣的不等式：數學家的想像力大於詩人的想像力。另一名數學家也有相似的見解，他說：「數學科學中展現的想像力令人讚嘆驚喜；阿基米德的想像力遠勝於大詩人荷馬。」

(待續)

回應

「最美的數學式」讀後感

台師大教學碩士班 陳啟文老師

數學是人類思考活動的產物，不管它是為了解決社會需要，(例如: 曆法的計算、橋樑、教堂、宮殿的建設…等)或是純思維的智力挑戰，它的想像以及直覺給了創造者高度的美學滿足。若是把科學現象以細密的數學語言或符號來詮釋，那麼「數學公式會告訴你發生了什麼而沒說為什麼」。(洪萬生 1999 , p113)
「如果美的組成和藝術作品的特徵包括洞察力和想像力、對稱性和比例、簡潔，以及精確地適應達到目的的手段，那麼數學就是一門具有特殊完美性的藝術」(張祖貴 1995, p4)

作者師大數學系助教謝佳叡在《HPM》第三卷第四期所做的「最美的數學式」問卷調查一文，著實讓我們執教鞭已久之士，又多了項茶餘飯後的話題。作者雖一再自謙地表示該問卷的選項設計,「設計者個人偏好之融入是無法避免的」、「不少受試者反應選項的同質性還是過高…當初始料未及..」等云云，但我個人以為，其目的若是藉此概略地了解數學系學生的看法，並讓讀者在教學之餘，對數學公式再做省思與回味，上述的顧慮自然是多餘的！試想那一篇研究專題、報告不也是或多或少摻入個人所好或見解? 而數學公式在不同領域中自有其不同的面貌呈現，以顯示出數學公式在” **符號化**” 後的力與美，否則許多公式其同源的特性是頗高的，例如:仔細思考這些公式不也是相同?

(1) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ，(2) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ， (3) 相關係數$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$

若由餘弦定理(1)我們又可推知和角公式、棣美弗定理、旋轉矩陣…等不也是「殊途同歸」？

$$(4)\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$$(5)\ [r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$(6)\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

又以$a^2+b^2=c^2$ ， $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ，方向餘弦$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 和$x^2+y^2=r^2$ ， $x^2+y^2+z^2=r^2$ ， $x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$爲例，這些看似性質相近的數學創作，從其符號改變和維度擴充的角度來看，「它依然在任何數學體系的定理中，保持邏輯上的和諧相容」，若將此一層面的鑑賞，分門別類加以”票選”，亦無傷大雅。既是如此，那麼我們對於受試者的反應就不用太過拘泥了。對於作者這種拋磚引玉的工作我們應予以肯定與支持，相信在欣賞之餘，你我皆會發現饒富其趣。

不過值得注意的是，該問卷若不是規定受測者在一定的時間內做直觀的價值判斷，而是在教室或宿舍中，經由相互研討後而收回彙整之資料，我想或多或少摻雜了些許的變數。畢竟學生從中學時代就與畢氏定理形影不離，在大學中其所學的科目不外乎代數、分析與幾何，而這兩個公式亦或多或少橫跨所開之課程，因此畢氏定理與泰勒公式會榮登最美及最有用的數學式子就不足爲奇了。倘若能開個玩笑也讓畢生之成就皆肇於「畢氏定理」之發現的數學家(如下所列)也能票選最有用及最美的數學式，相信此定理必能奪魁：

商高(?1000 B.C.) 提出勾股定理。

畢達哥拉斯(Pythagoras,?570 B.C.)發現畢氏定理，但未留下證明。

希帕克斯(Hipparchus ? 300B.C) 測量地球和天體。

歐幾里得(330 B.C~275B.C)於幾何原本一書中給畢氏定理證明。

趙爽(約公元三世紀人)利用《勾股圓方圖注》解二次方程式。

劉徽(約公元三世紀人)利用《割圓術》求得圓周率。

祖沖之(429~500) 求得”牟合方蓋” 及”球”的體積。

一個有趣的問題是作者以一些最美的式子在最有用的榜上消失，「說明了美和有用不一定相伴而行」，我甚表認同，其中以 Fibonacci 數列的角色最爲突出，依我個人猜測可能由於大部分師大學生會因將來要從事教職，所以對此數列多所涉

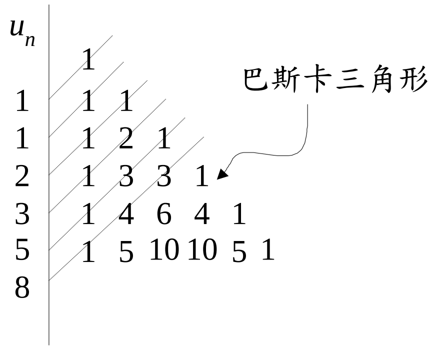
獵，發現它可以涵蓋中學的核心課程，極具威力，以下面(7) ~ (13)的式子為例，即可看出它的多樣式風貌。

(7) $\{u_n\}: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,...$　　　(8) $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　　(10) $\begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$

(11) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$　　　(12) $u_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(13)



但以我在首段文中所言來判斷，Fibonacci 數列所呈現的數學式子在「純思維的智力挑戰」上大於解決「實質的社會需要」，因此在實用性上失去光環，在所難免，至於其他的式子在最有用的排名上互有消長，乃繫於學生個人之所長、所好，無庸置疑，而在最想知道的數學式發展史中Fibonacci 數列又再度位居大學部學生的第二排名，相信與它的深度和廣度有著密不可分的關係。

參考資料：

李儼、杜石然，1997，《中國古代數學簡史》，台北：九章出版社。
洪萬生，1999，《孔子與數學》，台北：明文書局。
吳振奎，1993，《斐波那契數列》，台北：九章出版社。
張祖貴譯，《西方文化中的數學》，台北：九章出版社。
謝佳叡，2000，〈最美的數學式〉,《HPM 通訊》3（4）。

最美的數學式讀後感

台師大教學碩士班 陳威男老師

的確，美，絕對是數學的特質之一。當一個定理顯得醜陋時，某種程度也暗示著：有一更好的證明等著被發掘！從讀了謝佳叡老師的這篇文章中，心想---何不也對現在的國中應屆畢業生來個『數學式子票選活動』？

票選方式決定採用事先提供選項，但這些選項因爲國中學生所認識或接觸到的公式非常有限，因此個人就很主觀的從國中教材中勉強挑出 18 個選項以供選擇，本問卷共有三個問題，每個問題至多填寫 5 個選項，不分順序，問題如下：

你覺得最美的數學式子是哪些？

你認爲最有用的數學式子是哪些？

你最想知道哪些數學式子的發展史？

本次問卷對象爲東興國中三年級畢業生，約 160 人，分析方式採『量』的統計，將三個問題的調查結果，分年級依得票數的高低呈現前五名排行。

※選項：

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 2. 三角形內角和=180 度 3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 5. (海龍公式)：ΔABC 中，若三邊長分別爲 a,b,c，$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，則 $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 6. 畢氏定理：$a^2 + b^2 = c^2$ 7. 圓周長=$2\pi r$ 8. 圓面積=πr^2 9. 圓球體積=$\frac{4}{3}\pi r^3$ 10. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 11. $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$	12. 等比級數求和：$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1$ 13. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 14. 判別式 $D = b^2 - 4ac$ 15. 直角三角形母子性質 16. 正三角形邊長 a，面積=$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 17. 直角三角形斜邊中點到三頂點等距離 18. 黃金比例：$\frac{w}{l} = \frac{l-w}{w}$ $\frac{l}{w} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6$

統 計 結 果（僅列前五名）

◎最美的公式：

編號	15，18	6	3	1	10
人數	48	39	25	16	10
百分比	30%	24.3%	15.6%	10%	6.2%

◎最有用的公式：

編號	6	12	3	13	11
人數	43	31	30	28	24
百分比	26.8%	19.4%	18.8%	17.5%	15%

◎最想知道哪些式子的發展史？

編號	18	5	10	15	12
人數	56	43	29	28	17
百分比	35%	26.9%	18.1%	17.5%	10.6%

從上面的統計結果，發現「黃金矩形（黃金比例）」是學生們認爲最美也最想知道其發展史的一個公式，直角三角形的「畢氏定理」也被認爲是最美、最有用的公式之一，雖然說『美』和『有用』不一定相伴而行，但從上面的統計結果似乎透露出一個訊息：數學公式似乎是因爲其「有用」才美，當然這僅只是受調查學生普遍的認爲罷了，僅供參考。

來自彼岸的聲音

和角公式的迴響

浙江大學數學系 汪曉群教授

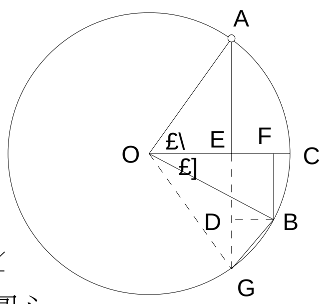
拜讀 HPM 通訊，獲益頗多，對台灣中學數學教師們的良好素質及研究精神印象極深，同時深感通訊的生命力之強。

第三卷第一期（2000 年元月）“和角公式的另一種表徵”一文中（三）、（四）兩段所證明的結論似應互換一下才對，可能是作者筆誤或排版者誤易兩圖所致。（編者註：感謝江老師指正，第三卷第一期已修正）

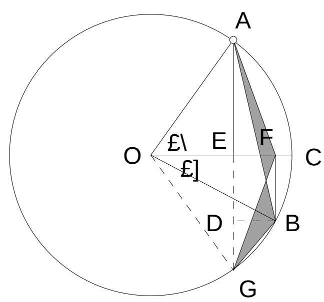
作者在文中提到：交大黃大原教授曾在一次演講中給出和角與和差化積公式的幾何證明。考察數學的歷史，我們發現 16 世紀法國數學家韋達（F.Vieta）曾給出和化積公式

$\mathrm{Sin}\,\alpha+\mathrm{Sin}\,\beta=2\mathrm{Sin}[(\alpha+\beta)/2]\mathrm{Cos}[(\alpha-\beta)/2]$

的幾何證明。



ï 1



ï 2

如圖１，設∠AOC=α，∠BOC=β是單位圓O的兩個圓心

角。不妨設α和β爲銳角，且$\alpha>\beta$。過 A、B 分別作 OC 的垂線 AE、BF，垂足爲 E、F。延長 AE 交圓 O 於 G，連 OG、BG。又作 BD⊥AG，垂足爲 D。於是

$$\mathrm{Sin}\,\alpha+\mathrm{Sin}\,\beta=AE+BF=AD=AB\bullet\mathrm{Cos}\angle DAB。$$

而

$$\angle DAB=(\alpha-\beta)/2，AB=2\mathrm{Sin}[(\alpha+\beta)/2]$$

因此

$$\mathrm{Sin}\,\alpha+\mathrm{Sin}\,\beta=2\mathrm{Sin}[(\alpha+\beta)/2]\mathrm{Cos}[(\alpha-\beta)/2]。$$

順著韋達的思路，我們同樣可以證明其餘的和差化積公式。

（1）從圖 1 不難看出：$\angle AGB=(\alpha+\beta)/2$，又在等腰三角形 OGB 中，$BG=2\mathrm{Sin}[(\alpha-\beta)/2]$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,\alpha-\mathrm{Sin}\,\beta&=AE-BF=AE-DE=GE-DE=DG\\&=BG\bullet\mathrm{Cos}\angle DGB=BG\bullet\mathrm{Cos}\angle AGB\\&=2\,\mathrm{Cos}\,[(\alpha+\beta)/2]\,\mathrm{Sin}\,[(\alpha-\beta)/2]。\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,\alpha-\mathrm{Cos}\,\beta&=OE-OF=-EF=-DB\\&=-BG\bullet\mathrm{Sin}\angle DGB\\&=-2\mathrm{Sin}[(\alpha+\beta)/2]\,\mathrm{Sin}\,[(\alpha-\beta)/2]。\end{aligned}$$

（3）爲證明$\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,\beta=2\ \mathrm{Cos}\ [(\alpha+\beta)/2]\ \mathrm{Cos}[(\alpha-\beta)/2]$，我們在圖 1 中過圓心 O 作弦 AB 的垂線，垂足爲 H，過 H 作 HI⊥OC，垂足爲 I。則因 AH=BH，故得 EI=IF。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,\beta&=OE+OF=2OI\\&=2OH\bullet\mathrm{Cos}\angle HOI\end{aligned}$$

而 $OH=\mathrm{Cos}\,[(\alpha+\beta)/2]$，$\angle HOI=\angle BAG=(\alpha-\beta)/2$，所以有

$$\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,\beta=2\,\mathrm{Cos}\,[(\alpha+\beta)/2]\,\mathrm{Cos}[(\alpha-\beta)/2]\ 。$$

利用圖 1 我們還可以證明四個積化和差公式。

（4）在圖 1 中連接 AF、GF，如圖 2 所示。因 BF∥AG，故△AFB 的面積和△GFB 的面積相等，從而兩個陰影三角面積相等。因此四邊形 OAFG 的面積和四邊形 OABG 的面積相等。於是我們有

$$\begin{aligned}\mathrm{Sin}\,\alpha\bullet\mathrm{Cos}\,\beta&=AE\bullet OF\\&=\text{四邊形 OAFG 的面積}\\&=\text{四邊形 OABG 的面積}\\&=\triangle OAB\text{ 的面積}+\triangle OGB\text{ 的面積}\\&=[\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)]/2+[\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta)]/2\\&=[\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)+\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta)]/2。\end{aligned}$$

（5）爲了證明$\mathrm{Cos}\,\alpha\bullet\mathrm{Sin}\,\beta=[\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)-\mathrm{Sin}\,(\alpha-\beta)]/2$，我們在圖 1 中過 A、E、G 分別作 OB 的垂線，垂足分別爲 K、I、J，連 GI 并延長，交 AK 於 L。如圖 3 所示。因 E 爲 AG 之中點，故 KI=IJ，LI=IG，EI=AI/2。因此 Rt△LKI≅Rt△GJI，因此 GJ=LK。於是

$$\mathrm{Cos}\,\alpha\bullet\mathrm{Sin}\,\beta=OE\bullet EI/OE$$

$=EI=AL/2$

$=(AK-LK)/2=(AK-GJ)/2$

$=[\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)-\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)]/2$。

（6）由圖 3 知，$\mathrm{Cos}\,\alpha=OE$，$\mathrm{Cos}\,\alpha=OI/OE$，故

$\mathrm{Cos}\,\alpha\bullet\mathrm{Cos}\,\beta=OI$

$=OK+KI=OK+KJ/2$

$=(OK+OJ)/2=[\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)]/2$ 。

（7）在圖 3 中再作 $CM\perp OB$，垂足為 B。又設 AK 與 OC 交於 N。如圖 4 所示。則 $\mathrm{Sin}\,\alpha\bullet\mathrm{Sin}\,\beta=AE\bullet CM$。

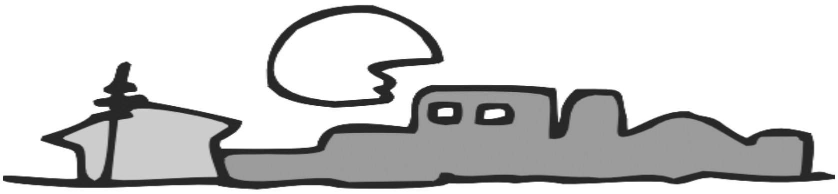
因$\triangle AEN\sim\triangle OMC$，故有 $AE/NE=OM/CM$，即 $AE\bullet CM=NE\bullet OM$。

但，$OK/OM=ON/OC$，即，$OM=OK/ON$，因此，

$NE\bullet OM=OK\bullet NE/ON$

$=OK\bullet KI/OK=KI=(OJ-OK)/2$

$=[\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)]/2$。



也談布農族繪曆

清華大學歷史研究所畢業 許進發老師

日前閱覽《HPM 通訊》，對蘇惠玉老師〈多元文化數學的一個例子：布農族的木刻畫曆與時間、空間觀念〉一文，大有驚豔之感。文化人類學或者人類學史的研究材料，竟然得以延伸其研討範圍，出現在數學教育的範疇，或許正是蘇老師所提及民族數學(ethnomathematics)等新興研究觀念的登場，致使蘇老師之類的有心人士能以新觀點重新詮釋乏人問津的舊材料。

由於筆者並非是專研數學或數學教育的圈內人，對於蘇老師文章顯現的觀點，未敢妄置一語。筆者願自專研歷史的立場，就木刻畫曆部份，補充一些看法，就教於諸位方家。

一、曆板的時代性質

木刻畫曆在日治時代被稱為「繪曆」，一共出土三塊，皆出自於布農族丹群(Take-vatan)。其中第一塊曆板來自 Qanitoan 社 Mangulavan 家族，第二塊曆板來自 Hava-an 社 Manqoqo 家族，而第三塊曆板則來自 Hava-an 社 Tanapima 家族。象形文字解讀方面，最為清楚的是第一塊曆板，其次是第二塊曆板，而第三塊曆板則無法解讀。

曆板的創作者，不僅是部落的頭目，也是祭祀活動的司祭者，彰顯部落的權力者即是最具有豐富知識者。曆板的創作，不是由於祭祀活動的實際需要，而是

一種固有文化的搶救記錄。部落長老鑑於外來強勢文化入侵之後，傳統文化內容日漸衰微、消逝，湧現文化消失的畏懼之心，因此興起記錄部落固有文化活動的想法。曆板的書寫方式，以象形文字的方式呈現，反映出是由不解當時通用語言－日本語的年長一輩所創作。曆板的內容，全然以農耕、狩獵和祭祀的活動記事爲中心，反映出部落在編入近代國家體系以前的最重要活動種類。

二、曆板的時代研究

曆板的介紹者和研究者，以當時的關係人物而言，略分爲兩種領域的人士。一種是掌管原住民行政業務的警務單位人士，譬如鈴木質、橫尾廣輔(1889-1953)，二人當時分別以視學(即督學)和視學官(即總督學)的身份專責原住民教育。另一種是專門從事原住民研究的臺北帝國大學土俗學人種學教室相關人士，譬如宮本延人(1901-1988)、馬淵東一(1909-1988)，宮本延人當時任職爲臺北帝國大學的助手、講師，而馬淵東一雖爲臺北帝國大學史學科的畢業生，也可謂是臺北帝國大學土俗學人種學教室的唯一學生，以土俗學人種學講座是史學科隸屬講座之一的緣故。

曆板除了新聞業者以時事焦點報導之外，只有受到上述兩類人士的垂青，實在不難理解。即一方面注重在教育行政的實際作用，另一方面著眼於原住民文化的內涵研究。此類介紹、研究雖然有助於布農族文化的重新認知，卻也限制曆板內容的深度研究，未能進而追蹤探討布農族的天文知識。至少當時在台灣專責天文星象研究的氣象機構人士，截至目前爲止，未見相關論述報導的出現。

三、曆板的文化意義

日治時代掌管原住民行政業務的警務單位人士，在殖民主義觀念的薰陶之下，不免戴起有色眼鏡，普遍對原住民有著刻板的印象和看法，即原住民是文化水準低落的種族，且依照文明進化的程度，排列各種族的文明高低順序。各種族之中，雅美族被認爲是文明進化程度最低的種族，其次是布農族。因此布農族曆板的出現，成爲稀有的珍貴事情，一舉打破原住民文化水準低落的虛擬事實迷思，使世人認定原住民自身有其複雜的獨特文化，重新認識原住民的文化內容和意涵。此種認知的轉變，在警務系統之中，以專責原住民教育的人士爲先，譬如橫尾廣輔即認爲原住民舊有風俗習慣的認知乃是教育的基礎。

世界各地種族何其多！各有其獨特固有的文化。在近代強勢文明的橫掃之下，有些種族已步入世界畫一體系範疇，有些種族仍固守其獨特色彩的傳統文化。在世界通用知識體系之下，將小區域種族的知識文化體系加以兼容並蓄，呈現文化多元性的面貌，有其值得深究之處。原住民文化固然有其區域性，也有其世界性，源於其舉世無雙的特色。筆者昔日閱讀日治時代台灣籍博物學者王雨卿(1907-1938)關於台灣哺乳類動物介紹的一篇文章，至今對於其處理動物名稱的方式，仍然印象深刻。文章中所介紹的動物，每種動物皆以六種名稱的標準模式羅列，即拉丁文學名、英文名稱、日文名稱、台灣漢人名稱、台灣原住民名稱和世界語(Esperanto)名稱。在檢索動物名稱之時，此種處理方式可謂結合世

界通用稱名體系和區域稱名體系，允稱便利和有用。原住民部落長老對動物的認知，如何並行於世界通行知識體系？以此類推，在文化多元主義的名義之下，對少數種族的固有知識、觀念的認知，或許能有多面向的呈現。

參考文獻：

鈴木質，1932，《臺灣蕃人風俗誌》，臺北：理蕃之友發行所。

臺北帝國大學土俗人種學研究室，1935，《臺灣高砂族系統所屬的研究》，東京：刀江書院。

橫尾廣輔，1933，〈蕃人文化的研究〉，《理蕃之友》2（9），頁 2-3。

橫尾生，1934，〈布農族的繪曆〉，《理蕃之友》3（11），頁 1-3。

齋藤生，1935，〈未知底蘊的布農文化〉，《理蕃之友》4（5），頁 4-5。

馬淵東一，1936，〈布農族的祭祀和曆〉，《民族學研究》2（3），頁 58-80。

橫尾廣輔，1937，〈布農族的繪曆〉，《臺灣時報》第 214 號，頁 117-129／第 217 號，頁 62-81。

橫尾生，1938，〈布農族的繪曆(續)〉，《理蕃之友》7（1），頁 5-6／7（2），頁 2-3。

宮本，1943，〈布農族的曆〉，《科學的臺灣》11（4），頁 4-12。

王雨卿，1938，〈臺灣產哺乳類的檢索及名稱〉，《兵庫縣博物學會會誌》第 15 號，頁 95-140。

《臺灣日日新報》第 9086 號，1925，由蕃人創作的祭事曆／新高郡 Kanetowan 社頭目 Taromu Maguraban／以留下年中行事記錄的物品／蕃人的初次嘗試。

《臺灣日日新報》第 13392 號，1937，珍品繪曆的所在／漸握其緒／若果發現／欲以相當金額購買。

《臺灣日日新報》第 13399 號，1937，布農族的秘寶／繪曆逐漸發現／派遣蕃丁至台中州丹大社／出讓交涉成立。

《臺灣日日新報》第 13512 號，1937，布農族的繪曆／再度發現／與前次物品略爲同樣型式。

這是編輯

1. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。爲編輯方便，投稿請在 2000 字以內，並以電腦打字，將檔案磁片郵寄至：台北市健康路西松高中蘇惠玉收；或e-mail至：suhy@hp715.math.ntnu.edu.tw

HPM 多元文化數學讀後心得

台師大教學碩士班　黃淑華老師

人類最初的知識是從生活的需求萌芽，而後續的學習是爲了能改善生活，累積前人的智慧，減少摸索階段。只是，當外力強加壓迫所需學習的知識與原先奠基在生活需求的知識不一致時，甚或產生衝突時，學習的效果必定大打折扣。

今日的義務教育，在統一政策下，無論你的學前背景是什麼，必需學習相同的事務。即使在今天，國小教科書開放，仍需受課程標準束縛，而課程標準實在未能考慮各民族的文化差異性，個別文化差異被尊重的程度不多，更何況國小教科書開放後，各業者的取材、信念，在市場機制的考慮下，更是令人擔心。學習者能與主流顯學契合的，才能在其間怡然自得，否則只能在夾縫中求生存，或者自我放逐，自外於學習。

曾看過一篇文章，是在比較美國、韓國、台灣三者不同語系的學童的數概念。文章指出，三、四歲的兒童，說中文的比說韓文的以及說英文的都好，不但數得多，而且比較正確。但是進入幼稚園後，韓國兒童的數學能力顯然比美國兒童好一些。（Song & Ginsburg,1988，1987）仔細與「數的語言」做一個平行比較，我們會發現，中文的「口語」與「書寫」有很高的一致性，中文用零、一、二、‧‧‧、八、九分別對應於阿拉伯數字的 0、1、2、‧‧‧‧、8、9。以及用個、十、百、千、萬、‧‧‧等代表數的位值，例如「五百一十三」，就是百位是 5、十位是 1、個位是 3。英語中從 1 到 20 都是不同的單字，較難看出 13（thirteen）和 10（ten）的關係。

而韓文有兩套表示數字的口語，一套是非正式的命數法，是韓文原本就擁有的；另一套借自中文，是兒童進入幼稚園後便會習得的正式命數法，和中文一樣，有清楚表示位值的音。而韓文原本就擁有的命數法無法清楚表示數字的位值，例如，2 的發音是「dool」，9 的發音是「ahop」，10 的發音是「yul」，但是 20 的發音是「sumool」不是「dool yul」，29 的發音是「sumool ahop」不是「dool yul ahop」。因此，造成三、四歲的兒童其數數能力比中文的差，但是進入幼稚園後，由於開始使用和中文一樣，有清楚表示位值的命數法，他們的表現就比說英語的美國兒童好一些。（Miura, Kim, Chang　& Okamoto，1988）

數學因人的存在而存在，而人是多元的，並有其存在的社會、文化意義。數學活動不應侷限於教科書的取材或教師個人的喜愛、偏好，而是應在原本多元的差異中，給予充分尊重、發展、重新尋覓其具有的時代意義，以期未來的開展。每種文化有其存在的價值，否則早就被淘汰。教師作爲傳道、授業、解惑者，應以開放的心胸，傳己之道並接受彼之道，如此才能充分了解學生之惑爲何，並培養一顆寬容、多樣的心。

參考資料

Miura, I.T., Kim, C.C., Chang, C., & Okamoto,Y., 1988, "Effect of language characteristics on children's cognitive representation of numbers：Cross-national comparisons", *Child Development, 58, 1445-1450.*

Song , M.J.& Ginsburg, H.P., 1987, "The development of informal and formal mathematical thinking in Korean and U.S. children", *Child Development, 58, 1286-1296.*

Song , M.J. & Ginsburg, H.P., 1988, "The effect of Korean number system on young children's counting ：A natural experiment in numerical bilingualism", *International Journal of Psychology, 23, 319-332.*

因爲關懷，所以有愛

——談多元文化數學

教學碩士班 廖學專老師

「…弔詭的是：我每次去大圳溝都弄不清東，西，南，北.....」

一、 源起

傾讀「布農族的木刻畫歷與時間、空間觀念(蘇惠玉)」一文，突然發現，原來「學生的世界觀(空間、時間觀念)也會影響其數學學習的成果」。

二、 豈止原住民

令我吃驚的是：福佬人也好不到哪兒去！**以時間為例：**

「我懷阿專時，這條路還沒鋪柏油呢！」(我媽用懷孕當參考點)

講到空間時，(我老爸常常這樣說話：)

「阿土仔伊厝住在大圳溝東邊！」

當我站在大圳溝仔邊，搞不清「東邊」在哪裡時，我阿爸也一直叫我去問老師:「是按怎地圖的『北邊』攏爹面頂（朝上）？」

弔詭的是：我每次去大圳溝都弄不清東、西、南、北，學校的考試卻都接近一百分！

老爸、老媽大字不識幾個，卻知道彼此所談的東、西、南、北，而且溝通無礙！

教育，顯然統一了各種的文化，(語言、時間、與空間的參考座標)，也隔離了各種的文化；但「強迫學生學習某種單一意識型態的霸權，那到最後，不是學生數學成就低落，就是另一種文化的消失。」

三、 一個蘭嶼的保送生！

師大教授 林福來 在 89.5.2 龍山國中的「九年一貫」演講中說：「……多年前，蘭嶼最聰明（第一名）的學生保送師大數學系，沒想到唸不到二年便被退

學了！……當我多年後，在蘭嶼碰到這位學生時，心中只有二個字：『愧疚』！」

當我訪問敝校國三學生 馬雨儂 (女，15 歲，排灣族)發現「1」唸作 Ita，而「11」唸作 Tapulug sake ita.

由「二個音節」到「七個音節」造成她們不太愛說「二位數」以上的數字！（見附表）

原住民學生數學學習成就低落，這或許又是另一重要原因！

四、 結論

從研究、瞭解、尊重到關懷多元文化並愛護不同文化的學生，應該說是未來數學發展主流之一，否則教室內，永遠會有一小撮不同文化的學生，處在低成就的學習中，而他們的聰明才智，若遭到埋沒，又豈「愧疚」二字可以表達於萬一………。

參考資料

蘇惠玉，2000，〈多元文化數學的一個例子—布農族的木刻畫曆與時間、空間觀念〉，《HPM 通訊》3（4）。

簡易羅馬字排灣語教學手冊(扶路客(賴朝財)製作 1997.7.3)

「九年一貫」教學演講 林福來 89.5.2

一.數字 (Supu)

1. Ita	22.	Rusa puluq
2. Rusa	30.	Telu a puluq
3. Telu	40.	Sepat a puluq
4. Sepat	50.	Lima a puluq
5. Lima	60.	Unem a puluq
6. Unem	70.	Pitu a puluq
7. Pitu	80.	Alu a puluq
8. Alu	90.	Siva a puluq
9. Siva	100.	Taidai
10. Puluq(Tapulq)	101	Taidai saka Ita
11. Tapuluq saka ita	111	Taidai saka Tapuluq saka Ita
21. Rusapuluq saka Ita	1,000	Kuzul
	10,000	Kuraw
	100,000	Tapuluq a kuraw

二.順序 (Sisupuan)

1.	第一	Sangasangasan	7.	第七	Sikamasanpitul
2.	第二	Sikamasanmusal	8.	第八	Sikamasanvalul
3.	第三	Sikamasantelul	9.	第九	Sikamasansiva
4.	第四	Sikamasansimatel	10.	第十	Sikamasanpuluq
5.	第五	Sikamasanlimal			
6.	第六	Sikamasanunem			

三.顏色 (Qulaw)

1. 紅 (Qudidil)
2. 黃 (Qulivalivai／Qurilarilaw)
3. 白 (Vucelacelai／Vuqavuqal)
4. 黑 (Qecengecengel)
5. 綠 (Lilualuas)

四季節 (Kina valivaliyan)

1. 春天 (Kala Vevean)
2. 夏天 (Kala Qudalan)
3. 秋天 (Kala Uragan)
4. 冬天 Kala Uraman/Vucelejan)

感謝各校聯絡人：
●永春高中 陳明山 ●內湖高中 潘國華 ●松山高中 郭耀昇 ●中山女高 劉天民 ●成功高中 繆友勇 ●大直國中 陳文鴻 ●北投國中 黃國斌 ●石牌國中 張添順 ●大理國中 汪錫霞 ●永吉國中 謝朝隆 ●天母國中 賴春錦 ●蘭雅國中 李信仲 ●景興國中 彭君智 ●開平高中 林裕意 ●民生國中 程麗娟 ● 金山中學 陳坤松 ●基隆女中 林瑞淑 ●土城國中 賴炘堂 ●羅東高中 賴順基 ●復興國中 陳瑩琪 ●台南女中 吳昭榕老師 ●台中女中 陳勇政老師 ●安康中學 白家結 ●三峽明德中學 劉建宏 ●竹北國中 賴育伸 ●嘉義協志工家 朱清國 ●馬祖中正國中 陳君武 ●台南和順國中 林玲誼 ●北縣三民中學 楊建泰 ●高市興仁國中 歐志昌