HPM通訊

第三卷 第五期 目錄（2000年5月）

發行人：洪萬生（台灣師大數學系教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）
編輯小組：林榮生（西松高中） 黃振順（西松高中） 蘇意雯（成功高中）
謝新傳（五常國中） 邱靜如（實踐國中） 唐書志（百齡中學）
蘇俊鴻（新店高中） 洪秀敏（新竹高中） 洪誌陽（竹北高中）
林倉億（台師大數學系研究生）陳鳳珠（台師大數學系研究生）
謝佳叡（台灣師大數學系）
北縣聯絡員：謝佩翰 （安溪國中） 中區聯絡員：顏富明（員林國中）
南區聯絡員：廖惠儀（高市大仁國中）
贊助單位：行政院國科會 西松高中教師會 彭婉如文教基金會
創刊日：1998 年 10 月 5 日 每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/~horng

數學教育新思潮

數學與詩文

台師大數學系 洪萬生教授

在本期通訊中，陳昭蓉翻譯、整理了『Historia Matematica 討論群』網頁上有關數學家之文學素養的討論，值得數學社群成員當成茶敘之談助！

此一討論緣起於有一位討論群成員對俄國桑雅・卡巴列夫斯基（Sonya Kovalevskey / Sofya Kovalevskaya, 1850-1891）的一段回憶，應該是出自柏林學派大師維爾斯特拉斯（Karl Weierstrass）一席話對她的啓示時說：「很多人由於從來沒有機會通曉更多的數學，都把數學和算術弄混在一起，而認爲它是一門枯燥乏味的科學。實質上，它倒是一門需要大量想像力的科學呢。本世紀一位數學家領袖就非常正確地陳述這種情形。他說：要成爲數學家，不可能不是心靈上的詩人。」

上述卡巴列夫斯基的告白，目的在於說明何以她可在數學和文學上同享盛名。事實上，就數量而言，卡巴列夫斯基的文字作品（含小說、散文、戲劇、詩歌等等），遠遠超過她的數學創作。可惜，她儘管被數學史家推許爲俄國十九世紀偉大數學家之一，但是，她的文學作品卻無法與當代大文豪杜斯妥也夫斯基、普希金等人相提並論，蓋專業不足故也。

不過，本文無意進一步討論桑雅・卡巴列夫斯基如何依偎在數學與文學這很難令人聯想在一起的兩個領域之間。我們其實只想隨手摘錄金元李冶與明朝宋應星的幾首七律，讓讀者在吟詠之餘，也能多少體會數學 vs.人文的歷史意義吧！

（一） 李冶〈瀟湘夜雨〉：

遠寺孤舟墮渺茫，雨聲一夜滿瀟湘。黃陵渡口風波暗，多少征人說故鄉。

（二） 宋應星〈憐愚詩〉兩首：

一人兩子算盤推，積到千年百萬胎。幼子無孫猶不瞑，爭教殺運不重來。

著述詩書吐肺肝，目前身後幾人看。裝成圈點吾徒炫，假序名公識者彈。

參考文獻：

孔國平，1988，《李冶傳》，石家莊：河北教育出版社。

洪秀敏，1998，《女性主義、數學史以及數學教育》，台灣師大數學研究所碩士論文。

Osen, Lynn (彭婉如、洪萬生合譯) 1997，《女數學家列傳》，台北：九章出版社。

Koblitz, Ann Hibner, 1983, *A Convergence of Lives*. Boston / Basel / Stuttgart: Birkhauser.

Kovalevskaya, Sofya, 1978, *A Russian Childhood*. New York / Heidelberg / Berlin: Springer-Verlag.

感謝各校聯絡人：
●永春高中 陳明山 ●內湖高中 潘國華 ●松山高中 郭耀昇 ●中山女高 劉天民 ●成功高中 繆友勇 ●大直國中 陳文鴻 ●北投國中 黃國斌 ●石牌國中 張添順 ●大理國中 汪錫霞 ●永吉國中 謝朝隆 ●天母國中 賴春錦 ●蘭雅國中 李信仲 ●景興國中 彭君智 ●開平高中 林裕意 ●民生國中 程麗娟 ● 金山中學 陳坤松 ●基隆女中 林瑞淑 ●土城國中 賴炘堂 ●羅東高中 賴順基 ●復興國中 陳瑩琪 ●台南女中 吳昭榕老師 ●台中女中 陳勇政老師 ●安康中學 白家結 ●三峽明德中學 劉建宏 ●竹北國中 賴育伸 ●嘉義協志工家 朱清國 ●馬祖中正國中 陳君武 ●台南和順國中 林玲誼 ●北縣三民中學 楊建泰 ●高市興仁國中 歐志昌

偉大數學家阿基米德的想法

～ 給我一個立足點，我就可以移動這個地球。～

台師大數學系碩士班研究生 陳鳳珠

一、前言

阿基米德（Archimedes，287?-212 B.C.）是古希臘的偉大數學家，經歷了二十二個世紀，他在各方面的貢獻至今仍受到許多的尊崇。他擁有極高的天賦，不但與牛頓（I. Newton，1643-1727）、高斯（C. F. Gauss，1777-1855）並列為三個最偉大的數學家，也是傑出的物理、天文學家和機械發明家。

阿基米德在繼承前人數學成就的基礎上，做了進一步的完善和發展。他不但給出了阿基米德公理，完成圓面積、球表面積和球體積等公式的證明，還研究了與螺線、拋物線和圓錐曲線旋轉體有關的命題，同時在三次方程和數論方面都有貢獻。阿基米德亦是數學和物理結合研究的最佳典範，他用公理方法完成了槓桿平衡和重心的理論，而且在他的著作《論浮體》中，應用公理方法完成了流體浮力的理論，因此成為靜力學創始人。不僅如此，他還透過力學的實際應用發明了許多實用機械，也曾在《球體設計論》介紹了一種用來展示太陽、月亮和五顆行星環繞地球的設計。

由於阿基米德在各領域均有傑出的表現，因此有許多關於他的傳奇和故事。也許這些故事並非完全確實，但可以幫助我們了解這位古代最偉大的數學家的個性。其中最著名的一個故事，就是發現金鑄皇冠純度的方法。Syracus 國王定製了一頂皇冠，交貨以後，他懷疑這頂皇冠的純度不足，所以請阿基米德檢驗其成分；阿基米德一直在思考這個問題，有一天當他洗澡時，觀察到自己的部分體重被水的浮力所抵消，突然間他領悟了解決這個問題的

方法，他對於自己這個發現感到相當興奮，以致於竟然裸奔到街上大叫“Eureka！（我找到它了）”。他發現物體沉入水中時，被水的浮力所抵消的重量等於排出水的重量，這正是流體靜力學第一運動定律，因而藉此解決了國王交給他的問題。由此可見，阿基米得是全神貫注所研究的問題，才會忘記穿衣服就興奮地奪門而出。

另外，一個流傳下來的阿基米德名言是：「給我一個支點，我就可以移動這個地球。」他這樣誇口是因爲被自己發現的槓桿原理深深感動。故事是他對 Syracus 國王宣稱任一給定的重物都可以由一個給定的力移動，Syracus 國王便要求他給出一小的力可以移動巨大重物的實例。因此，阿基米德設計了一種機械，把一條全體敘拉古居民共同使力也無法移動的一條船，將它變成只需一個人就可移動，進而給予他所發現的定理一個實際例證。

儘管阿基米德在物理和機械等等各方面，均有不凡的表現，其中最令我們感興趣的部分，是他在數學方面的研究。尤其是他在嚴密證明之前所呈現啓發性的論述，亦即那種利用物理觀念的推理來解決數學問題的方法。所以，本文針對阿基米德在嚴密論證前所提供「發現的方法」，介紹《方法》（The Method）中的兩個命題作爲說明，[1]企盼大家能藉此更貼近偉大數學家阿基米德的想法。

二、發現的方法

值得注意的是，阿基米德在幾何方面的研究和歐幾里得（Euclid，約 300B.C.）有很大的差異。他在嚴密綜合證明定理之前，先呈現定理「發現的方法」或是問題情境的分析，從中我們可以撥開事物的表面，洞察到他探求真理的方法。他根據力學原理所得到之「發現的方法」，研究了許多有關面積與體積方面的重要結果，而成爲他最具價值的著作《方法》之主要內容。

他所提供「發現的方法」，主要是利用槓桿原理（力矩平衡），討論兩圖形之橫剖面的平衡關係。然而，他並沒有利用這種方法來演示嚴密的證明，因爲我們並不能證明一個圖形是由它的各個橫剖面所組成，亦即一個平面圖形是由直線組成或一立體是由一薄平面組成。正如他自己寫道：「我常藉機械的方法來了解某些定理，但由於這些方法無法提供真正的證明，所以幾何證明是必須的。」因此，阿基米德和他同時代的希臘人一樣，堅持所有的數學結論只有通過演繹推理才能確定。他在《方法》中特別強調「發現方法」和「嚴格證明」這兩者的差異，即（1）發現定理所用的方法，雖然不能做爲定理的嚴格證明，卻足以說明定理的真實性；（2）這些定理的嚴格證明，就是說這些定理最後被確認之前，必須經過無懈可擊的幾何方法論證。

儘管阿基米德認爲嚴密的幾何證明是必要的，他也強調力學方法是相當有用的。如同阿基米德在《方法》的前言提及：「通過力學方法我對一些問題首先變得清晰了。然而，當我們用這種方法預先獲得有關這些問題的信息時，完成它們的證明，當然要比沒有這些信息的情形下去發現其證明容易得多。」

（一）、《方法》中的命題 1

我們首先介紹阿基米德利用力學原理所呈現「發現的方法」的典型例子，亦即《方法》中的命題 1：

設是 ABC 由直線 AC 和拋物線 ABC 所為成的拋物線弓形，D 爲 AC 的中點。作直線 DBE 平行於拋物線的軸，連接 AB、BC。則弓形 ABC 的面積是三角形 ABC 面積的$\frac{4}{3}$。（見圖 1）

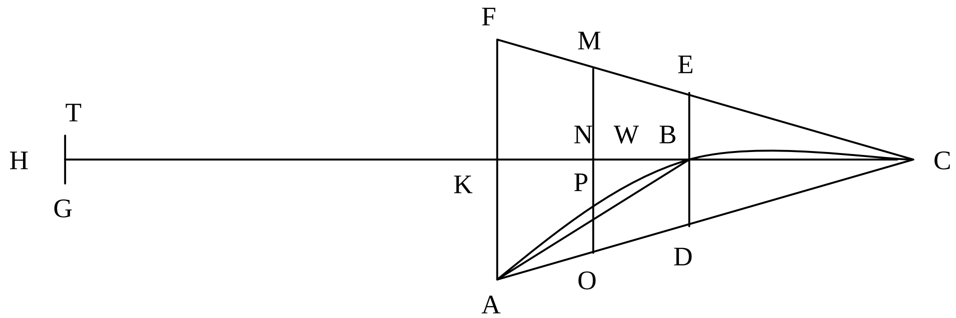

圖 1

阿基米德的做法是先由 A 點作 AKF 平行 DE。設拋物線在 C 點的切線分別交直線 DE、AF 於 E、F。然後，延長 CB 交 AF 於 K，再延長 CK 至 H，使 KH=CK。

因爲他想證明圖形中的三角形 CFA 和將重心移至 H 點的弓形 ABC，以 K 點爲支點時呈現平衡狀態。所以，將 CH 作爲槓桿，K 爲其中點。然後，設 MO 是任一條平行 ED 的直線，它與 CF、CK、AC 分別交於 M、N、O，與曲線交 P 點。

現在，已知EB=BD；MO : PO=CA : AO（參看《求拋物線弓形面積》命題 5）。由於線段FA、MO都平行線段ED，並且EB=BD（圓錐曲線的理論已證），[2]可得知FK=KA和MN=NO；又MO:PO=CA:AO與KH=CK，利用《幾何原本》Ⅵ.2 得到 MO:PO=CA:AO =CK:KN=HK:KN。

再取線段 TG=OP，將之以 H 爲中心放置。

由於 N 爲 MO 的重心且 MO:PO=HK:KN，可推知 H 處的 TG 和 N 處的 MO，以 K 點爲支點時保持平衡。(《論平面圖形之平衡》, I .6.7）

類似地，對平行於 DE 且與拋物線弧相交的所有其他線段，即「截於 FC、AC 間，中點在 KC 上」和「曲線 ABC 與直線 AC 間的截線，H 爲重心放置」，以 K 點爲支點時將保持平衡。因此，K 是由如下兩組線段構成的整個系統的重心：（1）截於線段 FC、AC 間，置於圖中所有像 MO 一樣的線段和（2）中心置於 H 處，所有與曲線 ABC 間的截線如線段 PO 有相同長度的線段。

因爲三角形 ACF 由所有像 MO 一樣的平行線段所組成；弓形 ABC 由所有像 PO 一樣含於曲線內部的線段組成。所以，可以推知，置於圖中所示位置上的三角形 ACF 與以 H 爲重心放置的弓形 CBA，以 K 點爲支點時保持平衡。

最後，討論弓形 ABC 和三角形 ABC 之間的面積關係。在 KC 上取 W 點，使 CK=3KW，則 W 是三角形 ACF 的重心。於是，三角形 ACF : 弓形

ABC=HK:KW=3:1。從而，弓形 ABC=$\frac{1}{3}$三角形 ACF，但是三角形 ACF= 4 三角形 ABC，故弓形 ABC=$\frac{4}{3}$三角形 ABC。

阿基米德為了區別發現方法和嚴密證明的不同。於是，在證明的最後補充說明：「這裡所陳述的事實不能以上面所用的觀點作為事實證明，但這種觀點暗示了結論的正確性，鑒於該定理並未得到證明，同時它的真實性又值得懷疑，因此我們將求助於幾何學上的證明，我本人已發現並公佈了這一個證明。」（見《求拋物線弓形的面積》命題 16）

我們可以發現，阿基米德在這個命題裡，除了利用到力學方法中的槓桿原理，並且將平面視為由平行的直線所組成，這樣的想法相當於後來在十七世紀發展出來的「微元」（infinitesimals）概念，亦即將平面分割成無限多條直線作「細微分割」（indivisibles）。[3]

（二）、《方法》中的命題 11、12

接著我們再看看另一個也應用到槓桿原理及相當於「微元」技巧論證的定理。這也就是《方法》中的命題 11：

如果一圓柱內接於底為正方形的直棱柱中，其中圓柱的兩底位於兩相對的正方形面上，圓柱面與其餘的四個矩形相切，通過圓柱的一底圓的圓心 C 與另一底圓相切的正方形的一邊作一平面 X，則由該平面 X 所截圓柱部分圖形（簡稱：部分圓柱）的體積只是整個棱柱的$\frac{1}{6}$。（見圖 2、圖 3）

阿基米德在命題 11 的一開始就說道：「這一個命題可以用力學方法加以考察，在我能夠清楚表達他之後就將用幾何角度著手其證明。」

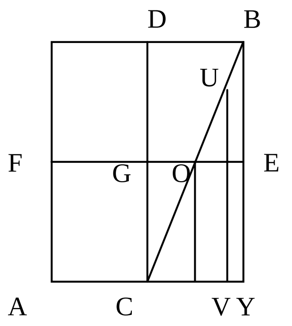

圖 2：平面 Z 上的矩形 AB

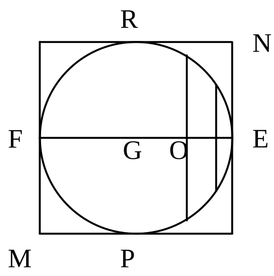

圖 3：平面 Q 上的正方形 MN

實際上，他所利用的力學方法包含在命題 11、12 中。[4]在命題 11 裡，他要證明的是：以F為重心放置的部分圓柱和原位置上的半圓柱PER，以G點為支點時保持平衡。

開始先假設有一直棱柱，在其內部內接一圓柱。再假設棱柱被一平面 Z 所截，該平面 Z 經過棱柱和圓柱的公共軸 CD 且與圓柱的底面垂直。然後，令得到直棱柱的縱截面為矩形 AB，它與平面 X 的交線是直線 BC。（見圖 2）

另外，作一線段 EF 平分線段 CD，設交於 G 點；通過線段 EF 作垂直線段

CD 的平面 Q，令平面 Q 截直棱柱的橫截面為正方形 MN，又截圓柱所得橫截面為圓 EPFR，設 G 點為圓心。（見圖 3）

然後，假設平面 Q 與平面 X 交於直線 KL，而且線段 KL 與線段 GE 互相平分於 O 點。再作圓 EPFR 的任一條弦 TS，使得弦 TS 與線段 EF 垂直且相交於 I 點；並且過 TS 作一平面 W 與線段 EF 垂直，則平面 W 與部分圓柱相交於一矩形，其一邊等於線段 TS，另一邊平行線段 UV。（見圖 2 和圖 3）

然而，因為線段 UV、BY 和 GC 皆互相平行，而且 EC 為矩形，所以 EG：GI=YC:CV=BY:UV=（位於半圓柱中的矩形）:（位於部分圓柱中的矩形）；又 EG=FG。因此，FG：GI=（位於半圓柱中的矩形）:（位於部分圓柱中的矩形）。（見圖 3）

假設將位於部分圓柱中的矩形移至 F 點，使 F 點為其重心；又假設線段 EF 為槓桿、G 為其中點。由於 I 是位於半圓柱 PER 中的矩形的重心，當部分圓柱中的矩形以 F 為重心放置時，可推知重心為 I 的半圓柱 PER 中的矩形，與重心放置於 F 點的部分圓柱中的矩形，以 G 點為支點時保持平衡。

同理，作任一平面垂直於線段 EF，並且經過半圓 PER 中由線段 EF 垂直平分的任一其他弦，截得的其他矩形截面有類似的結論。

如果考慮分別組成半圓柱和部分圓柱的所有矩形，則可得知半圓柱 PER，與重心放置於 F 點的部分圓柱，以 G 點為支點時保持平衡。

接著在命題 12 裡，阿基米德想要證明：半圓柱 PER 和棱柱 GHM，以 G 點為支點時保持平衡。（見圖 4）

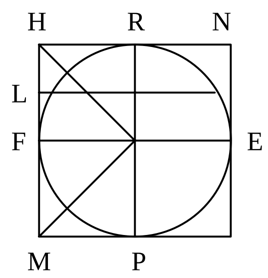

圖 4

他必須先證明：分別處於原位置上的微元（1）邊等於 KS 的矩形和（2）邊等於 LW 的矩形關於 S 保持平衡。也就是說，要先證明處於原位置上的直線 SK 和 LW，以 S 點為支點時保持平衡。

現在，已知（圓PERF的半徑）^{2}=SK^2+SG^2，即$SL^2=SK^2+SW^2$。因此，得 $LS^2-SW^2=SK^2$，從而（LS+SW）LW=SK^2，得到$\frac{1}{2}$（LS+SW）：$\frac{1}{2}$SK=SK：LW。

又$\frac{1}{2}$（LS+SW）是 LW 的重心與 S 點的距離，而$\frac{1}{2}$SK 是 SK 的重心與 S 點的距離。因而分別處於原位置上的線段 SK 和 LO，以 S 點為支點時保持平衡。

同理，對其他相應的矩形也有類似的結論。

考慮分別位於半圓柱和菱柱中的所有矩形微元，可以發現分別處於原位置上的半圓柱 PER 和棱柱 GHM，以 G 點爲支點時保持平衡。

從這一結果和命題 11 的結論，我們可立即推出由圓柱上截得的部分圓柱的體積。因爲命題 11 表明以 F 爲重心放置的部分圓柱，與處於原位置上的半圓柱，以 G 點爲支點保持平衡；根據命題 12 得知在半圓柱所在的位置上，可以用棱柱 GHM 代替半圓柱，即相對於 RP 將棱柱 GHM 往反方向旋轉。如此放置的棱柱的重心位於 GE 上的 Z 點，則滿足 $GZ=\frac{2}{3}GE$。

若假設該棱柱置於其重心處，則（部分圓柱）:（該棱柱）$=\frac{2}{3}GE:FG=2:3$，故（部分圓柱）$=\frac{2}{3}$（棱柱）$=\frac{1}{6}$（最初棱柱）。[5]

命題 11 和 12 主要是將立體的直棱柱與圓柱作「細微分割」成多個矩形平面，這裡所運用相當於「微元」的論證方式和命題 1 是如出一轍。阿基米德藉助線元素處理平面面積或藉助面積元素處理立體體積，這樣的力學方法，後來在十七世紀初開花結果，帶動了微積分的快速發展。

三、啟發性的論述

根據現存文獻記載，我們目前僅知阿基米德經常用無拘無束的想像力進行思考。希臘數學家因爲受到季諾（Zeno，490-430B.C.）提出悖論的驚嚇，認爲直覺是完全不可靠的，轉而尋求一個可以作爲嚴密證明的途徑---幾何學。因此，正當希臘的數學家執著於理性證明時，阿基米德卻能藉助直觀的力學方法，作爲證明的一部份。雖然，阿基米德仍是以當時數學家所認同的「窮盡法」（The Method of Exhaustion）作爲嚴密的證明方法，他卻是利用力學方法幫助思考，進而發現定理的正確性，成爲他特有的「發現的方法」。

阿基米德特有的「發現的方法」，是相當具有啓發性的論述。我們可以從文中的前兩個例子看出，他所利用的力學方法中，除了槓桿定理之外，也使用到相當於「微元」的技巧。他應用「微元」的概念論證許多面積和體積定理，亦即將平面和立體分別視爲（無窮多的）直線與平面所組成，例如前文中介紹的《方法》的命題 1，就是將三角形 CFA 視爲平行 MO 的三角形內部直線所組成。阿基米德這樣無窮分割的想法和 17 世紀的克卜勒（J.Kepler，1571-1630）和卡瓦列里（B. Cavalieri，1598-1647）完全相同；甚至他提供獨特之「發現的方法」，從而利用了具物理直觀的「微元」論述，不但因此得到許多輝煌的成果，更是間接或直接的影響後來的積分學發展。

阿基米德在定理的嚴密論證前，所提供特有之「發現的方法」，不但在數學的發展上扮演了重要角色，也可以提供我們作爲數學教學上的參考。阿基米德和同時代的數學家截然不同，對於直觀並沒有完全置之不理，反而透過依靠直觀的力學方法，提供了命題的發現方法，藉此更論述了許多關於面積和體積的定理。

他這樣不受拘束的想法，正是他作爲偉大數學家之一的最好佐證。誠然，一個有足夠空間發揮想像的人，才可能有最傑出的表現。所以，在我們的教學過程中，如果有學生和阿基米德一樣，提出與眾不同的想法，甚至和教科書中提供的做法大相逕庭時，只要是符合邏輯，我們都應該給予學生正面的評價才是。不但如此，我們在教學過程中，應提供學生多元思考的空間，並鼓勵學生多發揮自己的創意，因爲在這樣的學習環境下，才有理由去期待我們的學生，和阿基米德一樣擁有偉大的想法。

註 1：海伯格（Heiberg）於 1906 年發現的希臘手稿之一部分。

註 2：阿里斯泰庫斯（Aristarchus）和歐幾里得的關於圓錐曲線的著作，參看阿基米德《論劈錐曲面體與旋轉橢圓體》的命題 3 和《求拋物線弓形面積》的命題 3 有類似表達。

註 3：阿基米德並未說明平面是如何由平行的直線所組成，也未提及平面是由無限或有限的直線所組成，因此迴避了當時的希臘數學家所恐懼的無限概念。

註 4：事實上，阿基米德除了按照力學方法所作的考察納入命題 11、12 之外，在命題 13 中也給出另一種他認爲仍不具說服力的解法。最後，在命題 14 增加了具有嚴密性的幾何證明。

註 5：這一個命題同時解決了半圓柱即半圓的重心問題。因爲處於原位置上的三角形GHM與同樣處於原位置上的半圓PER，關於H點保持平衡。於是，若設GE上的點X爲半圓OER的重心，則$\frac{2}{3}$HO • △GHM=HX • 半圓PER，即$\frac{2}{3}$HO • HO^2= HX • $\frac{1}{2}\pi \bullet HO^2$ ，亦即HX=$\frac{4}{3\pi}$HQ。

參考書目：

Bell, E. T., 1998: 《大數學家》，台北：九章出版社。

Dunham, W., 1998: 《天才之旅》，台北：牛頓出版社。

Heath, T. L., 1998: 《阿基米德全集》，陝西：科學技術出版社。

Kline, M., 1983: 《數學史》，台北：九章出版社。

Meschkowski, H., 1964: 《偉大數學家的想法》，台北：南宏出版社。

Katz, J., 1993: *A History of Mathematics: An Introduction*. HarperCollins College Publishers.

Stillwell, J., 1989: *Mathematics and Its History*. NY: Springer-Verlag.

Math & Poetry—數學與詩

北縣福和國中 陳昭蓉老師翻譯整理

Es ist wahr, ein Mathematiker, der nicht auch etwas poet ist, wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein.(-------Weierstrass in "einem Brief an die Kovalevskaja")

No mathematician can be a complete mathematician unless he is also something of a poet.

在未來幾期通訊中，我們將節錄「數學史」網路討論群(Historia Mathematica)對於名數學家Weierstrass這一段話的精采討論，讀者們也不妨一起想想，「數學家若非同時兼具詩人的本質，便稱不上是完整的數學家」，究竟有何意涵?

Robert Tragesser:

我常見到這段話不斷的被加以引用，而且使用者往往在無意間帶著某種預期心理，認為學生們或是讀者們應當覺得，數學並非僅僅是冷冰冰的抽象思考與枯燥的數字運算，而是和充滿情感的詩文有相通之處。一廂情願式的認定詩人情感的抒發與射影幾何這樣的學問就是應當極具關聯。如此的引用方式我認為是沒有太大幫助的。我們當然可以說，相似處在於數學家表達想法時相當依賴比喻法，或說是具象化，一如詩人對情緒與景物的描寫方式一般；不過這樣的解讀真是愚蠢而膚淺。所有人都不斷的使用具體化的表達方式，事實上一流的評論家與詩人都堅稱，將想法"語言化"本身就是一種具象化的過程。文藝復興時期的詩人大家Abraham Fraunce 就曾說：「詩中若含有明顯的具體比喻，即為失敗的詩作，讀詩者也難以讀得深刻。」照這麼說來，語言學家似乎是最失敗的讀詩者了。

將數學與詩作類比，其中尚有一種關聯性----數學概念的形成過程中，往往是我們的理性思維、邏輯判斷、特定邏輯思考形式決定這些概念最後呈現的樣貌；在新概念的形成與概念差異比較的過程上，亦是如此。撇開咖啡屋裡如詩的通俗小品詩文不談，真正的詩作在形成過程上，可說是和數學概念的形成一般的嚴謹。即使是最自由的詩體，作詩者仍然得留心音節數目的平衡、前後意念的連貫，也就是詩人們所說的「詩的邏輯」。當然，若是故意以邏輯上的矛盾與語意的不連貫來營造特殊效果，那麼詩中錯誤的邏輯反倒是這首詩的邏輯所在了。

真正的重點應該是，經由語言的表達總難以完全契合我們希望表達的。詩人無法在撰詩時將心中所想的完整而忠實的譜進詩裡，畢竟將想法化為詩的過程就必然為了淬鍊語言而導致意象的形貌受到扭曲，增添原本沒有的概念，或遺漏了難以言傳的想法。而這個特點與數學家的創造過程不謀而合。數學家試圖以邏輯形式呈現出尚未完全成熟的數學概念，在表達之際不免改變原始的想法，開啓新穎的概念，面臨層出的問題，衍生各種的差異；因為企圖將抽象概念具體化邏輯化語言化，各種想法的全新排列組合也應運而生。

柏拉圖提出如下的論點：「經由扭曲原貌，人們獲取新觀念，窺得新景象。」這就是詩人與數學家遵守的創造法則吧！

我總覺得 Weierstrass 這段話經常被單獨引用，脫離了上下文而遭到誤用，斷章取義的引用者又將焦點擺在其修辭技巧與教育功效，忽略其

中真正值得思考的意義。

Tony Mann:

的確，這段話經常獨立出上下文而慘遭濫用，僅僅被視爲一句修辭佳句，即使讀過上下文的人亦常常誤解或誤用。然而遭到誤解的明言錦句一樣是個很棒的起點，足以衍生出珍貴的新觀念。無數繪畫巨擘的作品遭到誤解，卻啓發後進畫者的創作；音樂巨匠的樂曲遭到誤解，演奏者的詮釋卻爲曲子另開新局；數學概念不斷遭到誤解，建構出更豐富的數學概念。這就是文化演進的過程，文明累積的特點。人們永遠無法真正了解過去留下的文化，無法不偏不倚的解讀前人的思想；然而正是因爲如此，我們必須以自己體會到的概念爲出發點，繼續發展下去。即使不情願，我們仍得接受這樣的狀況，那麼何不欣然接受？

Alvarado Ortega:

倘若一句話獨立於上下文之外，仍然引起許多人的共鳴，表示這句話必定蘊含極高的真理。我認爲數學家與詩人相似之處在於，兩者都必須竭盡思維追尋自我內在之思想與自我整體之本質，方能傳遞他認爲美好的事物。數學家的本質在於抽象思考之本能，詩人的本質在其熱烈豐富之情感；兩者的工作都不是機械化的，因爲他們必須不斷檢省自我。

呈現方式或者有異，但我想，促使他們向前的原動力卻是相似的。

（代續）

從科學教育看數學教育

台師大碩士班研究生 林倉億

「數學是科學嗎？」常常聽到的回答是：「數學是科學之母，所以它不是科學。」這樣的說法或許會讓聽者覺得莞爾，但實際上並沒有回答問題，筆者常用的說辭是：「我們看得到原子、細胞，但 2 在哪裡呢？」[1]也就是科學知識與數學知識有著本質上的不同，所以，筆者認爲數學並不該被劃入科學之中。雖然如此，在人類發展過程中，數學與科學卻常常是一同進展，相輔相成的。例如，求運動物體的瞬時速度促進了微積分的發明，而微積分的發展則提供了科學家研究大自然的利器；因此，在數學教育與科學教育之間，必然有著許多相似、呼應之處，數學教師與科學學科教師之間，也應有著許多相互合作、學習的地方，數學教育家弗賴登塔爾(Hans Freudenthal)說：「如果抱怨物理學家教的是非數學化的物理，那同時也應抱怨數學家搞的也是孤立的數學。」[2]

有鑑於此，本文希望藉由介紹傅麗玉的《科學家的「不當行爲」故事在中等科學教育的價值與意義》一文，[3]提供數學教師們另類的教學靈感。

何謂「不當行爲」？傅麗玉在文章中給了明確的界定：

> 科學家的「不當行為」，是指相對於傳統對科學方法、科學態度以及科學家形象的刻板印象而言，科學家在其科學專業工作範圍內所做的不適當、不客觀、不理性、或作假的研究行為，包括：偽報研究結果、假造數據、隱藏不利的數據、捏造未完成或未進行的實驗結果、欺騙同事、

偷取或佔有他人的研究成果、進行非法或不道德的實驗以及報復研究工作上的對手等行為。科學家個人私生活範圍的行為不在「不當行為」討論範圍內。

近年來拜傳播媒體發達之賜，這類行爲對社會大眾已不再是「百年難得一見」，例如 1986 年造假的的冷核融合反應，或近期的複製人的爭議，爲此，傅麗玉乃大聲疾呼：「與其讓學生在大眾媒體的報導下學習或被誤導，不如在科學教育中予以適當的引導。」首先，讓我們引述該文各節的標題：

壹、前言

貳、科學家的「不當行為」故事與科學教育

參、一些科學家「不當行為」的案例與相關的科學本質議題

肆、科學家的「不當行為」故事在台灣中等科學教育的價值與意義

（一）呈現科學社群研究成果不斷地受到檢驗

（二）檢視科學教育如何呈現科學與社會的互動關係

（三）呈現科學的人性面與科學社群工作生涯之間的交互關係

（四）檢視科學教學的意義，反省科學教學方法與評量方法

（五）檢討傳統科學教育中科學方法的意義與問題

（六）挑戰學校教科書簡化科學理論發展的企圖

伍、運用科學家的「不當行為」故事在科學教育的一些建議

陸、結語

我們不難看出，作者所認爲的科學學習與科學教育，不該是將學生孤立在知識的象牙塔裡，而應引導學生思考科學的意義與社會的互動關係，而這不啻是科學教育改革的潮流，更是數學教育甚至其他學科教育努力的方向。

類似地，如果我們將數學家的「不當行爲」界定成：

數學家的「不當行為」，是指相對於傳統對數學方法、數學態度以及數學家形象的刻板印象而言，數學家在其數學專業工作範圍內所做的不適當、不客觀、不理性、或作假的研究行為，包括：偽報研究結果、欺騙同事、偷取或佔有他人的研究成果、以及報復研究工作上的對手等行為。數學家個人私生活範圍的行為不在「不當行為」討論範圍內。

那麼在數學中是否也找得到這樣的行爲？答案是肯定的，而且可說是「不遑多讓」！讓我們看看下面的例子：

1. 埃及的僧侶隱藏洪水的周期，佯稱因爲舉行了宗教儀式而帶來了洪水，並按期退去，迫使農民爲儀式支付報酬。[4]
2. 畢氏學派將數字當成宗教教義來信仰，甚至殺害了洩露「不可公度量比」機密給外人的門徒。
3. 十六世紀的義大利數學家們將解三次方程式做爲爭奪名聲、權利的工具。[5]
4. 卡當諾(Gerolamo Cardano)研究機率是爲了賭博，他所寫的《賭博的遊戲》(*Liber De Ludo Alead*)一書中，不但有他的研究成果，更有一些實戰、作弊的技巧，例如在某張牌上抹上肥皂，則在切牌時就容易得到該張牌。[6]
5. 費馬(Fermat)聲稱證明了今天所謂的「費馬最後定理」。

6. 羅必達(Marquis de l'Hospital)在所寫的《*Analyse des Infiniment Petits*》中，未具名地引用了許多約翰・白努利(Johann Bernoulli)的研究成果，讓世人以爲那是他的創見，例如微積分中的「羅必達法則」便是約翰・白努利的貢獻。[7]
7. 克朗涅克(Leoold Kronecker)不但不斷地攻擊康托(Georg Cantor)無限集合的觀念，還盡可能地排擠他，例如利用自己是主編的身份，一再延後刊登康托的論文。[8]
8. 「谷山—志村猜想」因懷爾斯(Andrew Wiles)證明了「費馬最後定理」而再度聲名大譟，但謝爾(Jean-Pierre Serre)卻一直別有居心地稱它爲「谷山—威爾猜想」，爲此還引起了一場論戰。[9]

透過上述的例子，回頭看看傅麗玉在文章第肆節中所提的六個價值與意義，只要將「科學」二字改成「數學」，便成爲數學教育中值得認真以對的價值與意義，也就是說，透過數學家的「不當行爲」，我們也可以引導學生思考數學的意義與社會的互動關係，讓數學不只是存在遙遠的柏拉圖理想世界，數學家不再是不食人間煙火的奇人異士。至於在實際教學中的運用，傅麗玉在文章的第伍節中有給一些建議，而在本通訊第二卷第十期(1999 年 10 月)中，有一系列探討數學家傳記的教育意義與價值，讀者不妨參考之。

數學知識與科學知識本質上的不同，對於數學教育與科學教育的合作會有何限制與影響？礙於學識有限，筆者無法回答這問題，但在九十年度即將全面施行的「九年一貫課程」中，各領域間的橫向連結與合作是一再強調的重點之一，就「數學領域」而言，與「生活科技領域」的連結、合作應該是比較容易切入的一環，希望筆者在本文中所提供的一些資料與看法，能對數學教師們有所幫助。

註解：

1. 這說法得自洪萬生教授的數學史課堂討論。
2. 引自弗賴登塔爾，《作爲教育任務的數學》(上海：上海教育出版社，1995)，頁 71。
3. 刊載於科學教育學刊，1999，7(3)，281-298。
4. 參考 Kline, Morris，《西方文化中的數學》(台北：九章出版社，1995)，頁 18。
5. 參考 Dunham, William，《天才之旅》(台北：牛頓出版社，1995)，頁 151-154。
6. 參考 Kline, Morris，《西方文化中的數學》(台北：九章出版社，1995)，頁 368。
7. 參考 Katz, Victor J., *A History of Mathematics*, (HarperCollins College Publishers, 1993), pp.482-483.
8. 參考 Katz, Victor J., *A History of Mathematics*, (HarperCollins College Publishers, 1993), pp.660-664.
9. 參考 Aczel, Amir D.,《費馬最後定理》(台北：時報出版社，1998)，頁 106-121。